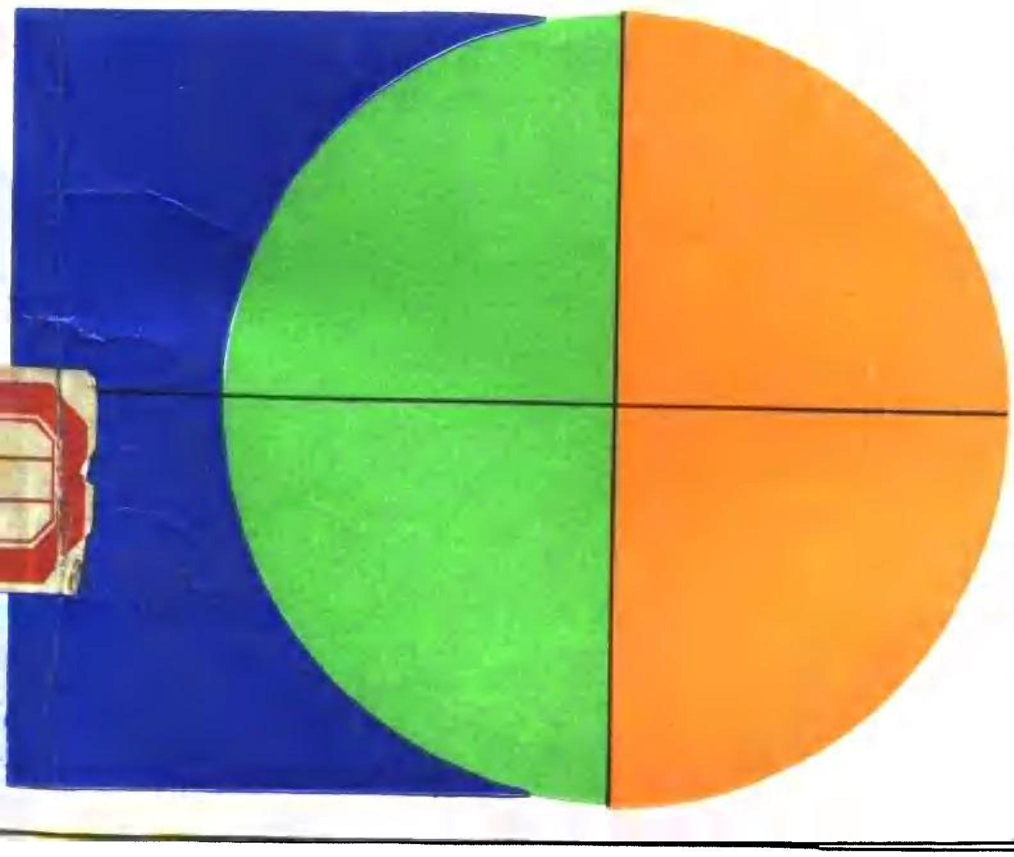
数学分析纵横谈

沈燮昌　邵品琮　编著

北京大学出版社



数学分析纵横谈

沈燮昌　邵品琮　编著

北　京　大　学　出　版　社

内 容 简 介

本书着重介绍数学分析中一些值得深入追究的疑问与难题。全书共分14个专题。内容包括：揭示数学分析中重要概念的本质，介绍典型解题方法和技巧；数学分析中的重要结果在天体力学、微分方程中的应用；探讨一些有趣的数学问题（如“关于哥德巴赫猜想”等）。本书以大学数学分析课程的一般数学基础为起点，旨在帮助读者更好地理解数学分析中的重要概念，掌握典型的解题方法和技巧。力求作到前后贯通，开拓思想，既注意到趣味性、通俗性、应用性，又保持严格的逻辑性。

本书可作为综合大学、师范院校、理工科大学数学系，应用数学系，计算机系大学生的数学分析课的学习参考书，也可作为教师的教学参考书，对广大数学爱好者、工程技术人员来说也能从本书得到一些启示。

数学分析纵横谈

沈燮昌　邵品琮　编著

责任编辑：刘　勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　11.5印张　290千字

1991年5月第一版　1991年5月第一次印刷

印数：0001—7,000册

ISBN 7-301-01430-9/O·235

定价：6.40元

序

大家知道，采用“数学分析”这个词汇比俗称的“微积分”，除了在内容上要体现得比较全面以外，在叙述上还要求尽可能的严谨。

在我国，除了综合性大学与一些理工大学有“数学分析”课以外，尚有相当数量的师范性高等院校及教育学院等的课程设置中也开设了“数学分析”这一门基础课。广大师生在教学过程中，必将或多或少地涉及或遇到一些深入追究的疑问与难题，而这些问题，又往往在现行教科书中尚缺详尽的阐明.例如，关于极限这一基本概念正反叙述的推敲，求极限有多少种常用方法，而以哪些方法最有效？级数与广义积分的一致收敛概念正反叙述及所起的作用；一致连续的概念的正反叙述及如何判断？凸函数确切的定义及其作用；积分中值定理的确切提法，e与π的无理性及超越性等。又如一些重要概念的本质究竟是什么？例如泰勒公式的本质是什么，它有些什么应用？数学分析中的黎曼积分与实变函数中勒贝格积分之间的本质联系与区别是什么？其本质差别是否只在于前者在x轴进行分割，而后者是在y轴进行分割？此外，还有一些在“数学分析”书籍中提到的，但没有展开讨论的问题，如魏尔斯特拉斯逼近的第一定理与第二定理证明的思想是什么？如何将它们作进一步的推广？数学分析在天体力学上的应用等。本书基于上述情况，主要在一元函数的数学分析的范围内（当然，也适当地联系到一点多元函数，微分方程等），结合作者几十年的教学经验，选了包括上述所提问题在内的共十四个专题为内容。这些内容中的大多数，曾于1988年暑期，由青岛大学数学系主办的，有全国各地100多名教师参加的，全国数学分析若干疑难

问题的讲习班上进行过讲授。本书是以这一讲习班上讲义为基础，经过改写及补充而形成的。

我们在本书中的讲释以讲义的形式出现，并以大学数学分析课程的一般数学基础为起点，前后贯通，开拓思想，既注意到趣味性，通俗性，应用性，又保持严格的逻辑性，旨在适合于全国各类大学，大专院校广大数学教师与学生进行自学参考，对于广大工程技术人员也可以从阅读本书中得到一些启示。

本书第一、二、四、六、九、十一、十二、十四讲，是由北京大学沈燮昌教授执笔的；其余部分，即第三、五、七、八、十、十三讲，是由曲阜师范大学邵品琮教授执笔的。

青岛大学数学系，曲阜师范大学学报编辑部为1988的讲习班作了很多工作，我们特此表示感谢。我们还要特别地感谢北京大学出版社数理编辑室的各位同志，在他们的大力帮助下，才使本书能顺利出版。

本书作为"纵横谈"而言，只是一个开端。数学分析其余部份，例如多元函数等，应当如何更进一步展开纵横谈？尚希广大读者提出宝贵的意见。

沈燮昌　邵品琮

1989年4月于北京大学中关园

目　录

第一讲　求极限的方法

极限的概念是微积分学的基础。只有正确的理解极限的概念以及掌握求极限的方法才能真正地学好微积分。这一讲就是介绍这方面的内容，这里共介绍了十种求极限的方法以及一些重要的极限，其中最重要且有效的方法是利用泰勒（Taylor）公式来求极限。

1.1　利用定义求极限

定义　我们说序列$\{x_n\}$以数 a 为极限，且记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \quad (n\to+\infty),$$

若任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使当$n>N$时，就有

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

这里，数$\varepsilon>0$是任意给的，这一点很重要，只有这样，才能从(1.1)看出，当 n 无限增大时 x_n 无限地接近于a，这也是刻划 x_n 与其极限值 a 相差的范围或者说其误差的界限。一般地说，不等式(1.1)并不是对于任何下标 n 所对应的 x_n 都成立。实际上，我们所研究的是变量 x_n 变化的趋势，因此也没有必要这样地来要求，而自然数N正是起到这样的作用，即当下标 n 足够大时（$n>N$），对应的 x_n 才满足不等式(1.1)。因此为了要使序列$\{x_n\}$的极限是a，就要求对于任给的数$\varepsilon>0$（它不是某一个具体给定的数），求一个N（一般地是通过 ε 来寻找的），使得当下标$n>N$时，对应的x_n就满足不等式(1.1)。因此不等式 (1.1) 是最终的目标，我们要希望满足这个不等式来寻找 N。这是关键所在。

定义 设函数$f(x)$定义在$x=x_0$的除去x_0以后的一个邻域：$S(x_0)\setminus\{x_0\}$，我们说当x趋向于x_0时，函数$f(x)$以A为极限，且记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to x_0),$$

若任给$\varepsilon>0$，存在数$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$，$x\in S(x_0)\setminus\{x_0\}$时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \tag{1.2}$$

这里，像上面一样，不是要求对所有的x，满足不等式(1.2)，而是要求对任意的$\varepsilon>0$，在$x=x_0$附近有一个小区间$0<|x-x_0|<\delta$（除去$x=x_0$这一点，因为这里是研究$x\to x_0$时，$f(x)$的变化趋势），而在此小区间上，要求满足（1.2）。（1.2）是刻划$f(x)$与A的接近程度。由于ε的任意性，因此（1.2）表示在$x=x_0$附近的小区间$0<|x-x_0|<\delta$上，对应的函数值$f(x)$与A要多近就多近。因此不等式（1.2）也是最终目标，我们也希望通过满足这个不等式来寻找δ，即寻找小区间$0<|x-x_0|<\delta$。

例1.1 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,$$

其中$\alpha>0$。

证 任给$\varepsilon>0$，要找N，使$n>N$时，有

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}\right|<\varepsilon \tag{1.3}$$

即

$$n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.4}$$

由此，取$N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$，当$n>N$时，显然(1.4)成立，因而（1.3）也成立。证毕。

例1.2 证明

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad (0<|q|<1).$$

证 任给 $\varepsilon>0$（不妨认为 $\varepsilon<1$），要找 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|q^n|<\varepsilon, \tag{1.5}$$

从而

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}. \tag{1.6}$$

由此取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当 $n>N$ 时，(1.6) 成立，因而(1.5)也成立，证毕.

例1.3 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0).$$

证 任给 $\varepsilon>0$（不妨认为 $\varepsilon<1$），要找 N，使当 $n>N$ 时，有

$n>N$时

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon, \tag{1.7}$$

即

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

$\ln(1+\varepsilon)>0.$
$\ln(1-\varepsilon)<0$
$\ln a$ 不定.

即

$$\ln(1-\varepsilon)<\frac{\ln a}{n}<\ln(1+\varepsilon),$$

∴分开讨论.

$$n>\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)} \quad 与 \quad n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)} \tag{1.8}$$

同时成立，因此取

$$N=\begin{cases}\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right], & 当a>1,\\[2ex] \left[\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right], & 当a<1,\end{cases}$$

当$n>N$时，(1.8) 中两个式子显然都同时成立，因此，(1.7)成立。证毕。

例1.4 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{100^n}{n!}=0.$$

证 当$n>100$时，有

$$\frac{100^n}{n!}=\frac{100\cdot100\cdots100}{1\cdot2\cdot3\cdots100}\cdots\frac{100}{n-1}\cdot\frac{100}{n}$$

$$<\frac{100A}{n},\tag{1.9}$$

其中$A=\dfrac{(100)^{100}}{100!}$，因此要使

$$\left|\frac{100^n}{n!}\right|<\varepsilon,\tag{1.10}$$

当$n>100$时，只要

$$A\frac{100}{n}<\varepsilon\tag{1.11}$$

就够了。这样一来，取$N_1=\left[\dfrac{100A}{\varepsilon}\right]$，当$n>N_1$时，(1.11) 就满足。再比较(1.9)可知，若取$N=\max\left(100,\left[\dfrac{100A}{\varepsilon}\right]\right)$，当$n>N$时，有$n>100$及$n>\left[\dfrac{100A}{\varepsilon}\right]$，因而(1.10)成立。证毕。

例1.5 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{n^5-n^3+1}=1.$$

证 任给$\varepsilon>0$，要找N，使$n>N$时，有

$$\left|\frac{n^5}{n^5-n^3+1}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{n^3-1}{n^5-n^3+1}\right|<\varepsilon. \tag{1.12}$$

显然，当n较大时，如$n\geqslant 2$，有

$$\left|\frac{n^3-1}{n^5-n^3+1}\right|=\left|\frac{n^3-1}{n^5\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}\right)}\right|$$

$$\leqslant\frac{n^3}{n^5\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{3}\ \frac{1}{n^2}, \tag{1.13}$$

因此要使（1.12）成立，当$n\geqslant 2$时，只要

$$\frac{4}{3}\ \frac{1}{n^2}<\varepsilon \tag{1.14}$$

就够了，即

$$n^2>\frac{4}{3\varepsilon}\ 或\ n>\sqrt{\frac{4}{3\varepsilon}}. \tag{1.15}$$

这样一来，取$N=\max\left(2,\left[\sqrt{\frac{4}{3\varepsilon}}\right]\right)$，则当$n>N$时，有$n>2$及$n>\sqrt{\frac{4}{3\varepsilon}}$，因此(1.13)与（1.14）同时成立。因而（1.12）也成立。证毕。

例1.4与例1.5的方法称适当放大法。若取绝对值再放大以后的量是无穷小量，则原来的量也必是无穷小量。所谓“适当放大”就是不能放得太大，否则就证不出放大以后的量是无穷小量了。

例1.6　证明

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4.$$

证 任给$\varepsilon > 0$，要找$\delta > 0$，使当$0 < |x-1| < \delta$时，总有

$$\left| \frac{x^4 - 1}{x - 1} - 4 \right| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

当$x \neq 1$时，有

$$\left| \frac{x^4 - 1}{x - 1} - 4 \right| = |x^3 + x^2 + x + 1 - 4|$$

$$= |(x-1)(x^2 + 2x + 3)|, \tag{1.17}$$

设$|x-1| < 2$，则有$|x| < 3$，因而

$$|x^2 + 2x + 3| \leqslant |x|^2 + 2|x| + 3 \leqslant 18. \tag{1.18}$$

这样一来，当$|x-1| < 2$时，比较(1.17)与(1.18)，为了使(1.16)成立，只要

$$18|x-1| < \varepsilon,$$

即

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{18} \tag{1.19}$$

就够了，因此，取$\delta = \min\left(2, \frac{\varepsilon}{18}\right)$ 当$0 < |x-1| < \delta$时，(1.18)及（1.19）都成立。因而由（1.17）知（1.16）成立，证毕。

这里又一次地用到了适当放大法，用这样的方法，还可以证明

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n,$$

$\frac{a_1}{1-q}$

请读者自己证明。

例1.7 证明

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a \geqslant 0).$$

证 $a=0$时是显然的，因为为了对任给$\varepsilon>0$要有

$$|\sqrt{x}-0|<\varepsilon,$$

即

$$|x|<\varepsilon^2,$$

因此，取$\delta=\varepsilon^2$，当$0<|x-0|<\delta$时，上式成立。

若$a>0$，任给 $\varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，总有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\varepsilon. \tag{1.20}$$

容易看出，取$\delta=\varepsilon\sqrt{a}$即可，因为此时，即当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon.$$

证毕。

例1.8 求证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

证 对任给$\varepsilon>0$，要找N，使当$n>N$时，有

$$\left|\frac{n}{2^n}\right|<\varepsilon. \tag{1.21}$$

显然，当$n\geqslant2$时，

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots+1}$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}.$$

因此只要

$$\frac{2}{n-1}<\varepsilon,$$

即

$$n>1+\frac{2}{\varepsilon}$$

时，（1.21）成立。因此取 $N=\max\left(2,\left[1+\frac{2}{\varepsilon}\right]\right)$，当 $n>N$ 时，（1.21）成立。证毕。

例1.9 求证 [illegible]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^b}{a^n}=0,\quad a>1, b\text{是实数}.$$

证 对任意的 $\varepsilon>0$，要找 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^b}{a^n}\right|<\varepsilon. \tag{1.22}$$

不妨认为 $b\geqslant 0$。令 $a=1+p$，$p>0$，我们有

$$\frac{n^b}{a^n}\leqslant\frac{n^{[b]+1}}{(1+p)^n}=\frac{n^{[b]+1}}{1+np+\frac{n(n-1)}{2!}p^2+\cdots+p^n}$$

$$\leqslant\frac{n^{[b]+1}}{\frac{n(n-1)\cdots(n-[b]-1)}{([b]+2)!}p^{[b]+2}}$$

（当 $n>[b]+2$ 时）

$$\leqslant\frac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}}\,\frac{n^{[b]+1}}{(n-[b]-1)^{[b]+1}}\cdot\frac{1}{n}.$$

显然，当 $n>2([b]+2)$ 时，有

[illegible] $$\frac{n}{n-[b]-1}\leqslant\frac{n}{\frac{n}{2}}=2.$$

因而有

$$\frac{n^b}{a^n} \leqslant \frac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}} \cdot 2^{[b]+1} \cdot \frac{1}{n} \triangleq M \frac{1}{n},$$

其中

$$M = \frac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}} \cdot 2^{[b]+1}。$$

因此只要

$$\frac{M}{n} < \varepsilon,$$

即

$$n > \frac{M}{\varepsilon}$$

时，就有(1.22)。由此取 $N = \max\left(\frac{M}{\varepsilon}, 2([b]+2)\right)$，当 $n > N$ 时，(1.22) 成立。证毕。

例1.10 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

证 对任意的 $\varepsilon > 0$，要找 N，使当 $n > N$ 时，有

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \tag{1.23}$$

即

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon。$$

上式左边的不等式是满足的，而右边的不等式为

$$n < (1+\varepsilon)^n,$$

由于

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

$$\geqslant \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2, \quad n \geqslant 2,$$

因此只要满足

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$