基础知识丛书

市教育局教研室 编

数学

高中基础知识丛书

数学

（上）

太原市教育局教研室 编

山西人民出版社

高中基础知识丛书
数 学（上）
太原市教育局教研室编

山西人民出版社出版（太原并州路七号）
山西省新华书店发行 太原印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：14 字数：298千字
1981年2月第1版 1981年2月太原第1次印刷
印数：1—69,500册

书号：7088·913 定价：1.15元

目　录

代数部分

第一章　数……………………………………………（1）
一　数系表……………………………………………（1）
二　实数……………………………………………（1）
三　复数……………………………………………（4）
范例……………………………………………（8）
习题一……………………………………………（14）
第二章　式……………………………………………（19）
一　解析式的有关概念和分类……………………（19）
二　整式……………………………………………（20）
三　分式……………………………………………（28）
四　根式……………………………………………（29）
五　指数式与对数式……………………………（32）
范例……………………………………………（34）
习题二……………………………………………（43）
第三章　方程与不等式……………………………（50）
一　方程……………………………………………（50）
二　行列式……………………………………………（57）
三　二元二次方程组……………………………（61）
四　不等式……………………………………………（65）
范例……………………………………………（77）

习题三……………………………………(97)
第四章　函　数……………………………………(104)
一　集合与对应……………………………………(104)
二　函数……………………………………(106)
三　几种常见的函数……………………………………(110)
范例……………………………………(116)
习题四……………………………………(140)
第五章　数列与极限……………………………………(146)
一　数列的概念……………………………………(146)
二　等差数列……………………………………(147)
三　等比数列……………………………………(147)
四　极限……………………………………(148)
范例……………………………………(153)
习题五……………………………………(163)
第六章　排列组合与二项式定理……………………………………(168)
一　排列与组合……………………………………(168)
二　数学归纳法……………………………………(171)
三　二项式定理……………………………………(172)
范例……………………………………(173)
习题六……………………………………(190)
复习题……………………………………(196)
习题答案或提示……………………………………(200)

平面三角部分

第一章　三角函数的概念、性质、图象……………………………………(214)
一　角的概念和度量……………………………………(214)
二　三角函数的概念……………………………………(215)

三　三角函数的基本性质和图象…………………(216)
范例…………………………………………(220)
习题一………………………………………(229)
第二章　三角函数公式及其应用……………………(233)
一　公式…………………………………………(233)
二　应用…………………………………………(237)
范例…………………………………………(273)
习题二………………………………………(286)
第三章　反三角函数、简单的三角方程……………(301)
一　反三角函数……………………………………(301)
范例…………………………………………(307)
二　简单的三角方程………………………………(319)
范例…………………………………………(320)
三　简单的三角函数不等式…………………………(327)
习题三………………………………………(330)
第四章　三角形元素间的关系及其应用……………(337)
一　三角形基本元素间的关系……………………(337)
二　应用举例……………………………………(340)
习题四………………………………………(373)
复习题………………………………………………(377)
习题答案或提示……………………………………(389)

综合题………………………………………………(415)

代 数 部 分

总则

总则

复旦大学
数学系
人尽其才

第一章　数

硕

一　数系表

- 复数 $a+bi$
  - 实数 a $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数——有限小数或无限循环小数
    - 无理数——无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$
    - 纯 虚 数 $a=0$
    - 混合虚数 $a\neq 0$

映片

二　实数

（一）概念

1．有关正整数的几个主要概念：

（1）正整数：表示物体个数或事物次序的数叫正整数，如 1、2、3、……等等。

（2）偶数：能被 2 整除的正整数叫偶数（通常用 $2k$ 表

示，k为正整数）．

（3）奇数：不能被2整除的正整数叫奇数（通常用$2k-1$表示，k为正整数）．

（4）质数：只有能被1和它本身整除的正整数叫质数（或素数）．

（5）合数：不仅能被1和它本身整除，而且还能被其它正整数整除的正整数叫做合数．

1既不是质数，也不是合数．

（6）公约数和最大公约数：一个数同时是几个数的约数时，这个数叫做这几个数的公约数．公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数．

（7）公倍数和最小公倍数：一个数同时是几个数的倍数时，这个数叫做这几个数的公倍数．公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数．

（8）互质数：如果两个正整数的最大公约数是1，这两个数就叫做互质数．

（9）能被2、3、5、7、9、11、13整除的数的特征：

能被2整除的数的特征是：这个数末位数是0、2、4、6、8．

能被5整除的数的特征是：这个数的末位数是0或5．

能被3或9整除的数的特征是：这个数各个数位上的数字之和能被3或9整除．

能被11整除的数的特征是：这个数奇位上的数字之和与偶位上的数字之和的差能被11整除．

能被7、11、13整除的数的特征是：这个数末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数相减所得到的差

能被 7、11、13 整除。

2.有理数：整数和分数统称有理数。任何一个有理数都可以写成$\frac{p}{q}$的形式（p、q 为整数，$q\neq 0$）。

3.数轴：规定了方向、原点和单位长度的直线叫数轴。数轴上的点和实数可以建立一一对应关系。

4.倒数：1 除以一个数的商叫做这个数的倒数（零没有倒数）。

5.相反数：只有符号不同的两个数叫做互为相反数。

6.绝对值：数轴上表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值。

非负数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数。即 $|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$。

7.算术根：正数的正的方根叫算术根（0 的算术根是 0），记为$\sqrt[n]{A}$，其中$A\geqslant 0$，n 为大于 1 的自然数。若 $n\geqslant 0$，$\sqrt[n]{A}$ 表示A 的算术平方根。

根据算术平方根的定义：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$。

（二）性质

1.有顺序性：任意两个实数可以比较其大小。

2.有稠密性：任意两个实数之间一定还有实数存在。

3.有连续性：实数集合和数轴上的点能建立一一对应关系。

4.在实数集合里，永远可施行加、减、乘（乘方）和除（除数不能为零）四种运算。

5.在实数集合里，没有最小数，也没有最大数。

（三）运算

1.运算法则：（略）

2.运算律：

加法交换律：$a+b=b+a$

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律：$ab=ba$

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$

乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$

3.运算顺序：

加法和减法为第一级运算，乘法和除法为第二级运算，乘方和开方为第三级运算。

在作混合运算时，（1）按第三级、第二级、第一级的顺序进行运算，即从高级到低级；（2）有括号时，先进行括号内运算，即从里到外；（3）若是同级运算，按从左到右的顺序进行。

三　复数

（一）概念

1.虚数单位：

（1）定义：$i^2=-1$，i 叫做虚数单位。

（2）-1 的两个平方根分别是 $\pm i$。

（3）i 的幂的性质：$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+2}=-i$（n 为整数）。

（4）i 可以和实数在一起按照同样的运算律进行四则运算。

2.复数：形如 $a+bi$ 的数叫做复数（其中 a，b 都是实

数）. a 叫做实部，bi 叫做虚部，b 叫虚部的系数. 两个复数实部相等，虚部的系数互为相反数，这两个复数叫做共轭复数（当虚部的系数等于零时也叫做共轭虚数）.

3.复数的向量表示：

表示复数的坐标平面叫做复数平面. 横坐标轴叫实轴，纵坐标轴叫虚轴（如图 1—1）. 复数 $a+bi$ 与复数平面上的点 $Z(a, b)$ 是一一对应的.

向量$\overrightarrow{OZ}$（方向是从O点指向Z点）是由点Z唯一确定的；反过来点Z也可以由向量$\overrightarrow{OZ}$唯一确定. 因此复数集C与复平面内所有从原点出发的向量所成集合之间也是一一对应的.

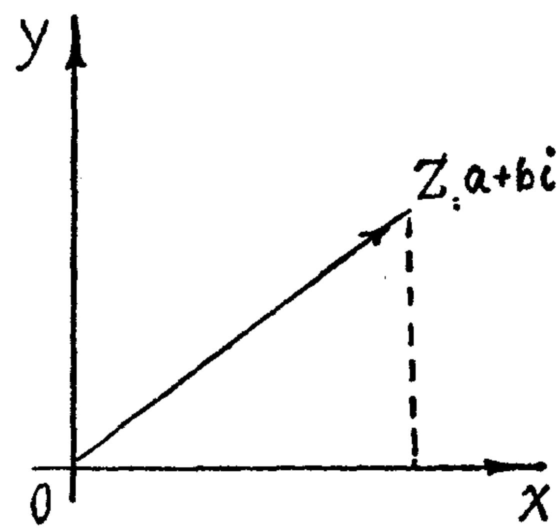

图 1—1

4.复数的模数（绝对值）：

图 1—1 的向量$\overrightarrow{OZ}$的长度 r 叫做复数 $a+bi$ 的模（或绝对值）. $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

5.复数的幅角：

图 1—1 中 X 轴的正方向到向量$\overrightarrow{OZ}$的角 θ，叫做复数 $a+bi$ 的幅角. 不等于零的复数有无数个幅角，即 $2k\pi+\theta$（k 为整数），其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角的值 θ，叫做幅角的主值.

6.复数的三种表示形式：

（1）复数的代数式：$Z=a+bi$（a，b为实数.）

（2）复数的三角函数式：$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r$为模数，$\theta$为幅角。）

（3）复数的指数式：$Z=re^{i\theta}$（r为模数，θ为幅角。）其中$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。

注意：1.要会鉴别一个式子是不是一个复数的三角函数式：复数的三角函数式必须满足：实部的三角函数是幅角θ的余弦，虚部的三角函数是同一幅角θ的正弦；不等于零的复数的模数是正数；实部与虚部之间用"+"号连结。

如（1）$5(\cos45^\circ-i\sin45^\circ)$（2）$5(\sin30^\circ+i\cos\theta)$

（3）$-5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

（4）$1+\cos\theta+i\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

以上各式都不是复数的三角函数式.

2.要会把复数的三种形式互化：

如：把$Z=-1+i$化为三角函数式和指数式.

解：$\because\quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\quad\theta=\frac{3}{4}\pi$.

$\therefore\quad Z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

（二）性质

1.无顺序性：复数之间没有大小的规定。

复数相等：$a+bi=c+di$，当且仅当 $a=c$，$b=d$.

复数等于零：$a+bi=0$，当且仅当 $a=0$，$b=0$。

2.在复数集里，可施行加、减、乘、除(除数不为零)、乘方和开方六种运算.

3.两个共轭复数的和、积都是实数.

$$(a+bi)+(a-bi)=2a,\quad (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

(三) 复数的运算

1.加、减法：$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

2.乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

3.除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$(c+di\neq0)$

乘除法亦可用三角函数式进行运算.

乘法：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

除法：$\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

4.乘方：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(棣美弗定理)

5.开方：$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

（k取0，1，2，3，……，$n-1$。）

注意：

1.复数的乘、除、乘方、开方也可以化为指数式，根据指数运算法则进行运算。

2.对复数进行加、减法运算时，一般用代数式运算比较方便；进行乘、除法运算时，用三角函数式或指数式比较方便；特别是在乘方、开方时，一般都用三角函数式或指数式进行运算。

3.根式的基本性质和根式的运算法则不能用在虚数的运算上。

如：$\sqrt{-a}\sqrt{-b}\neq\sqrt{(-a)(-b)}$ $(a>0,\ b>0)$

应该是$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\sqrt{b}i=\sqrt{ab}i^2=-\sqrt{ab}$。

4.运算过程中应注意利用i的幂的性质。

5.运算完了以后应整理成$a+bi$的形式。

范　例

1.计算：$-(-6.5)\times\frac{12}{13}+(-2)^4+[(-2)^3+2]+\left(3\frac{1}{3}\right)^2$

解：原式$=-\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{12}{13}+16+(-8+2)+\left(\frac{10}{3}\right)^2$

$$=6-\frac{8}{3}+\frac{100}{9}=\frac{54-24+100}{9}=14\frac{4}{9}$$

2.求证：$\sqrt{2}$不是有理数。

证明：设$\sqrt{2}$是有理数，即$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，其中 p、q 是自然数，且 p、q 互质．$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ $\therefore p^2=2q^2$．$\because 2q^2$是一个偶数，$\therefore$ p^2 是偶数，p 也是偶数。设 $p=2k$（k 为自然数），$\therefore (2k)^2=2q^2$，$q^2=2k^2$，$\therefore q$ 也是偶数．$\therefore$ p、q 都是偶数，这与 p、q 互质假设矛盾．

$\therefore$ $\sqrt{2}$不是有理数。

3．m 为何实数值时，$(2+i)m^2+(1-i)m-(1+2i)$ 是：(1)实数，(2)虚数，(3)纯虚数，(4)零。

解：$\because$ $(2+i)m^2+(1-i)m-(1+2i)$

$$=2m^2+m-1+(m^2-m-2)i$$

$$=(2m-1)(m+1)+(m+1)(m-2)i.$$

(1) 当 $m=-1$ 或 $m=2$ 时，是实数．

(2) 当 $m\neq-1$，且 $m\neq2$ 时，是虚数。

(3) 当 $m=\frac{1}{2}$时，是纯虚数。

(4) 当 $m=-1$时，是零。

4．a 为何实数时，$\sqrt{\lg\frac{3}{2-a}}$为虚数？

解：$\begin{cases}\lg\frac{3}{2-a}<0\\ \frac{3}{2-a}>0\end{cases}$ 解此不等式组得 $a<-1$。

$\therefore$ 当 $a<-1$时，$\sqrt{\lg\frac{3}{2-a}}$是虚数。

5.计算：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1980} \cdot \left[\frac{3-4i}{1+2i}+(4+i^{11})-(1-i)^{10}\right]$

解：原式 $=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{1960} \cdot \left[\frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right.$

$$\left. +(4-i)-[(1-i)^2]^5\right]$$

$$=i^{1980} \cdot \left[\frac{-5-10i}{5}+4-i-(-2i)^5\right]$$

$$=1 \cdot (-1-2i+4-i+32i)=3+29i。$$

6.计算：$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^5}$

解：$\because \quad (1+\sqrt{3}i)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$(\sqrt{3}+i)^5=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$$

$$=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$\therefore \quad$ 原式 $=\frac{2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)}{2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

$$= 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$= 32i.$$

7.求复数$\dfrac{a^2-b^2+2abi}{ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}i}$的模数。($a$，$b$ 为实数.)

解：$\because$ $|a^2-b^2+2abi| = \sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}$

$$= a^2+b^2$$

$$|ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}i|$$

$$= \sqrt{(ab\sqrt{2})^2+(\sqrt{a^4+b^4})^2}$$

$$= a^2+b^2.$$

$$\therefore \left|\frac{a^2-b^2+2abi}{ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}i}\right| = \frac{|a^2-b^2+2abi|}{|ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}i|}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

8.已知 x、y 是共轭复数，且$(x+y)^2-3xyi=4-6i$，求 x，y 的值。

解：$\because$ x、y 是共轭复数，$\therefore$ $x+y$，xy 均为实数，

$$\therefore \begin{cases}(x+y)^2=4\\-3xy=-6.\end{cases}$$

解此方程组得 $\begin{cases}x=1+i\\y=1-i,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-i\\y=1+i,\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1+i\\y=-1-i,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1-i\\y=-1+i.\end{cases}$

9.解方程 $|Z|-Z=1+2i$