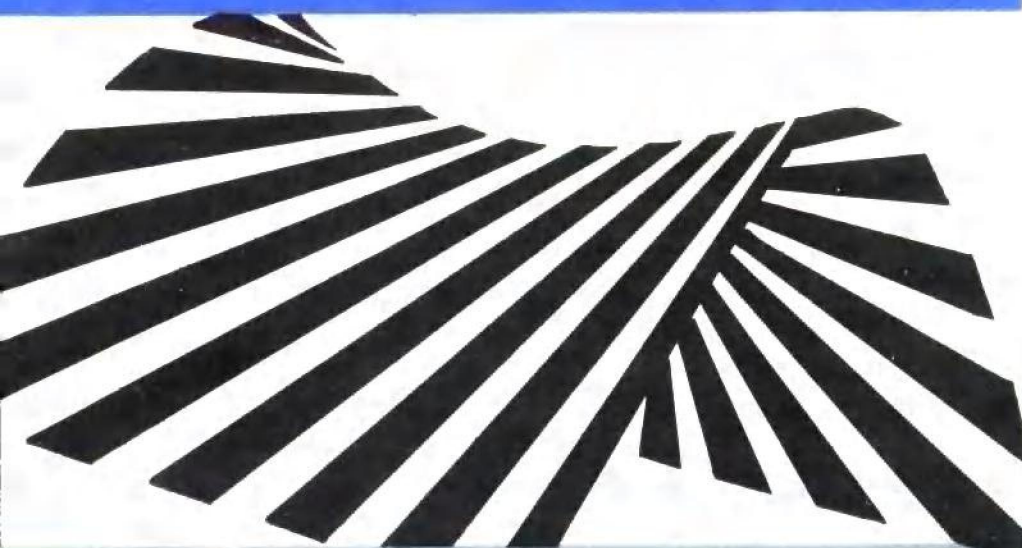


解析几何

方德植 编



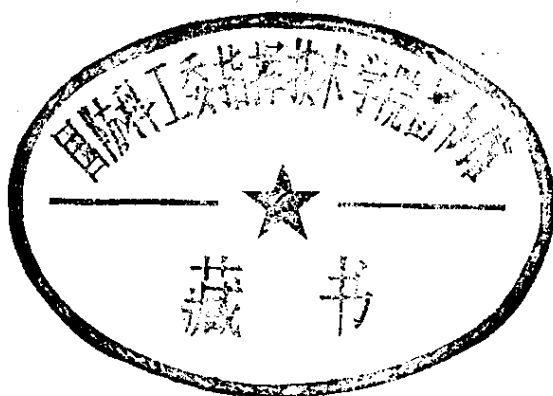
高等教育出版社

解 析 几 何

方德植 编



科工委字第802 2 0044250 6



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据综合大学《解析几何教学大纲(83年修订稿)》编写的。全书共有七章,分为四部分:第一部分(第一,二章)在仿射坐标系下论述直线与二次曲线的有关问题,介绍平面上的正交变换与仿射变换,二次曲线的度量分类、仿射分类及不变量的理论;第二部分(第三—五章)仿效第一部分的叙述方法,对空间有关的类似问题作了比较系统的论述;第三部分(第六,七章)介绍射影变换的起源及射影几何概要,变换群,几何分类,非欧几何导引,几何公理系统简介;第四部分(附录)扼要介绍中学平面解析几何知识。

本书叙述了解析几何的基本内容。书中各节均配有相当数量的习题,每篇之末附有全篇复习提纲与总习题,供读者系统复习使用。

本书可供高等院校数学系各专业作教学用书。

解 析 几 何

方德植 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 850×1168 $1/32$ 印张 10.75 字数 258,000

1986年3月第1版 1986年3月第1次印刷

印数 00,001—10,200

书号 13010·01175 定价 1.85 元

序 言

本书是根据一九八三年五月教育部召开的高等学校理科数学、力学教材编审委员会几何、拓扑编审组会议上所讨论的精神进行编写的。在会议上大家认为：几十年来，几何课程受到严重削弱，一九八〇年的《解析几何》教学大纲，总时数为68学时，颇感不足。在这次会议上对教学大纲进行了修改。首先扩展了教学内容，加强有关“射影解析几何”的阐述；其次，删去了中学学过的内容，或酌情少讲。

根据上述精神，编者把自己在厦门大学多年使用的《解析几何》(讲义二稿)的体系与内容作了全面的修订。在论述平面解析几何时，对于中学学过的内容基本上不再重复阐述，仅作为附录，供学生复习时参考。对中学未学过的内容则作了充分的补充，并详加阐述。本书的第一部分(第一、二章)，首先导入平面向量并建立仿射坐标系，再采用向量的方法，并在仿射坐标系下论述直线的有关问题；对三种常见的二次曲线作了一些补充；最后还对平面上的正交变换与仿射变换、二次曲线的度量分类、仿射分类以及不变量的理论等作了比较详细的介绍。

本书第二部分(第三章到第五章)讲述空间解析几何，这是本课程的重点。这里基本上是仿效平面上的补充内容的叙述方法对空间中的有关类似的问题作了比较系统并详细的论述。

第三部分(第六、七两章)讲述一维、二维射影解析几何，其中着重介绍：(1)射影变换的起源及射影几何概要；(2)非欧几何导引；(3)几何公理系统简介，这一部分的内容是十分重要的。但一年级学生学习这一部分，还有一定困难，考虑到各地区条件的差异，各校可根据自己的具体情况灵活处理。

本课程的目的，在于培养学生运用解析方法解决几何问题及其在实际中应用的能力，并为学习其他后继课程作准备。解析几何与分析 and 代数有密切的关系：分析中经常用到解析几何的方法与图形的许多性质；解析几何为代数中不少对象提供了具体的解释，给代数以直观的几何背景，从而加强数量关系的直观性。

本书总的特点是：由浅入深，由易到难，循序渐进，以不多的篇幅叙述了解析几何的基本内容；而且特别注意理论基础的系统性与严密性；还注意到与实际的联系。此外，在编写过程中，为了符合学生的接受能力，力求做到：概念、公式和方法的引入尽可能的通俗易懂。为了使學生把所学到的理论与方法加以巩固和应用，在每节之末一般配有一定数量的习题，其中个别习题还补充了正文的内容。在每篇之末附有全篇复习提纲与总习题，使读者学完一个阶段后作一次有系统的复习，以达到对整个阶段的内容有较全面的理解；通过总习题使读者能把每篇的主要理论和方法灵活地运用到解决比较综合性的问题。

书中不带星号的内容都是必要的，但是带星号的内容也是重要的，可以根据讲课时数与学生水平作适当的取舍。

全书的教学时数约为85学时，其讲授与习题课的比例为4:1，各校可根据具体情况作适当安排。

由于编者水平有限，一定有很多不妥和错误之处，恳切地希望读者多多提出宝贵意见，以助改进。

本书可作为大专院校数学系各专业以及高等工业学校相近专业的教学用书或教学参考书。

对本课程总时数为68学时的学校可将第三篇射影几何部分删去或作简略的介绍。

方德植

一九八四年四月于厦门大学

目 录

序言	1
----------	---

第一篇 平面解析几何补充

第一章 向量与平面坐标系	1
§ 1 向量	1
1. 向量的概念	1
2. 向量的加法和减法	3
3. 数乘向量	4
4. 两个向量的数量积	6
习题 1.1	8
§ 2 向量及其运算的坐标表示	9
1. 直线上的向量与坐标法	9
2. 平面上的向量与坐标法	11
3. 向量运算的坐标表示	13
4. 几个最简单的问题	14
习题 1.2	18
第二章 直线与二次曲线	19
§ 3 在仿射坐标系下的直线方程	19
1. 点向式的直线方程	19
2. 二点式的直线方程、参数式方程及截距式方程	20
习题 2.1	22
3. 一般形式的直线方程	22
习题 2.2	24
4. 点与直线的相关位置	24
5. 二直线间的相关位置	25
习题 2.3	28

§ 4 直线束	28
习题 2.4	30
§ 5 平面上的坐标变换	31
1. 原点的变换	31
2. 坐标向量的变换	33
3. 一般的坐标变换	35
习题 2.5	35
§ 6 椭圆、双曲线、抛物线的共同性质	36
1. 焦点和准线的性质	36
2. 光学性质	39
3. 圆锥截线	39
4. 二次曲线的直径	40
习题 2.6	44
§ 7 二次曲线的切线和法线	44
习题 2.7	48
§ 8 平面上的正交变换	49
1. 正交变换	49
2. 正交变换的基本性质	52
习题 2.8	55
§ 9 平面上的仿射变换	55
1. 仿射坐标	55
2. 仿射变换	56
3. 仿射变换的基本性质	56
习题 2.9	61
§ 10 二次曲线的分类	61
1. 在直角坐标系下, 二次曲线的分类	61
2. 在仿射坐标系下, 二次曲线的分类	65
§ 11 二次曲线的一般性质	67
1. 二次曲线与直线的交点、渐近方向和渐近线	68
习题 2.10	71

2. 二次曲线的切线和奇点	71
3. 中心	73
4. 直径	75
5. 主方向、主直径	77
习题 2.11	79
§ 12 利用不变量来判定二次曲线的类型	79
1. 二元二次型(形式)的变换	79
2. 二次曲线的不变量和半不变量	80
3. 二次曲线方程的化简和分类	83
习题 2.12	90
第一篇 复习提纲和总习题	90

第二篇 空间解析几何

第三章 向量和空间坐标系	95
§ 13 空间中的向量与坐标法	95
1. 向量的坐标	95
2. 空间坐标系	96
3. 向量的向量积及其运算法则	99
4. 向量的混合积	104
5. 几个重要的恒等式	106
6. 几个最简单的问题	107
习题 3.1	108
§ 14 曲面和空间曲线的表示	109
1. 曲面与方程	109
2. 空间曲线的方程	114
3. 球面坐标与柱面坐标	115
习题 3.2	117
§ 15 空间中的坐标变换	117
1. 原点的变换	117
2. 坐标向量的变换	119

3. 空间直角坐标系的变换	120
习题 3.3	121
*4. 欧拉角	121
5. 空间中的正交变换与仿射变换	122
习题 3.4	125
第四章 空间中的直线与平面	126
§ 16 在仿射坐标系下, 空间直线的方程	126
§ 17 在仿射坐标系下, 平面的方程	127
1. 平面的方程	127
2. 平面关于坐标系的位置	130
§ 18 直线与平面的相关位置	131
1. 空间直线与平面的相交和平行	131
2. 空间直线的一般方程	132
3. 两条直线平行与共面的条件	133
§ 19 平面的法线式方程、一点到一个平面的距离	134
习题 4.1	137
§ 20 直线与平面	138
1. 二平面间的交角、垂直和平行的条件	138
2. 直线与平面的交角、平行和垂直的条件	138
3. 二直线间的交角和垂直的条件	140
习题 4.2	140
§ 21 空间的点到直线的距离、二不共面直线间的距离	141
1. 一点到一直线的距离	141
2. 二不共面直线间的最短距离	141
习题 4.3	143
§ 22 平面的线性组	144
1. 矩阵及其秩	144
2. 平面的线性组	146
习题 4.4	154

第五章 二次曲面	156
§ 23 椭球面	157
习题 5.1	159
§ 24 双曲面	159
习题 5.2	161
§ 25 抛物面	162
习题 5.3	165
§ 26 二次锥面与二次柱面	166
习题 5.4	168
§ 27 二次直纹面	168
习题 5.5	171
§ 28 二次曲面的分类及其一般性质	172
1. 二次曲面与直线的交点、渐近方向	173
2. 二次曲面的切面和法线	175
3. 曲面的直径平面与中心	176
4. 按渐近方向分类二次曲面	179
习题 5.6	180
5. 二次曲面的奇异方向、共轭方向与共轭直径	180
习题 5.7	183
6. 曲面的主平面	183
习题 5.8	185
§ 29 二次曲面的分类	185
1. 在直角坐标系下, 二次曲面的分类	185
习题 5.9	190
2. 在仿射坐标系下, 二次曲面的分类	190
§ 30 利用不变量来判定二次曲面的类型	193
1. 二次型的变换	193
习题 5.10	195
2. 二次曲面的不变量和半不变量	196
习题 5.11	198

3. 二次曲面方程的化简和分类	199
第二篇 复习提纲与总习题	204

第三篇 射影解析几何概要

第六章 一维射影解析几何	210
§ 31 射影变换的起源及射影几何的产生和发展	210
§ 32 一维基本形式的齐次笛氏坐标和射影坐标	214
1. 直线上点的齐次笛氏坐标和射影坐标	214
习题 6.1	217
2. 射影坐标变换	217
习题 6.2	218
3. 线束中直线的坐标	218
4. 面束中平面的坐标	220
§ 33 一维射影变换	221
§ 34 交比	223
习题 6.3	229
§ 35 透视对应	230
习题 6.4	232
§ 36 射影变换的固定元素和它的特征不变量	232
§ 37 对合	234
习题 6.5	237
第七章 二维射影解析几何	238
§ 38 平面上点的齐次笛氏坐标	238
习题 7.1	241
§ 39 圆点	241
§ 40 平面上的直线坐标	244
§ 41 平面上的射影坐标	245
习题 7.2	249

§ 42	平面上的对偶原则	250
§ 43	平面上射影坐标变换	254
§ 44	平面上的射影变换、仿射变换和度量变换	255
1.	射影变换及其基本定理	255
2.	仿射变换	259
3.	度量变换	261
	习题 7.3	262
§ 45	射影坐标的应用	263
1.	完全四点形与完全四边形	263
2.	德沙格定理与巴普斯定理	265
	习题 7.4	266
§ 46	二次曲线的射影几何、仿射几何和度量几何	267
1.	二次曲线及其切线	267
2.	二阶曲线	271
3.	配极论	273
4.	二次曲线的射影分类	276
	习题 7.5	278
5.	二次曲线的仿射几何	278
6.	二次曲线的度量几何	281
	习题 7.6	283
§ 47	射影形式与二次曲线	284
1.	二次(二阶)曲线的射影作图法	284
2.	由五点(直线)确定二次(二阶)曲线的作图法	286
3.	巴斯加定理和布里安松定理	287
	习题 7.7	289
§ 48	变换群、几何分类	289
1.	变换及其性质	290
2.	变换群	291
3.	抽象群	292
4.	几何分类	293

习题 7.8	294
*§ 49 非欧几何导引	294
1. 非欧几何的发现	294
2. 第五公设问题的解答	296
3. 双曲运动群与椭圆运动群	296
4. 射影测度	297
*§ 50 几何公理系统简介	304
1. 公理系统的三个基本问题	305
2. 双曲几何与欧氏几何的关系	306
第三篇 复习提纲与总习题	310
*附录 平面解析几何复习	314
§ 1 平面坐标系与坐标变换	314
§ 2 几个简单的问题与公式	316
§ 3 直线的方程以及点与直线的相互位置	318
§ 4 二次曲线	322

第一篇 平面解析几何补充

第一章 向量与平面坐标系

向量与坐标一样在解析几何里也是必不可少的工具, 本节首先叙述有关向量的概念和向量的一些运算. 其次, 为了使读者容易接受向量的基本内容, 介绍向量的坐标表示时, 只讨论平面向量. 这样, 在第三章再引入空间向量的坐标表示就很容易了. 在建立坐标时, 是从一般的仿射坐标系开始, 而把笛氏坐标系作为它的特殊情形, 从而就可以获得在中学已学过的一些最简单的知识, 使学生在复习已知知识的同时, 还扩大了他们的视野.

§1 向 量

1. 向量的概念 在日常生活或物理学中经常碰到许多简单的量, 只要取定度量单位以后, 就可以用一个实数来表示这种量, 例如距离、时间、面积、温度、质量、密度等; 这种只有大小的、单用实数就可以表示的量叫做数量. 另外还有一些量, 不但有大小并且还有方向. 例如, 我们说, 从甲地向东走 20 里才到乙地; 又说目标就在我们正前方 200 米处. 从这两个例子就引出位移的概念: 一个质点沿着一个方向移动一段距离, 这就是一点的位移. 显然位移是一种既有大小(距离)又有方向的量. 这样的量是很多的, 如力、速度、电磁场、加速度、角速度、力矩等都是. 这种量所具有的力学或物理学的内容虽然各不相同, 但是都是既有大小又有方向的量. 就这一点来说, 这种量和位移是一样的. 于是, 我们有必

要把这种量的共同特点抽象出来作为统一的研究对象。因此，我们把既有大小又有方向的量称为向量。

对于向量也可引进坐标用数量来表示，从而归结为数量的研究。对于向量可以用规定了起点和终点的直线段(简称有向线段)来表示。因此，通常用有向线段 AB 来表示向量，用长度 $|AB|$ 表示大小，用端点的顺序 $A \rightarrow B$ 来表示方向， A 为起点， B 为终点。为了使有向线段清楚地表示一个向量起见，有时在写法上加一个箭头，写成 $\overrightarrow{AB}$ (图 1.1)。



图 1.1

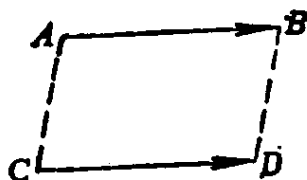


图 1.2

若两个向量，其中有一个从另一个经过平行移动可以得到，则称这两个向量相等(图 1.2)。所以，大小相等、方向相同的有向线段表示相等的向量。例如图 1.2 中所示的， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 。从向量相等的定义可以推出：所有的向量的始点，可以移到空间中同一个定点，从这个点总可以引出一个向量等于空间中任意已知向量。此外，为了书写方便，常用黑体拉丁字母来表示向量，如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, 等。很明显，若向量 $\mathbf{a}$ 等于向量 $\mathbf{b}$ ，则 $\mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{a}$ 。如果 $\mathbf{a}$ 等于 $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{c}$ ，则 $\mathbf{a}$ 等于 $\mathbf{c}$ 。

大小等于 0 的向量叫零向量，以 $\mathbf{0}$ 表示它。它是起点和终点重合的向量。与向量 $\mathbf{a}$ 的大小相等，而方向相反的向量叫 $\mathbf{a}$ 的反向量，以 $-\mathbf{a}$ 来表示。

向量的大小或长度，记作 $|\mathbf{a}|$ ，叫做向量的模，也叫绝对值。注意，模是一个数量。模等于 1 的向量叫单位向量。对于两个向量，比如 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ (图 1.3)，不能说 $\overrightarrow{AB}$ 小于 $\overrightarrow{AC}$ 或 $\overrightarrow{AC}$ 大于 $\overrightarrow{AB}$ 。

只能说 $\overrightarrow{AB}$ 的模小于 $\overrightarrow{AO}$ 的模, 可写为 $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AO}|$.

2. 向量的加法和减法 先考虑这样一个实例: 连续施行两次位移也是一个位移. 从点 A 位移到点 B , 再从点 B 位移到点 C , 合并起来就是从点 A 到点 C 的位移, 结合的方法可以用三角形来表示(图 1.3).

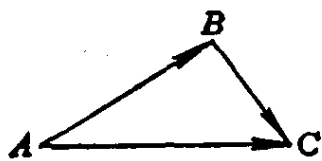


图 1.3

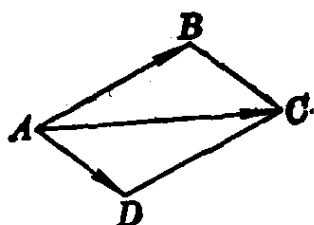


图 1.4

力的结合, 通常用平行四边形法. 但也可用三角形法, 把一个力的起点移到另一个力的终点处即可. 平行四边形法是从同一个起点作两个向量(图 1.4). 三角形法是连续地作两个向量.

从位移和力的这种结合法就可引出对于一般向量的加法法则:

从一点引出一个向量 a , 然后从向量 a 的终点引出向量 b 得一折线, 从折线的起点到终点的向量叫做 a 与 b 的和, 记作 $a+b$ (图 1.5), 很明显 $a+b$ 与起点的选取无关; 不同的起点的作图只差一个平行移动, 所得到的向量和是相等的.

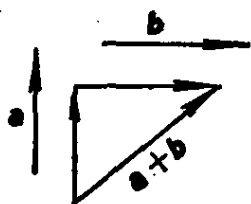


图 1.5

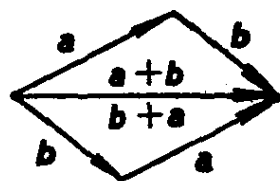


图 1.6

对于多个向量 $a, b, \dots, d$ 的和也可以用折线一次作出: 从一点引出向量 a , 其次从 a 的终点引出 b , 等等, 我们得到了向量折

线 $a, b, \dots, d$, 最后作向量 m , 其起点与这折线的第一个向量 a 的起点重合, 而其终点则与这折线的最后一个向量 d 的终点重合, (图 1.7), 这个向量 m 就叫 $a, b, \dots, d$ 的和, 记作

$$m = a + b + \dots + d.$$

根据向量的加法定义及其作图立刻可知运算满足下列规律:

交换律 $a + b = b + a$ (看图 1.6);

结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (看图 1.8);

$$a + 0 = a;$$

$$a + (-a) = 0.$$

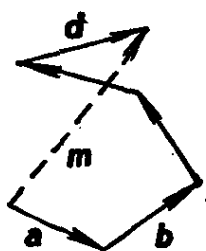


图 1.7

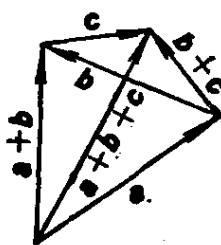


图 1.8

向量的减法定义为(图 1.9) 减去向量 b 就是指加上它的反向量 $-b$, 即



图 1.9

$$a - b = a + (-b).$$

对于任何向量 a 和 b 成立三角形不等式:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

3. 数乘向量 直线上的连续移动是最简单的位移过程, 比如弹簧的伸缩, 只有位移大小的改变和方向的反转, 大小的改变可以用倍数来表示, 而方向的反转可以用负号来表示, 从这里可引出数乘向量的概念: 实数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个向量, 它的模为

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|.$$

λa 的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反, 当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, 认为 λa 等于零向量或简称为零.