经济数学基础
学习指导书

冯桑 余梦涛
赵坚 张旭辉 顾馨相 编

经济管理出版社

经济数学基础学习指导书

冯 泰 余梦涛 赵 坚 张旭辉 顾静相 编

经济管理出版社

责任编辑：王　炜

经济数学基础学习指导书

冯　泰　余梦涛　赵　坚　张旭辉　顾静相　编

出版：经济管理出版社

（北京市新街口六条红园胡同 8 号　邮编：100035）

发行：经济管理出版社总发行　全国各地新华书店经销

印刷：地质印刷厂

787×1092 毫米　1/32　14 印张　312 千字

1995 年 8 月第 1 版　1996 年 9 月北京第 3 次印刷

印数：31001—42000 册

ISBN 7-80118-254-5/F·247

定价：18.00 元

修订说明

《经济数学基础学习指导书》是与《经济数学基础》(上、下册)配套的辅助性教学用书。依据1993年底调整后的教学内容和教学大纲,对《经济数学基础》进行了压缩,因此,本书也相应地作了修订:

1. 删去了原书中关于多元函数微分学和线性规划的内容;

2. 微积分和线性代数复习,按调整后的教学大纲重新编写;

3. 本书体系作了较大调整,与主教材相配合,修订后按章、单元组织;

4. 根据一年来使用的反馈情况,对原书中某些不足之处,特别是较难例题、练习等作了较多修订或更换;

5. 参加编写的有冯泰(第一章和第二章)、余梦涛(第三章和第四章)、赵坚(第五章和第六章)、张旭辉(第七章和第八章)、顾静相(第九章和微积分复习与线性代数复习),梁映森、李林曙、陈卫宏、张旭红参加了第三、四、七、八等章的修订工作。由冯泰、顾静相统稿。

最后,对电大系统的师生对本书提出的意见、建议以及对本书修订的支持,表示忠心感谢。

编者

1995年4月于北京

目　　录

第一章　函　　数

第一单元　函数概念及性质

§1　教学要求及基本内容

一、教学要求

1. 理解函数概念，了解函数的主要性质，尤其是函数的奇偶性.

2. 掌握求函数定义域的方法.

3. 掌握函数的几种表示方法，主要是解析表示法.

二、基本内容与说明

（一）基本概念

本章的基本概念就是函数概念. 围绕这个基本概念展开以下内容：函数要素、函数符号、函数主要性质.

1. 函数. 函数是两个变量之间的一种对应关系. 两个相关的变量 x、y，x 在区域 D 内变化，每一个 D 内的 x，都可以确定一个 y，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

那么，D 就是函数 $f(x)$ 的定义域，f 表示两个变量 x、y 之间的对应规则.

2. 奇偶函数. 设函数 $y = f(x)$，如果满足

$$f(-x) = -f(x)$$

称 $y=f(x)$ 是奇函数.

如果满足

$$f(-x)=f(x)$$

称 $y=f(x)$ 是偶函数.

3. 单调函数. 设 $y=f(x)$ 是区间 D 上的函数，x_1、x_2 是 D 内任意两点，且 $x_1<x_2$. 如果有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

称 $y=f(x)$ 是单调增加函数；如果有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

称 $y=f(x)$ 是单调减少函数.

4. 有界函数. 设 $y=f(x)$ 是区间 D 上的函数，如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

称 $y=f(x)$ 是 D 上的有界函数.

5. 周期函数. 对于函数 $y=f(x)$，若存在正数 T，使得

$$f(x+T)=f(x)$$

称 $y=f(x)$ 是周期函数，T 是它的一个周期.

6. 反函数. 设函数 $y=f(x)$，如果对于其值域内的每一个 y，都可以确定一个 x，则 x 是 y 的函数，记作

$$x=\varphi(y)$$

它就是原来函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上记作

$$y=\varphi(x) \text{ 或 } y=f^{-1}(x)$$

（二）基本方法

1. 函数的表示方法.

（1）解析法：显函数（含分段函数）、隐函数；

（2）图示法；

（3）表格法.

2. 确定函数定义域的方法. 有以下常用原则:

(1)分母不能为零;

(2)偶次根式内必须非负;

(3)对数的真数必须是正数;

(4)反正弦、反余弦函数的自变量绝对值不超过 1. 即 $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$ 要求 $|\varphi(x)| \leqslant 1$;

(5)表达实际应用问题的函数关系,自变量的取值,由实际问题给定,当然也要满足以上条件.

3. 判别函数性质(特殊函数)的方法. 用定义或某些运算性质.

4. 反函数的求法(步骤).

(1)从 $y = f(x)$ 中解出 x(用 y 表示 x),记为 $x = \varphi(y)$;

(2) 调换变量记号,改记为 $y = \varphi(x)$,为所求反函数.

(三) 说明

1. 从函数的定义可知,(1) 定义域确定函数存在的范围;(2) 对应规则 f 确定因变量 y. 因此,定义域和对应规则就完全确定了一个函数 $y = f(x)$,称它们为函数的两要素.

2. 教材中定义的函数是单值函数,即给定一个 x,只有一个 y,使得 $y = f(x)$. 如果一个 x,有两个以上的 y,使得 $y = f(x)$ 成立,叫多值函数. 如 $y^2 = x$,对于 $x = 4$,找到 $y = 2$ 或 $y = -2$ 都能满足 $y^2 = x$,就是多值函数一例. 若只讨论 $y = \sqrt{x}$,当 $x = 4$ 时,只有 $y = 2$ 使得 $y = \sqrt{x}$ 成立,是单值函数;或 $y = -\sqrt{x}$ 也是单值函数. 本书不讨论多值函数.

3. 在函数的表示方法中,解析法是表示函数的主要方法. 在解析法中有显式形式 $y = f(x)$、隐式形式 $F(x,y) = 0$ 和分段形式,以显式形式为主.

函数的图示法就是函数的图形表示. 它是一条曲线(也可以分成几段表示). 不少函数可以由表示式作出其曲线图形. 有些函数可根据图形写出其表示式. 也存在只有图形(曲线)而写不出其表示式的函数,它仍然是函数.

4. 反函数说明了自变量与因变量的相对性. 原来函数 $y = f(x)$:对给定 x,可以唯一确定 $y(= f(x))$;反函数 $x = f^{-1}(y)$:对给定 y,可以唯一确定 $x(= f^{-1}(y))$.

由此可见,只有 x 与 y 是唯一相互确定时,才可以有反函数. 具有这种性质的函数,只能是单调函数.

只有单调函数才有反函数.

原来函数与其反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.

§2 解题示范

例1 求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \sqrt{x+5} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x - 1994)}$

(3) $h(x) = \arcsin \dfrac{x}{5}$

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1} & x < 0 \end{cases}$

〈**解题分析**〉本例是解析表达式表示的函数求定义域问题. 用求定义域的几个常用原则要注意:在第(1)小题中函数表达式是两个式子的代数和,两个式子中的 x 表示相同的数,而第(4)小题中,是分段函数,也有两个式子,它们中的 x 在不同区间上取不同的值.

解：(1) 根式$\sqrt{x+5}$要求：

$$x+5\geqslant 0$$

而分式要求：

$$x^2-1\neq 0,即\ x^2\neq 1$$

它们必须同时成立，即

$$\begin{cases}x+5\geqslant 0\\x^2\neq 1\end{cases}$$

解得 $x+5\geqslant 0$ 且 $x^2\neq 1$，取公共部分：

$$x\geqslant -5\ 但\ x\neq 1\ 和\ x\neq -1$$

即 $D=\{x\mid -5\leqslant x<-1$

或 $-1<x<1$ 或 $x>1\}$

$=[-5,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 分母不能为0，则 $\ln(x-1994)\neq 0$

即 $x-1994\neq 1$

对数真数为正，必须满足 $x-1994>0$

即 $x-1994>0$ 且 $x-1994\neq 1$ 故得

$D=\{x\mid 1994<x<1995$ 或 $x>1995\}$

$=(1994,1995)\cup(1995,+\infty)$

(3) 反正弦函数要求.

$\left|\frac{x}{5}\right|\leqslant 1$ 即 $|x|\leqslant 5$

所以，$-5\leqslant x\leqslant 5$ 为所求函数的定义域.

(4) 这是分段函数.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$，必须满足 $x\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$，$f(x)$ 才有意义. 得

$x\geqslant 0$ 且 $x\neq 3$

所求当 $x \geqslant 0$ 时的定义域为 $[0,3) \cup (3, +\infty)$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=\sqrt{x+1}$，必须满足 $x+1\geqslant 0$，$f(x)$ 才有意义，于是有 $-1\leqslant x<0$. 所以，$f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x \mid -1\leqslant x<3 \text{ 或 } x>3\}$$
$$=[-1,3)\cup(3,+\infty)$$

说明：(1) 求函数的定义域，基本就是解不等式或不等式组. 要弄清何时用“与”，何时用“或”. (2) 关于实际问题中的函数求定义域问题见第二单元的例 4 和例 5.

例 2　求下列函数的值：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

求 $f(1)$，$f(a)$，$f(x+5)$，$f[f(x)]$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x>0 \\ x+1 & -4\leqslant x<0 \end{cases}$

求 $f(100)$，$f(0)$，$f(b)$，$f(-10)$.

〈**解题分析**〉求函数值就是给定 x 的值，按对应规则找 y 的值，如

$$y=f(x)=2x^2+1$$

那么，对应规则就是

$$f(\quad)=2(\quad)^2+1$$

只要把 x 所代表的数，或者文字，或者式子代入到(　)中运算即可. 要注意，x 所代表的数必须在定义域之内. 特别是求自变量为文字时的函数值或分段函数的函数值时，应注意定义域的范围.

举本例的目的有两个：其一是弄清函数符号 $f(\quad)$ 的意义；其二是会求函数的值，必要时进行讨论.

解：(1) $\because f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\therefore$ 定义域:$D = \{x \mid x \neq -1\}$

当 $x = 1$ 时,$f(1) = \dfrac{x}{x+1}\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$f(a)$ 表示当 $x = a$ 时,$f(x)$ 的值.

显然,a 不能为 -1.

当 $a \neq -1$ 时,$f(a) = \dfrac{x}{x+1}\Big|_{x=a} = \dfrac{a}{a+1}$

那么 $$f(x+5) = \frac{x+5}{(x+5)+1} = \frac{x+5}{x+6}$$

$$(x \neq -6 \text{ 即 } x+5 \neq -1)$$

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$(2x \neq -1, x \neq -\dfrac{1}{2})$

(2) 这是分段函数.

当 $x = 100$ 时,$x > 0$,且 $f(x) = e^x$,故有

$$f(100) = e^x\big|_{x=100} = e^{100}$$

当 $-4 < x \leqslant 0$ 时,$f(x) = x + 1$,故 $x = 0$ 时,有

$$f(0) = (x+1)\big|_{x=0} = 1$$

当 $x = b$ 时,b 为文字,可取任何实数. 故有 $b > 0$ 时,

$$f(b) = (e^x)\big|_{x=b} = e^b$$

当 $-4 \leqslant b < 0$ 时,$f(b) = (x+1)\big|_{x=b} = b + 1$

当 $x = -10$ 时,$f(x)$ 没有定义,故 $f(-10)$ 没有意义.

例 3 判别下列函数对是否为相同的函数:

(1)$f(x) = x + 1$ 与 $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(2)$f(x) = x\arcsin x$ 与 $g(x) = x(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x)$

(3)$\psi(x) = x$ 与 $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$

(4)$f(x) = 3\ln x$ 与 $g(t) = \ln t^3$

〈**解题分析**〉函数的决定因素是函数的定义域和对应规则，只要这两点相同，就是相同的函数，而与用什么符号表示自变量与因变量没有关系. 一般先看定义域，再看对应规则.

解：(1)$f(x) = x + 1$，其定义域是$(-\infty, +\infty)$；$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域是 $x \neq 1$ 即$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

因为它们的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

(2)$f(x) = x\arcsin x$ 的定义域是$[-1, 1]$；$g(x) = x(\frac{\pi}{2} - \arccos x)$ 的定义域是$[-1, 1]$，它们的定义域相同；又因 $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$，它的反函数是 $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. 所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同的对应规则. 故 $f(x) = x\arcsin x$ 与 $g(x) = x(\frac{\pi}{2} - \arccos x)$ 是相同的函数.

(3)$\psi(x) = x$ 与 $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域均为$(-\infty, +\infty)$. 但是，其对应规则为：

函数 $\psi(x)$ 是当 $x > 0$ 时，$\psi(x) = x > 0$，当 $x < 0$ 时，$\psi(x) = x < 0$；

函数 $\varphi(x)$ 是当 $x > 0$ 时，$\psi(x) = \sqrt{x^2} > 0$，当 $x < 0$ 时，$\varphi(x) = \sqrt{x^2} = -x > 0$.

可见，它们的对应规则不同.

所以 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不是相同的函数.

(4) 因为 x 与 x^3(或 t 与 t^3) 的符号是相一致的. 因此，$f(x) = 3\ln x$ 的定义域为$(0, +\infty)$. 那么，$g(t) = \ln t^3$ 的定义

域也是$(0, +\infty)$.

又在区间$(0, +\infty)$内,有

$f(x) = 3\ln x = \ln x^3$ 或 $g(t) = \ln t^3 = 3\ln t$

因而,$f(x)$ 与 $g(t)$ 表示相同的函数.

说明:由这几个函数对看到,定义域与对应规则相同的函数,其值域必相同.不同的函数,或者定义域不同,或者对应规则不同,但是它们的函数值域也有可能相同.

例 4 判别下列函数的奇偶性:

(1)$f(x) = x\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ $(a > 0, a \neq 1)$

(2)$g(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x)$

(3)$\varphi(x) = x\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$

〈解题分析〉 判别函数的奇偶性,主要是用定义,即验证$f(-x) = -f(x)$(奇函数)或$f(-x) = f(x)$(偶函数)哪个成立.若两者都不满足时,则$f(x)$既非奇函数又非偶函数.用函数的奇偶性定义又可推出几个常用结论供选用,见本例(3)解后的说明.

解:(1) 用定义

$\because f(x) = x\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore f(-x) &= (-x)\frac{a^{-x} - a^{-(-x)}}{2} \\ &= -x\frac{a^{-x} - a^x}{2} \\ &= x\frac{a^x - a^{-x}}{2} = f(x)\end{aligned}$$

可见,$f(x) = x\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ 是偶函数.

(2) 用定义，$g(x) = \lg[\sqrt{x^2+1} - x]$

$$\because g(-x) = \lg[\sqrt{(1-x)^2+1} - (-x)]$$
$$= \lg(\sqrt{x^2+1} + x)$$
$$= \lg \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \lg \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \lg \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= -\lg(\sqrt{x^2+1}-x) = -g(x)$$

$\therefore g(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x)$ 是奇函数.

(3) 用定义，$\varphi(x) = x\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\because \varphi(-x) = -x\sin(-x + \frac{\pi}{4})$$
$$= -x\sin(\frac{\pi}{4} - x) \neq -\varphi(x)$$

同理可验证

$$\varphi(-x) \neq \varphi(x)$$

$\therefore \varphi(x) = x\sin(x + \frac{\pi}{4})$ 不是奇函数，也不是偶函数.

说明：由奇、偶函数的定义，不难验证以下结论：

(1)两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；

(2)两个奇(偶)函数之积是偶函数；

(3)奇函数与偶函数之积是奇函数.

如本例第(1)小题中，不难验证

$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$$

是奇函数，又 $\varphi(x)=x$ 也是奇函数. 故 $f(x)$ 是两个奇函数 $g(x)$ 与 $\varphi(x)$ 之积，由上面结论(2)，知 $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)=x\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 是偶函数.

例 5　证明函数

$$y=\frac{2x+5}{x-2}$$

的反函数是它自己.

证：按求反函数之步骤：

(1)从 $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$ 中解出 x，即

$$xy-2y=2x+5$$

$$xy-2x=2y+5$$

$$\therefore \quad x=\frac{2y+5}{y-2}$$

(2) 调换 x 与 y 的位置，得

$$y=\frac{2x+5}{x-2}$$

于是，$y=\dfrac{2x+5}{x-2}$ 的反函数为

$$y=\frac{2x+5}{x-2}$$

它们是相同的一个函数，故反函数为其自身.

§3　思考与练习

一、思考题

1. 函数是怎么定义的？下列关系是否为函数？为什么？

(1)设三角形的一边长为 a，其上的高为 h(常数)时，问其