中学数学例题习题选

《中学数学例题习题选》编写组

北京师范学院数学系
《数学参考资料》增刊

中学数学例题习题选

《中学数学例题习题选》编写组

北京师范学院数学系
《数学参考资料》增刊

编 选 说 明

中共中央关于召开全国科学大会的通知，向全国人民发出了攀登世界科学技术高峰，向四个现代化进军的动员令。《通知》的精神激励着全国中学生和广大知识青年发奋努力学政治学文化，树立爱科学、讲科学、用科学的风尚。他们积极响应以华主席为首的党中央的号召，认真复习，刻苦钻研，决心把“四人帮”破坏教育事业所造成的损失尽快夺回来。在这种形势下，作为数学教育工作者，深感为大家提供必要的复习参考资料是我们义不容辞的责任。我们用了较短时间赶编了这本《中学数学例题习题选》，献给青少年们使用，以表示我们对广大青年同志们热情支持的心情。

本书供中学生、知识青年复习中学数学基础知识的需要和中学数学教师组织学生复习参考之用，全书分代数、几何、三角，解析几何四部分内容，并配备了例题和适量的习题，书后附有习题解答或提示。本书应在系统复习中学数学教材的基础上做为综合练习与提高选用，凡现行中学课本中未涉及而又应当了解的知识，都打有※号，请使用时注意。

本书编印过程中得到了北京市西城区教育局五七大学数学组、北京市崇文区教育局中教科、北京师院附中数学组的有关同志和我系广大同志的支援，其中不少同志提供了多年积累的资料并认真帮助审阅，提出了宝贵的修改意见，北京3209厂的同志们极为热情地承担了本书的排印工作，在此我们表示衷心感谢。

因编选时间仓促，在选材和解答中，难免有疏漏和错误，望读者批评指正。

北京师范学院数学系
《中学数学例题习题选》编写小组
1977年10月

目　　录

代 数 部 分

几 何 部 分

三 角 部 分

解析几何部分

附录：习题解答或提示

代 数 部 分

一、代　数　式

例1．分解因式：

（1）　　$x^2-21x+98$

（2）　　$x^2-x+\frac{2}{9}$

注：关于整式的因式分解，如果没有特别声明，都要求把一个整式分解成为有理系数的既约因式的积。

解：（1）利用关系式$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$
此处适合条件$a+b=21$，$ab=98$的a，b有 14，7.

$\therefore\quad x^2-21x+98=(x-14)(x-7)$

也可以设$x^2-21x+98=0$，解出$x=14$，7.

（2）
$$x^2-x+\frac{2}{9}=x^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)x+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$=\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

当系数是分数，用观察的方法比较困难时，可以用下面的方法：

$$x^2-x+\frac{2}{9}=\frac{1}{9}\ (9x^2-9x+2)=\frac{1}{9}\ (3x-1)(3x-2)$$
$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

例2. 分解因式：$a^2+ab-6b^2+a+13b-6$

解：把原式按a（或b）的降幂整理，

$$a^2+ab-6b^2+a+13b-6$$
$$=a^2+(b+1)a-(6b^2-13b+6)$$
$$=a^2+(b+1)a-(3b-2)(2b-3)$$
$$=[a+(3b-2)][a-(2b-3)]$$
$$=(a+3b-2)(a-2b+3)$$

别解：先把二次项进行分解：

$$a^2+ab-6b^2=(a-2b)(a+3b)$$

再令原式$=(a-2b+x)(a+3b+y)$

把右边展开，

$$(a-2b+x)(a+3b+y)=a^2+ab-6b^2+(x+y)a+(3x-2y)b+xy$$

比较原式与展开式的系数，得

$$x+y=1,\ 3x-2y=13,\ xy=-6$$

解出 x，y，得$x=3$，$y=-2$

$\therefore$ 原式$=(a-2b+3)(a+3b-2)$

例3. 分解因式：x^4-14x^2+25

解：
$$x^4-14x^2+25=x^4-10x^2+25-4x^2$$
$$=(x^2-5)^2-4x^2$$
$$=(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)$$

注：这是一个关于x^2的二次式，称为双二次式，在双二次式中，令$x^2=X$，就可以按照X的二次三项式进行因式分解。

把X的二次式$X^2+2aX+b^2$的一部分配成完全平方，一般可以用下面的三种方法：

(i) $X^2+2aX+b^2=X^2+2aX+a^2+b^2-a^2$

$$= (X+a)^2 + b^2 - a^2$$

(ii) $X^2 + 2aX + b^2 = X^2 \pm 2bX + b^2 + 2aX \mp 2bX$

$$= (X \pm b)^2 + 2(a \mp b)X$$

(iii) 应用解二次方程的方法进行分解：

令$x^4 - 14x^2 + 25 = 0$，解出x^2，得

$$x^2 = 7 \pm \sqrt{24} = 7 \pm 2\sqrt{6}$$

求x，　　$x = \pm\sqrt{7 \pm 2\sqrt{6}} = \pm(\sqrt{6} \pm 1)$

∴　原式$= (x - \sqrt{6} - 1)(x - \sqrt{6} + 1)(x + \sqrt{6} - 1)(x + \sqrt{6} + 1)$

为了求出有理系数因式，第1，3因式相乘，第2，4因式相乘，就得出分解式

原式$= [(x - \sqrt{6} - 1)(x + \sqrt{6} - 1)][(x - \sqrt{6} + 1)(x + \sqrt{6} + 1)]$

$$= (x^2 - 2x - 5)(x^2 + 2x - 5)$$

例4.　　$x + \dfrac{1}{x} = 3$时，求$x^4 + \dfrac{1}{x^4}$的值.

解：令$\dfrac{1}{x} = y$，则有$x + y = 3$　　①

$$x \cdot y = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \qquad ②$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2(xy)^2$$

把①②代入，得　　$x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 47$

别解：把 $x+\frac{1}{x}=3$ 两边平方得

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9 \qquad \therefore \quad x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

两边再各自平方，$x^4+2+\frac{1}{x^4}=49$

$$\therefore \qquad x^4+\frac{1}{x^4}=47$$

例5. 证明恒等式：

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$$

注：要证明恒等式$A=B$，通常用以下几种方法：

(i) 计算 A，B，如能得到同一结果 C，则恒等式成立；

(ii) 变换A（或B），如能得出B（或A），则恒等式成立；

(iii) 计算$A-B$，若结果得0，则恒等式成立；

(iv) 设A，B都是关于x的n次多项式，用$n+1$个数分别代入A及B，如果每次计算结果，A、B的值相等，则恒等式必成立。

解：从等式两边分别考察，

当$x=0,1,2,3$时，左边都得1，右边也都得1.

当$x=-1$时，左边与右边都得25，

左、右边都是关于x的四次整式，有五个数都使它们有相等的值，因而它们是恒等的。

$\therefore$ 原恒等式成立。

例6. 化简：$\sqrt{73-12\sqrt{35}}$

解：设 $\sqrt{73-12\sqrt{35}}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$

$(x>y>0)$

两边平方　$73-12\sqrt{35}=x+y-2\sqrt{xy}$

$$\therefore\quad x+y=73 \qquad ①$$

$$\sqrt{xy}=6\sqrt{35}\quad xy=36\times35 \qquad ②$$

由①②，x、y是下面的二次方程的两个根

$$t^2-73t+36\times35=0$$

解得$t=45$，28　　即$x=45$，$y=28$

$$\therefore\quad \sqrt{73-12\sqrt{35}}=\sqrt{45}-\sqrt{28}$$

$$=3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$$

注：仿照上面的解法，有时可以由观察而得出，例如：

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}=\sqrt{3}+2$$

$$\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{7-\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{14-2\sqrt{45}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{10})$$

化简含二次根式的式子，有下面的公式：

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$(a>o，b>o，a^2>b)$

例如，在本题中，$a=73$，$b=12^2\times35=5040$

a，b都大于0，$a^2=5329>b$，符合公式的条件，应用公

式：

$$\sqrt{73-12\sqrt{35}}=\sqrt{73-\sqrt{5040}}$$

$$=\sqrt{\frac{73+\sqrt{73^2-5040}}{2}}-\sqrt{\frac{73-\sqrt{73^2-5040}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{73+17}{2}}-\sqrt{\frac{73-17}{2}}=\sqrt{45}-\sqrt{28}$$

$$=3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$$

练　习　题

1. 分解因式：

（1）$x^2-25x+156$

（2）$x^2-\frac{1}{15}x-\frac{2}{15}$

2. 分解因式：

（1）$12x^2+113x-209$

（2）$315x^2-162xy-72y^2$

3. 分解因式：

（1）$4ab+1-4a^2-b^2$

（2）$2(a-b)^2-(a-b)-3$

4. 分解因式：$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$

5. 确定m的值，使下列各式能分解成关于x，y的两个一次式的积

（1）$x^2-y^2+3x-7y+m$

（2）$a^2+7ab+mb^2-5a+43b-24$

6. 分解因式：

（1）$2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$

（2）$3a^2+4b^2+8ab+9ac+6bc+a+2b+3c$

7. 分别在有理数集、实数集与复数集内分解下列各式的因式，

（1）x^4+x^2-6

（2）$6x^4-7x^2-3$

8. 分解因式：

（1）x^4-18x^2+1

（2）x^4-23x^2+1

9. 分解因式：

（1）$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$

（2）$(x^2+5x+6)(x^2+7x+6)-3x^2$

10. 分解因式：

（1）$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$

（2）$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

11. 证明恒等式：

（1）$x^3+1=(x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-7$

（2）$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

（3）$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

（4）$(2x-7)(x-3)(2x+5)(x+3)-91$

$=(2x^2-x-8)(x-4)(2x-7)$

12. 化简下列各式：

（1）
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}$$

（2）
$$\frac{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}{c+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{a}}}-\frac{a}{c+\dfrac{1}{b}}$$

13．证明：$a^2+a+1=0$，$a\neq 0$时，$a^{14}+\dfrac{1}{a^{14}}=-1$

14．求$\dfrac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$的值，其中$x$，$y$，$z$之间有下列关系：

$$4x-3y-6z=0 \qquad 2x+4y-14z=0$$

15．把分式$\dfrac{A}{x-1}$，$\dfrac{B}{x+1}$，$\dfrac{C}{x-2}$相加化简后得$\dfrac{3x-9}{(x^2-1)(x-2)}$，求$A$、$B$、$C$的值。

16．化简：（1）$\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

（2）$\sqrt{29-12\sqrt{5}}$

17．化简：（1）$\dfrac{1}{\sqrt{11+\sqrt{72}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-\sqrt{72}}}$

（2）$\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

18．设$x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$，

求$(x^4+y^4)(x+y)$的值。

19. 设 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，证明$a^2+b^2=1$.

*20. 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$.

（1）求$f(1)$，$f(2)$

（2）证明：$f(n)+f(n+1)=f(n+2)$（n是正整数）

二、方程与方程组

例7. 解方程：$m^2x+1=m(x+1)$

解：原方程经整理后得$m(m-1)x=m-1$

当$m(m-1)\neq 0$时，$x=\frac{1}{m}$

当$m=0$时，得$0\cdot x=-1$无解

当$m=1$时，得$0\cdot x=0$不定（x为任意数都是解）

例8. 求作一个有理系数一元二次方程，以$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$为一根。

解：要求作一个有理系数的一元二次方程，已知一个根是 $\alpha=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 那么另一个根是 $\beta=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

由根与系数的关系，$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=5$

所求的有理系数二次方程就是

$$x^2-5x+5=0$$

别解：$x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$，则有 $2x-5=\sqrt{5}$

两边平方，$4x^2-20x+25=5$

即 $$4x^2-20x+20=0$$

两边除以4，得到所求的方程为

$$x^2-5x+5=0$$

注：适合题意的二次方程，不仅上述的一个，例如，还有$2x^2-10x+10=0$，上面求得的是其中比较简单的一个。

有理系数一元二次方程有一个根是$p+\sqrt{q}$（p是有理数，$\sqrt{q}$是无理数），另一个根必为$p-\sqrt{q}$，~~这一结论对于任意一元n次方程也成立，~~应当注意“有理系数”这个条件，否则不能成立，例如方程$x^2-(5+\sqrt{2})x+6+\sqrt{2}=0$有根2与$3+\sqrt{2}$，但$3-\sqrt{2}$不是它的根，因为它不是有理系数方程。

类似地，实系数一元二次方程有一个根$a+bi$（a，b是实数，且$b\neq0$），另一个根必为$a-bi$，但如方程$x^2-(6+i)x+8+2i=0$有实根2与虚根$4+i$，而没有根$4-i$，因原方程不是实系数方程。

例9. 如果a，b，k是有理数，且$b=ak+\frac{c}{k}$，证明二次方程$ax^2+bx+c=0$的二根也是有理数。

证：二次方程的判别式$D=b^2-4ac$

题设 $$b=ak+\frac{c}{k}$$

$$\therefore\quad D=\left(ak+\frac{c}{k}\right)^2-4ac=\left(ak-\frac{c}{k}\right)^2$$

$$\sqrt{D}=ak-\frac{c}{k}\quad 及\ -\left(ak-\frac{c}{k}\right)$$

$$ak-\frac{c}{k}=ak-(b-ak)=2ak-b$$

∵ a,b,k是有理数，∴ $ak-\frac{c}{k}$从而$\sqrt{D}$也是有理数。

方程的二根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ 都是有理数的四则运算的结果，所以也是有理数。

例10．解方程：$\frac{2x-5}{x^2+3x+2}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$

解：把分母分解因式以求公分母

$x^2+3x+2=(x-1)(x+2)$，$x^2-4=(x-2)(x+2)$

以公分母$M(x)=(x+1)(x+2)(x-2)$乘方程的两边得

$$(2x-5)(x-2)+4(x+1)=(x+1)(x+2)$$

展开整理，$x^2-8x+12=0$

解这个二次方程，$x=2,6$

检验：$M(2)=0$，不适合原方程，$M(6)\neq0$适合原方程

∴ 原方程的根是$x=6$

分式方程也可以如下来解

移项并通分，

$$\frac{(2x-5)(x-2)+4(x+1)-(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=0$$

化简并约分，$\frac{x-6}{(x+1)(x+2)}=0$

令分子$x-6=0$，解得$x=6$

6不使原方程中任一分母为0．所以$x=6$是原方程的解。

例11．解方程：$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$，如果方程有增根，这个增根是哪个方程的根？

解：$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$ ①

把①的两边各自平方，并整理，得