

高等学校教材

结构矩阵分析和程序设计

匡文起 张玉良 辛克贵 编

高等教育出版社

高等学校教材

结构矩阵分析和程序设计

匡文起 张玉良 辛克贵 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为高等工业学校土建、水利、道桥等专业的学生学习“结构矩阵分析和程序设计”而编写的教材。

全书共分八章。前六章是基本部分,详细地讲授了结构矩阵分析的几种实用方法,并介绍了相应的程序设计;第七、八两章是讲解结构动力分析的矩阵方法和结构矩阵分析的几个特殊问题,是本书的提高部分,各校可根据具体情况选学这部分内容。本书有较多的例题和习题,习题附有答案。

本书也可作为有关专业研究生的教学用书,也可供有关工程技术人员参考。

本书责任编辑美茵余

高等学校教材

结构矩阵分析和程序设计

匡文起 张玉良 辛克贵 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民邮电出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 19 字数 430 000

1991 年 5 月第 1 版 1991 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—2 575

ISBN7-04-003060-8/TB·173

定价 5.75 元

目 录

第一章 结构分析和结构矩阵分析1	
§ 1-1 结构分析的发展.....1	
§ 1-2 平衡和协调.....1	
§ 1-3 结构矩阵分析的方法.....2	
§ 1-4 程序设计.....2	
第二章 单元分析与坐标转换4	
§ 2-1 结构的离散化及单元杆端力与杆端位移.....4	
§ 2-2 逆步变换.....10	
§ 2-3 单元坐标系中的单元刚度矩阵.....11	
§ 2-4 整体坐标系中的单元刚度矩阵.....13	
§ 2-5 单元刚度矩阵的性质.....15	
习题.....16	
第三章 矩阵位移法分析连续梁结构18	
§ 3-1 基本原理.....18	
§ 3-2 连续梁计算的框图与源程序.....22	
§ 3-3 例题及程序的使用.....27	
习题.....30	
第四章 矩阵位移法分析桁架结构31	
§ 4-1 平面桁架的整体刚度方程.....31	
§ 4-2 整体刚度矩阵的集成.....35	
§ 4-3 引入支承条件.....40	
§ 4-4 内力与支座反力的计算.....43	
§ 4-5 平面桁架矩阵分析举例.....44	
§ 4-6 平面桁架程序的框图设计.....46	
§ 4-7 平面桁架的源程序及算例.....62	
§ 4-8 空间桁架的单元分析.....72	
§ 4-9 空间桁架的整体分析.....77	
§ 4-10 空间桁架程序设计及源程序.....83	
习题.....96	
第五章 矩阵位移法分析平面刚架结构100	
§ 5-1 单元定位向量.....100	
§ 5-2 结构刚度方程.....102	
§ 5-3 利用单元定位向量集成结构刚度矩阵.....105	
§ 5-4 等效结点荷载.....111	

§ 5-5 结构的内力计算.....117	
§ 5-6 平面刚架程序的框图设计.....126	
§ 5-7 平面刚架的源程序及算例.....137	
§ 5-8 结点位移分量编号的自动生成.....148	
§ 5-9 结构刚度矩阵的变带宽存贮.....153	
§ 5-10 变带宽系数矩阵的 LDL^T 分解法.....159	
习题.....166	
第六章 矩阵位移法分析交叉梁系和空间刚架结构173	
§ 6-1 交叉梁系的单元分析.....173	
§ 6-2 交叉梁系矩阵分析举例.....179	
§ 6-3 空间刚架的单元分析.....183	
§ 6-4 空间刚架矩阵分析举例.....191	
§ 6-5 空间刚架程序设计.....195	
习题.....218	
第七章 杆件结构自由振动的矩阵分析221	
§ 7-1 概述.....221	
§ 7-2 刚度法计算多自由度体系自由振动的基本原理.....222	
§ 7-3 多自由度体系主振型正交性和正则坐标.....224	
§ 7-4 柔度法计算多自由度体系的自由振动.....231	
§ 7-5 迭代法求自振频率和主振型及源程序.....234	
习题.....239	
第八章 结构矩阵分析中的几个问题240	
§ 8-1 带刚域杆件的处理.....240	
§ 8-2 剪切变形的影响.....245	
§ 8-3 子结构的应用.....248	
§ 8-4 斜支座的处理.....256	
§ 8-5 弹性支座.....258	
习题.....260	
附录I 计算机实习作业261	
附录II BASIC 语言源程序267	
附录III 习题答案290	
参考书目295	

第一章 结构分析和结构矩阵分析

§ 1-1 结构分析的发展

结构分析的含义,不仅指在一定的已知条件下对结构的内力和变形等进行计算,而且包括分析刚度变化对内力的影响,对结构的几何组成进行分析,以及选择合适的结构型式等等。与许多其他学科一样,结构分析工作的发展与人类生产活动的发展有着密切的关系。桁架结构分析理论与分析方法的发展和钢结构的广泛应用有直接关系,刚架结构的诸多分析方法则与钢筋混凝土结构工程的大量出现更有密切关系。本世纪四、五十年代以来在新型航空器的设计和超高层、特大跨度建筑物的设计等工作中,结构型式越来越复杂,分析工作的难度越来越大,计算工作量也与日俱增,原有的计算工具和计算方法已经不能适应新情况的需要。40年代发明了电子计算机以后,有限元法等数值方法有了迅猛的发展,矩阵代数等数学方法得到了广泛的应用。在这种情况下,结构矩阵分析方法不但应用范围越来越广,而且它本身的理论、方法和手段也日臻完善。结构矩阵分析的理论基础与结构力学是相同的,其数学方法主要是矩阵方法和线性代数等,而使分析计算工作得以实现则主要依靠电子计算机。可以把结构矩阵分析看成传统的结构力学的延伸,但在处理问题的方法和手段上又与传统的结构力学有不同之处。

§ 1-2 平衡和协调

力的平衡和变形的协调是结构矩阵分析自始至终都须遵守的。在结构静力分析的过程中,力的平衡是始终要遵守的规则。就结构的整体而言,结构必须在荷载与支座反力的共同作用下保持平衡,就结构的一部分而言,这一部分上作用的荷载、支座反力和内力也是平衡的,从边界条件的角度来看,静力边界条件必须保证支承物体能给结构物提供适当的边界力(支承反力)以保证结构物处于静力平衡状态。上述这些关系在整个结构矩阵分析过程中的各个阶段都必须得到保证。这一点对于计算和校核都是十分重要的。

变形的协调是结构矩阵分析的另一个重要方面。结构本身的变形必须是协调的,结构与支承之间的变形也必须是协调的。

总之,结构上所受的力必须是平衡的,结构的变形必须是协调的。在结构矩阵分析的整个过程中都必须是这样的。

§ 1-3 结构矩阵分析的方法

从未知量选取的角度看,结构矩阵分析的方法可以分为:

(1) 矩阵位移法 取结构的结点位移作为基本未知量,此法亦称刚度法。在处理手段上又分为矩阵位移法的先处理方法和后处理方法。

(2) 矩阵力法 取结构的多余约束力作为基本未知量,此法亦称柔度法。秩力法也是矩阵力法的一种。

还有吸收了矩阵位移法和矩阵力法两者优点的矩阵混合法。该方法所取的基本未知量为两部分,其中一部分是结点位移,另一部分是多余约束力。

处理大型和超大型结构时,常用子结构法和多重子结构法,一个子结构类似于有限元法中的一个宏单元。

对于一个给定的超静定结构,矩阵力法的基本体系和多余未知力的选择因人而异,不是唯一的,这就给编制通用计算程序带来了困难。为了解决这一问题,有人提出了秩力法,即利用矩阵计算中秩的概念将矩阵力法的计算过程加以规格化。而矩阵位移法的最大优点是它的基本体系和结点位移未知量的选择一般来说是唯一的,具有较强的通用性,适合于电算的要求,有利于通用计算程序的编制。因此,矩阵位移法在结构矩阵分析中得到了广泛的应用,用此法编制了各种结构的计算程序。本书下面各章也主要讲解应用矩阵位移法计算各种杆件结构的方法。

§ 1-4 程序设计

从确定解题方式、设计程序框图,到使问题内容或解题计划变为计算机能够接受的指令或语句系列这样一个过程,就称为程序设计。

程序设计需要使用一种算法语言,目前我国结构分析程序设计所使用的语言主要有 FORTRAN 语言、BASIC 语言和 PASCAL 语言等。这些语言各有其特点,但从应用的角度来看,我国结构分析工作目前使用 FORTRAN 语言较多,故本书正文中程序采用 FORTRAN 语言编写,而在书末的附录 II 中列出用 BASIC 语言编制的程序,以供参考。

程序设计的技巧,需要在编制程序的过程中逐渐熟练。有几种主要的手段是经常使用的,例如顺序执行语句、判断语句和循环语句的使用,等等。在不同的算法语言中都会用到这些手段。学习程序设计要采取由浅入深,从简单到复杂的办法,一开始要学习编制一些简单的程序,力求其层次清晰,步骤明确。简单的问题会做了,则进一步的程序编制技巧可以一步一步地加上去,经过一个阶段,就可以开发复杂的程序了。初学程序设计者不要一开始就搞一个头绪多的复杂程序,这样,不但调试程序的时间要长,而且不容易形成清晰的思路。本书所涉及的各项计算程序都是由浅入深,并辅以框图和解释,采取循序渐进的学习方法,是会取得预期的效果的。本书框

图的符号及标识符的使用都力求照顾通用的习惯，本书读者在新编制程序时也应尽可能地采用通用性强的符号与标识符，这样做便于程序的互相校核、互相引用，有利于程序的使用和推广，

本书所使用的 FORTRAN 语言采用 FORTRAN-77 版本，BASIC 语言采用一般 BASIC，个别地方涉及扩展 BASIC，因此可以在类型相当广泛的计算机上运行。

第二章 单元分析与坐标转换

§ 2-1 结构的离散化及单元杆端力与杆端位移

一、结构的离散化

杆件结构是由若干根杆件组成的结构。在进行结构矩阵分析时, 必须把结构离散成一个个独立的杆件——单元, 杆件连接处称为结点。把一个完整的结构看成由有限个单元组成的体系, 这就是结构的离散化。

结构矩阵分析也可以称为杆件结构的有限单元法。用有限单元法分析连续介质(例如板、壳结构等)的问题, 单元的划分有人为的因素在内。而杆件结构的矩阵分析, 单元的分割一般是自然形成的。通常是把每个等截面直杆段划分为一个单元, 各单元通过结点互相连接, 并通过支座与基础相连。因此, 分割单元的结点应该是杆件的连接点、截面突变点和结构的支承点等处。有时为了计算上的需要也把杆件中某些特殊点当作结点, 例如集中力作用点等。确定了结构的全部结点, 也就确定了结构单元的划分。从单元划分的角度看, 结构矩阵分析与结构的经典计算方法并无本质区别, 一般地说结构矩阵分析虽然是一种数值方法, 但它的计算结果是精确的。

如有的杆件横截面是连续变化的, 可以将该杆件分成为若干段, 以每段中间的截面作为各分段的截面, 将此变截面杆件近似地用几个等截面杆件来代替。对于等截面的曲杆, 可以用每段折线形杆件来代替, 这些措施可以得到较好的近似计算结果。

对一个结构进行离散化(例如刚架结构)的具体做法是, 根据上述原则对结构进行单元编号和结点编号, 单元编号用①、②、③、……、 m 等表示, 结点编号用 1、2、3、……、 n 等表示, 见图 2-1。

二、单元坐标系中的杆端力和杆端位移

在杆件结构中, 各杆的方向不尽相同。为了分析的方便, 在单元分析时采用单元坐标系。而在结构整体分析时, 则必须采用统一的整体坐标系。无论是讨论平面问题, 还是空间问题, 单元坐标系和整体坐标系都采用右手旋转直角坐标系。

平面杆件结构的整体坐标系用 $x-y$ 表示, 单元坐标系用 $\bar{x}-\bar{y}$ 表示。通常, 单元坐标系的原点放置在单元的始端, 取单元的轴线作为 $\bar{x}$ 轴, 从单元始端到末端的方向作为 $\bar{x}$ 轴的正方向, 从 $\bar{x}$

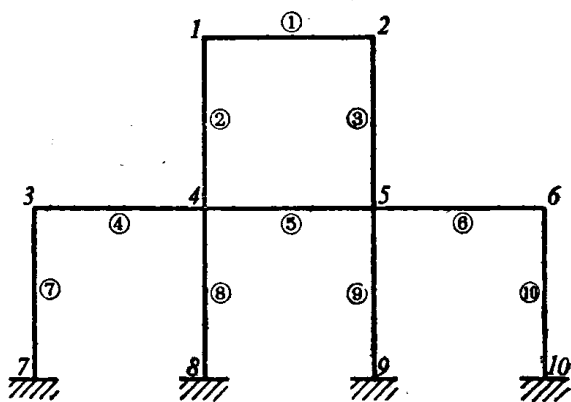


图 2-1

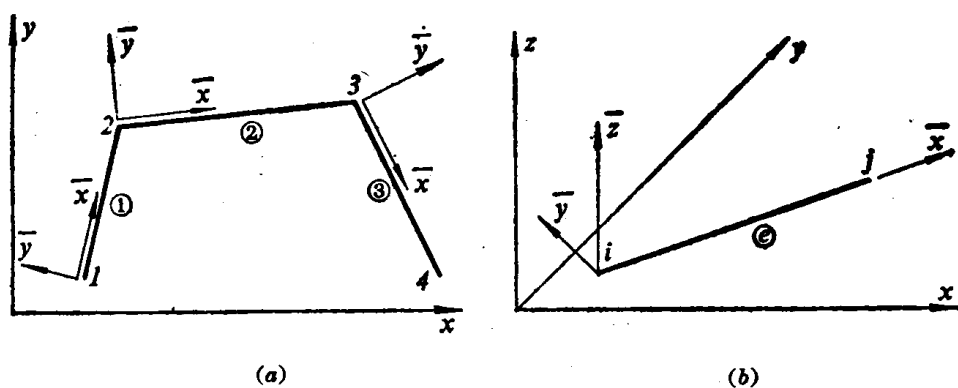


图 2-2

轴的正方向逆时针旋转 90° 就得到 $\bar{y}$ 轴,如图 2-2a 所示。

讨论空间杆件结构时,两种坐标系都用空间的右手直角坐标系。整体坐标系用 $x-y-z$ 表示,单元坐标系用 $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ 表示, $\bar{x}$ 轴的放置方法与平面杆件结构相同, $\bar{y}$ 轴和 $\bar{z}$ 轴取单元横截面的两个主惯性轴。 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 轴要符合右手旋转法则,如图 2-2b 所示。

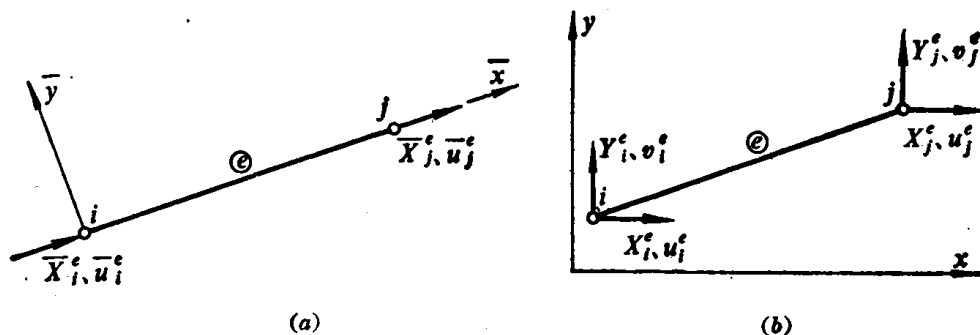


图 2-3

下面解释单元坐标系中的单元杆端力和杆端位移。

1. 平面桁架单元

图 2-3 所示是平面桁架的典型单元②,单元始端和末端结点的编号为 i 和 j 。

在单元坐标系中,平面桁架单元的每个端点都只作用有一个轴向力 X^e ,而每个端点的位移分量有两个,即沿 $\bar{x}$ 方向的位移 $\bar{u}^e$ 和沿 $\bar{y}$ 方向的位移 $\bar{v}^e$,由于在单元坐标系中计算轴向力与位移分量的关系时 $\bar{v}^e$ 不起作用,故图 2-3 中未画出 $\bar{v}^e$ 。因此,每个单元共有两个杆端力分量和两个杆端位移分量,见图 2-3a。设单元坐标系中的单元杆端力向量和杆端位移向量分别用 $\bar{F}^e$ 和 $\bar{\Delta}^e$ 表示,则

$$\bar{F}^e = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ X_j^e \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{u}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

在整体坐标系中,单元的每个端点有两个杆端力分量和两个杆端位移分量,即在 x, y 方向的杆端力 X^e, Y^e 和相应的杆端位移 u^e 和 v^e ,见图 2-3b。设用 F^e 和 Δ^e 表示整体坐标系中的单元杆端力向量和杆端位移向量,则

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ \cdots \\ X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_i^e \\ \mathbf{\Delta}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \cdots \\ u_j^e \\ v_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.2b)$$

式中 $\mathbf{F}_i^e, \mathbf{F}_j^e$ 分别称为始端 i 和末端 j 的杆端力子向量; $\mathbf{\Delta}_i^e, \mathbf{\Delta}_j^e$ 分别称为 i 端和 j 端的杆端位移子向量。

$$\mathbf{F}_i^e = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^e = \begin{Bmatrix} X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{\Delta}_j^e = \begin{Bmatrix} u_j^e \\ v_j^e \end{Bmatrix}$$

无论在单元坐标系中还是在整体坐标系中都规定单元杆端力和杆端位移的方向与坐标轴正方向一致者为正, 相反者为负。图 2-3 中所示方向都是规定的正方向。

2. 平面刚架单元

图 2-4 所示为平面刚架的典型单元②, 单元始端和末端的结点编号仍用 i 和 j 。

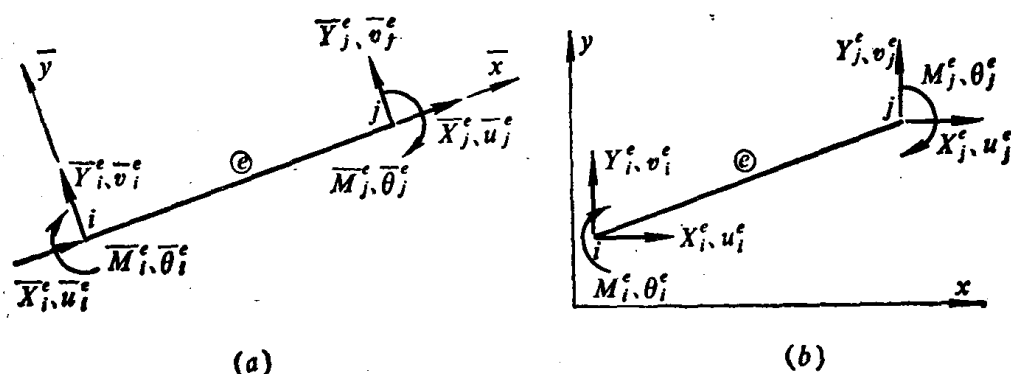


图 2-4

在单元坐标系中, 平面刚架单元的每个端点有三个杆端力分量, 即沿 $\bar{x}, \bar{y}$ 方向的杆端力 $\bar{X}^e, \bar{Y}^e$ 和杆端弯矩 $\bar{M}^e$ 。与此相应, 单元的每个端点有三个杆端位移分量, 即沿 $\bar{x}, \bar{y}$ 方向的杆端位移 $\bar{u}^e, \bar{v}^e$ 和角位移 $\bar{\theta}^e$, 见图 2-4a。因此, 单元杆端力向量 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 和杆端位移向量 $\bar{\mathbf{\Delta}}^e$ 可表示如下:

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^e \\ \bar{\mathbf{F}}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{Y}_i^e \\ \bar{M}_i^e \\ \cdots \\ \bar{X}_j^e \\ \bar{Y}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$\bar{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_i^e \\ \bar{\Delta}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\theta}_i^e \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \\ \bar{\theta}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.3b)$$

式中单元坐标系中的单元杆端力子向量和杆端位移子向量为

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^e &= \begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{Y}_i^e \\ \bar{M}_i^e \end{Bmatrix}, & \bar{F}_j^e &= \begin{Bmatrix} \bar{X}_j^e \\ \bar{Y}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{Bmatrix} \\ \bar{\Delta}_i^e &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\theta}_i^e \end{Bmatrix}, & \bar{\Delta}_j^e &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \\ \bar{\theta}_j^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

在整体坐标系中,单元的每个端点在 x, y 方向杆端力分别为 X^e, Y^e , 杆端弯矩为 M^e , 相应的杆端位移为 u^e, v^e 和杆端角位移 θ^e , 见图 2-4b。单元杆端力向量 F^e 和杆端位移向量 Δ^e 可表示如下:

$$F^e = \begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ M_i^e \\ X_j^e \\ Y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.4a)$$

$$\Delta^e = \begin{Bmatrix} \Delta_i^e \\ \Delta_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.4b)$$

式中整体坐标系中的单元杆端力子向量和杆端位移子向量为

$$\begin{aligned} F_i^e &= \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ M_i^e \end{Bmatrix}, & F_j^e &= \begin{Bmatrix} X_j^e \\ Y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} \\ \Delta_i^e &= \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \end{Bmatrix}, & \Delta_j^e &= \begin{Bmatrix} u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

无论是单元坐标系还是整体坐标系中,平面刚架单元杆端力和杆端位移的正负号规定如下:
沿坐标轴正方向作用的杆端力和杆端位移为正,反之为负;
顺时针方向的杆端弯矩和杆端角位移为正,反之为负。

图 2-4 所示的方向都是规定的正方向。

三、单元杆端力和杆端位移的坐标转换

1. 平面桁架单元的坐标转换矩阵

在结构矩阵分析中单元分析采用的是单元坐标系,结构整体分析采用的是整体坐标系。结构中的各个单元方向各不相同,故单元坐标系的方向也各异。这样,为了要利用单元坐标系中的单元杆端力和杆端位移来建立整体坐标系中的整体刚度方程,就有必要建立单元杆端力和杆端位移在两种坐标系中的转换关系。

图 2-5a 所示为平面桁架单元②在两种坐标系中的杆端力,图 2-5b 所示为 X_i^e, Y_i^e 在单元坐标系中的分解情况。 x 轴与 $\bar{x}$ 轴的夹角为 α ,并规定从 x 轴到 $\bar{x}$ 轴以逆时针方向为正。

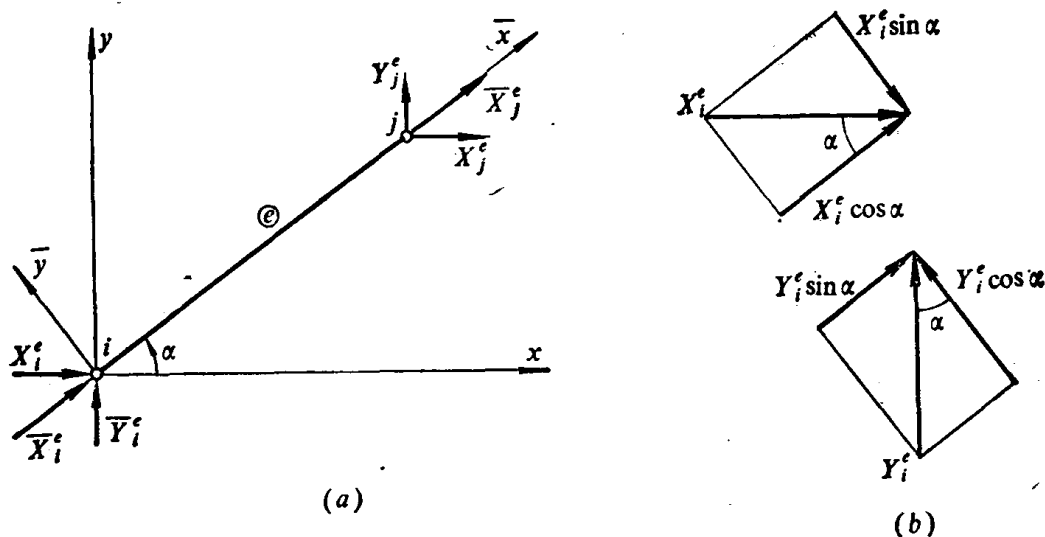


图 2-5

由图 2-5b 可知,如果用 X_i^e, Y_i^e 来表示 $\bar{X}_i^e$ 就得到:

$$\bar{X}_i^e = X_i^e \cos \alpha + Y_i^e \sin \alpha \quad (2.5)$$

对 $\bar{X}_j^e$ 也可以得到类似的关系式:

$$\bar{X}_j^e = X_j^e \cos \alpha + Y_j^e \sin \alpha \quad (2.6)$$

将式(2.5)、式(2.6)汇总在一起,写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{X}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

上式就是单元杆端力的坐标转换关系式,其中的 2×4 阶矩阵称为单元坐标转换矩阵,记作 T ,

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

如果用 $\bar{X}_i^e$ 表示 X_i^e 和 Y_i^e , 用 $\bar{X}_j^e$ 表示 X_j^e 和 Y_j^e 则得

$$\begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ X_j^e \\ Y_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{X}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

式中的 4×2 阶矩阵是矩阵 T 的转置矩阵 T^T 。

对于单元杆端位移也可推得同样的坐标转换关系式。

2. 平面刚架单元的坐标转换矩阵

图 2-6 所示为平面刚架单元②的始端 i 在两种坐标系中的杆端力, x 轴与 $\bar{x}$ 轴的夹角为 α , 并规定从 x 轴到 $\bar{x}$ 轴 α 以逆时针方向为正, 显然, M_i^e 等于 $\bar{M}_i^e$, 它们与坐标系的选择无关。

如果用 X_i^e, Y_i^e, M_i^e 表示 $\bar{X}_i^e, \bar{Y}_i^e, \bar{M}_i^e$ 则由图 2-6 并参考图 2-5b 可得:

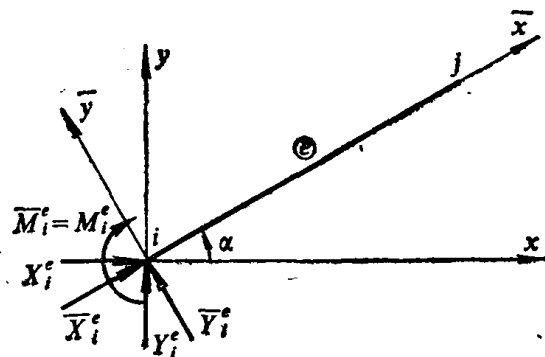


图 2-6

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_i^e &= X_i^e \cos\alpha + Y_i^e \sin\alpha \\ \bar{Y}_i^e &= -X_i^e \sin\alpha + Y_i^e \cos\alpha \\ \bar{M}_i^e &= M_i^e \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

对于杆端力 X_j^e, Y_j^e 和 M_j^e 也可以写出类似的关系式:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_j^e &= X_j^e \cos\alpha + Y_j^e \sin\alpha \\ \bar{Y}_j^e &= -X_j^e \sin\alpha + Y_j^e \cos\alpha \\ \bar{M}_j^e &= M_j^e \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

将式(2.11)和式(2.10)汇总在一起, 并写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{Y}_i^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{X}_j^e \\ \bar{Y}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ M_i^e \\ X_j^e \\ Y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

上式就是单元杆端力的坐标转换关系式,其中的 6×6 阶矩阵称为单元坐标转换矩阵,记做 T ,

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

如果用单元坐标系中的单元杆端力表示整体坐标系中的单元杆端力,则得

$$\begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ M_i^e \\ \hline X_j^e \\ Y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{Y}_i^e \\ \bar{M}_i^e \\ \hline \bar{X}_j^e \\ \bar{Y}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

式中的 6×6 阶矩阵是矩阵 T 的转置矩阵 T^T 。

对于单元杆端位移也可以推得同样的坐标转换关系式。

§ 2-2 逆步变换

在结构矩阵分析中涉及到力之间以及位移之间的各种线性变换在一定条件下都遵守一个规律,即逆步变换的规律。

逆步变换的规律可解释如下:

设结构上作用有广义力向量 $P_{n \times 1}$ 和 $\bar{P}_{m \times 1}$, 并有广义位移向量 $u_{n \times 1}$ 和 $\bar{u}_{m \times 1}$, 其中向量 P 和 u 对应(或称共轭), 向量 $\bar{P}$ 和 $\bar{u}$ 对应(或称共轭), 如果存在一个线性变换

$$\bar{u}_{m \times 1} = A_{m \times n} u_{n \times 1} \quad (2.15)$$

并且功的表达式

$$u^T P = \bar{u}^T \bar{P} \quad (2.16)$$

对于任意的 u 成立, 则下列变换关系成立

$$P = A^T \bar{P} \quad (2.17)$$

从另一个角度看如果存在一个线性变换

$$\bar{P}_{m \times 1} = H_{m \times n} P_{n \times 1} \quad (2.18)$$

并且功的表达式

$$P^T u = \bar{P}^T \bar{u} \quad (2.19)$$

对于任意的 P 成立, 则下列的变换关系成立

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

广义力向量和广义位移向量的这种变换关系称为逆步变换。当 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{H}$ 为非奇异的方阵时，稍加推导就可以得出下列关系：

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{H}^{-1} \quad (2.21)$$

或
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{H}^T \quad (2.21)'$$

在结构矩阵分析中涉及到力之间以及位移之间的各种线性变换，在一定条件下都遵循逆步变换的规律。

本章下面要讲到的在单元坐标系和整体坐标系之中单元刚度矩阵之间的关系就用到逆步变换的规律。

§ 2-3 单元坐标系中的单元刚度矩阵

单元杆端力和杆端位移之间的转换关系式称为单元刚度方程，它表示单元在杆端有任意给定位移时所产生的杆端力。单元刚度矩阵是杆端力与杆端位移之间的转换矩阵。

单元坐标系中的单元刚度方程可用下式表示：

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e \quad (2.22)$$

式中 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 就是单元坐标系中的单元刚度矩阵

一、平面桁架单元

在单元坐标系中，与单元杆端位移 $\bar{u}_i^e = 1$ 和 $\bar{u}_j^e = 1$ 相应的杆端力分别示于图 2-7 a、b 中。单元长度为 l ，截面面积为 A ，材料的弹性模量为 E 。

由图 2-7 可知，当单元两端同时产生任意的杆端位移 $\bar{u}_i^e$ 和 $\bar{u}_j^e$ 时，根据叠加原理，单元杆端力的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_i^e &= \frac{EA}{l} \bar{u}_i^e - \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \\ \bar{X}_j^e &= -\frac{EA}{l} \bar{u}_i^e + \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

式(2.23)就是平面桁架单元在单元坐标系中的单元刚度方程。

将式(2.23)写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_i^e \\ \bar{X}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{u}_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.23)'$$

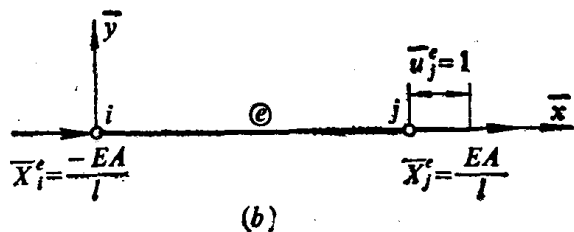
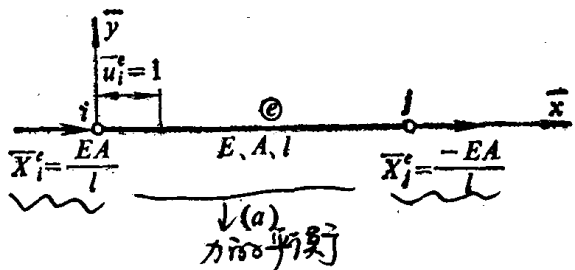


图 2-7

式中的 2×2 阶矩阵就是单元坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ ，即

$$\bar{k}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

二、平面刚架单元

在单元坐标系中,与单位杆端位移 $\bar{v}_i^e=1, \bar{\theta}_i^e=1$ 和 $\bar{v}_j^e=1, \bar{\theta}_j^e=1$ 相应的四组杆端力示于图 2-8 中,与单元杆端位移 $\bar{u}_i^e=1, \bar{u}_j^e=1$ 相应的杆端力可参见图 2-7,单元长度为 l ,轴向抗拉刚度为 EA ,抗弯刚度为 EI 。

由图 2-7、图 2-8 可知,在单元两端同时产生任意杆端位移时,根据叠加原理,可得单元杆端力为

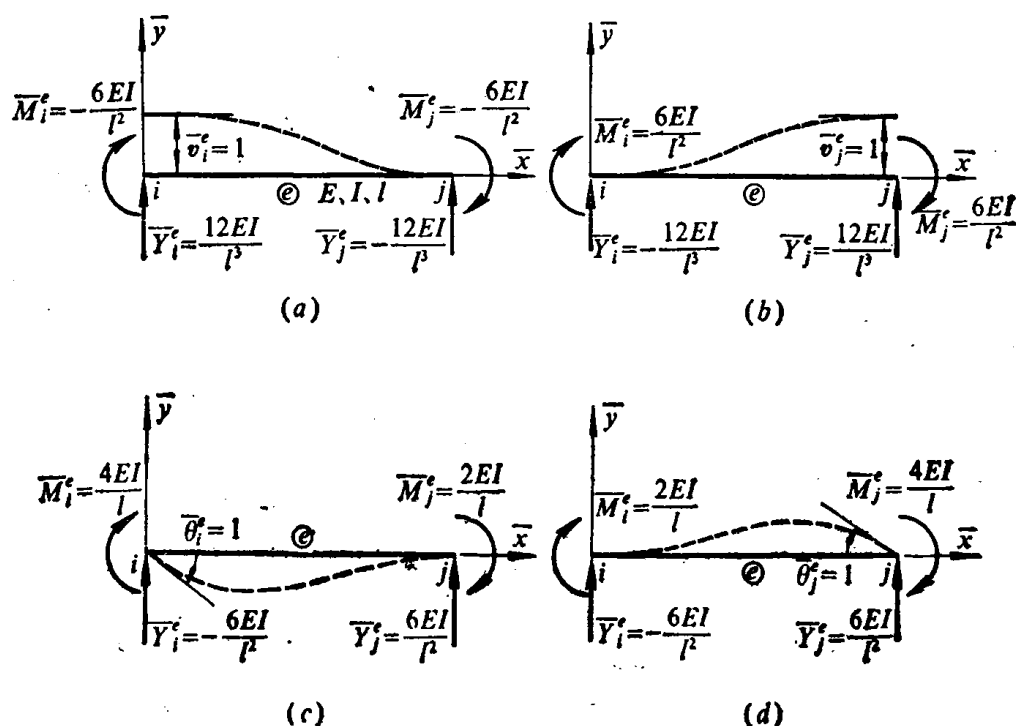


图 2-8

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_i^e &= \frac{EA}{l} \bar{u}_i^e - \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \\ \bar{Y}_i^e &= \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_i^e - \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_j^e \\ \bar{M}_i^e &= -\frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^e + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_i^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^e - \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_j^e \\ \bar{X}_j^e &= -\frac{EA}{l} \bar{u}_i^e + \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \\ \bar{Y}_j^e &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_i^e + \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_j^e \\ \bar{M}_j^e &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^e - \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_i^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^e + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_j^e \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

上式就是平面刚架单元在单元坐标系中的单元刚度方程。

将式(2.25)写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ M_i^e \\ X_j^e \\ Y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix} \quad (2.25)'$$

其中, 矩阵

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

称为单元坐标系中的单元刚度矩阵。

连续梁由于只有各跨端部的转角是未知量, 故由式(2.26)中删去无关的未知量所对应的行和列, 即可得出连续梁在单元坐标系中的单元刚度矩阵。

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

§ 2-4 整体坐标系中的单元刚度矩阵

整体坐标系中的单元刚度方程为

$$F^e = k^e \Delta^e \quad (2.28)$$