北京大学数学丛书

H^p 空间论

邓东皋　韩永生　著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

H^p 空间论

邓东皋　韩永生　著

北京大学出版社

新登字(京)159号

北京大学数学丛书
H^p 空间论
邓东皋　韩永生　著
责任编辑：刘　勇
*
北京大学出版社出版发行
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　15.875印张　390千字
1992年11月第一版　1992年11月第一次印刷
印数：001—250册
ISBN 7-301-01932-7/O·294
定价：21.90元

前　　言

H^p空间是Hardy空间的简称。本书主要讲述n维欧氏空间上的H^p空间的实变理论。

H^p 空间的实变理论是70年代以来调和分析中最富有成果的领域之一。复平面单位圆上的H^p空间理论，作为单复变函数论的部分内容，在本世纪初开始研究，至三十年代基本形成。五十年代初，A.P.Calderón与A.Zygmund关于奇异积分的开拓性工作，促进了E.M.Stein, G.Weiss, A.P.Calderón与A.Zygmund等通过多元调和函数系与 Littlewood-Paley算子，建立了多元 H^p空间。但除H^1之外，构造十分复杂，概念不仅依赖函数的调和性，还依赖其解析性。1971年 D.L.Burkholder, R.F.Gundy 与M.L.Silverstein 第一次在复平面单位圆的情形，证明了 H^p 空间的极大函数刻画。1972年 C.Fefferman 与 E.M.Stein 把这结果推广到高维，找出了高维 H^p 空间的各种实变刻画，揭示了 H^p 空间概念并不依赖于函数的任何解析性与调和性的深刻本质。同时，他们还证明了，由F.John与L. Nirenberg于1961年在研究偏微分方程时发现的有界平均振动空间(BMO)，正是 H^1 的对偶空间。把这些空间与分数次微分的概念联系起来，加深了人们对 Sobolev 空间、Besov空间以及Triebel-Lizorkin 空间的认识。这样，在人们面前，展现了H^p空间、Lebesgue L^p空间、BMO、进而Sobolev空间或Besov空间或 Triebel-Lizorkin 空间这样一个空间系列。以后的事实证明，这是研究分析问题的极其合适的空间系列。1974年，R. Coifman发现$\boldsymbol{R}$上的H^p空间可以通过“原子”生成。1977年R.H. Latter把这结果推广到高维。差不多同时，R. Coifman, M. Taibleson 与G. Weiss发展了H^p空间的分子结构。近年来，人们

把这思想用到BMO空间、Besov空间、Triebel-Lizorkin 空间，结果把这系列空间的构造“原子化”了。这样做的同时，人们大大简化了算子在这些空间上的作用的研究。在这一阶段，人们还发现，H^p空间(连同 BMO 空间)与近年来发现的许多分析工具有极其密切的关系，它们包括A_p权与加权模不等式，Carleson 测度与Carleson不等式，等等。于是，围绕H^p空间理论发展了一整套的实变技巧，促使分析的一些重大问题取得了突破性的进展。关于Lipschitz曲线上Cauchy积分算子L^2有界性的Calderón猜测的解决，以及关于Calderón-Zygmund算子L^2有界性判别准则的$T(1)$定理与$T(b)$定理的建立，就是这个进展的最典型的例子。本书的目的是希望以原子分解思想为中心，介绍H^p空间、BMO、Besov 空间以及Triebel-Lizorkin空间的构造，同时介绍有关的实变技巧，以期为人们提供调和分析在这一领域的重大进展的一个轮廓。

本书的组织如下：第一章是预备知识，希望用最简明的语言讲述以后经常用到的概念与工具。第二章介绍复平面单位圆与上半平面的H^p空间的经典理论，用的完全是解析函数的方法。第三章讲述用共轭调和函数系推广的多元H^p空间。由于这部分内容涉及调和函数的复杂技巧，而在有了H^p空间的实变刻画与原子分解以后，这部分内容显得有些古老，因此，在近代许多教程中都不作详细介绍。但是，T. Wolff 新近的工作（见本书§3.3的3），揭示了共轭调和函数系作为解析函数的一种高维推广，在本质上与解析函数是有许多区别的，因而给这理论提出了许多新问题。故我们在这里仍作比较详细的讲述。第四章讲述H^p空间的实变特征，重点是介绍C. Fefferman-Stein 1972年的工作。第五章讲述H^p空间的原子分解。在这里我们选择了J. Wilson 不用大极大函数 (grand maximal function) 而直接用非切向极大函数得到$(p,2)$原子分解的证明，再用 Calderón-Zygmund分解把$(p,2)$原子分解为(p,∞)原子。同时还介绍直接用S函数做原子分解的另一种证明。第六章介绍H^p空间的分子结

构，并初步研究一些算子在 H^p 空间的作用，其中特别给出了 H^p 乘子的一种刻画。第七章讲述BMO空间、Carleson 测度与 H^p 空间的对偶空间。第八章介绍算子在 H^p 空间与 L^p 空间的内插以及 H^p 空间与 L^p 空间的内插空间。第九章用原子、分子分解的思想讲述Besov空间、Triebel-Lizorkin空间与 BMO 空间的特征。作为应用给出C. Fefferman-Stein BMO 分解定理的一个构造性的证明。第十章讲述第三代奇异积分算子即Calderón-Zygmund算子在 H^p 空间的作用、$T(1)$ 定理以及 $T(1)$ 定理在Triebel-Lizorkin 空间的推广。这些定理的证明，都应用了原子、分子结构或其思想。第十一章讲述乘积空间上的 H^p 空间。在这里我们介绍了R. Fefferman最近的原子分解的工作、J.-L. Journé覆盖引理以及算子在乘积空间上的 H^p 空间的有界性。由于乘积空间的复杂性，其上的 H^p 空间理论还是不完整的，因而遗留下来有待研究的问题也就较多。本书除了一些必要的大学本科的函数论与泛函分析的基础，以及一些 n 维欧氏空间的Fourier变换的基本知识与少数关于 L^p 空间奇异积分与内插空间的结论外，基本上是自封的。关于 n 维欧氏空间的Fourier变换以及这少数关于 L^p 空间的结论，读者可以在Stein，Stein-Weiss，Bergh-Lofström 的十分流行的书（见文献[St4]，[SW3]，[BL]）中找到。从第三章开始，每章最后一节都有文献注释，并列出一些进一步的结果，以引起读者的兴趣与思考，其中也包括一些尚未解决的问题。

本书的主要内容，曾分别由两位作者先后三次在北京大学数学系作为研究生课程讲授过。部分内容曾经在南开大学数学研究所与曲阜师范大学数学系讲授过。本书就是在这些讲稿的基础上编写成的。本书可作为数学系研究生一学期或两学期课程的教材或参考书。如果以非切向极大函数属于 L^p 来定义 H^p 空间，以本书第一、五、六、七章，§8.1，§10.1，§10.2为主要内容，估计一个学期可以讲完。

作者衷心感谢我们的老师程民德教授对编写本书的支持与帮

助．感谢北京大学数学系调和分析讨论班的同志们，大家经常在一起的讨论，加深了对很多问题的认识．在本书编写过程中，钟家平同志帮助搜集和整理了部分材料，我们在此表示感谢．本书的编写，是国家自然科学基金支持的项目的一部分，没有这种支持，有关的研究与本书的编写是无法完成的．

H^p空间论内容丰富，发展很快，许多地方涉及很复杂的分析概念与演算．本书疏漏、错误之处肯定不少，真诚地欢迎读者批评指正．

邓东皋　韩永生

1989年3月于北京大学

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

目　　录

第一章 预备知识

本章将介绍调和分析中一些最基本的结果。这些结果在以后各章中将经常用到。

贯穿全书，我们将采用以下的符号。$\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。$\boldsymbol{R}^n$ 的点用 x,y,z 等表示，如 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。$x\cdot y$ 表示$\boldsymbol{R}^n$的内积$x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$。$|x|$表示 x 的模 $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$。$\mathrm{d}x$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Lebesgue 积分元。如果 E 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的集合，则 E^c 是它的补集，$\bar{E}$ 是它的闭包，$|E|$ 是它的 Lebesgue 测度，$\chi_E(x)$ 或简记为 χ_E 是 E 的特征函数。通常用 Q 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中其边平行于坐标轴的立方体，或简称为方体。kQ 表示与 Q 同心边长为 Q 的 k 倍的立方体。$B(x,r)$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中以 x 为中心 r 为半径的开球体。$\mathscr{S}$ 表示 Schwartz 速降函数类，$\mathscr{S}'$ 是$\mathscr{S}$的广义函数空间，即缓增广义函数类。$\boldsymbol{R}^{n+1}_+$ 表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的上半空间$\boldsymbol{R}^{n+1}_+=\{(x,t)\,|\,x\in\boldsymbol{R}^n,\ t>0\}$。$\|f\|_p$表示 f 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的范数。按照通常的习惯，C 表示常数，但它在不同的地方可以表示不同的值。

§1.1 Hardy-Littlewood 极大函数

定义1.1 设 f 是 $\boldsymbol{R}^n$上的局部可积函数。对每一点 $x\in\boldsymbol{R}^n$，定义

$$M(f)(x)=\sup_{Q:\,x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

称$M(f)$为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数。

命题1.1 $M(f)$是下半连续函数，即对任意 $t>0$，集合

$E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>t\}$是开集。

证明 设 $x_0\in E_t$，则 $M(f)(x_0)>t$。由定义知存在 Q_0，使得 $x_0\in Q_0$，且

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(y)|\mathrm{d}y>t.$$

显然存在一个以 x_0 为中心，半径为 r_0 的球 $B(x_0,r_0)=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |x-x_0|<r_0\}$，满足 $B(x_0,r_0)\subset Q_0$，且对任意$x\in B(x_0,r_0)\subset Q_0$，有

$$M(f)(x)\geqslant\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(y)|\mathrm{d}y>t,$$

故 $B(x_0,r_0)\subset E_t$，从而证明了 E_t 是开集。证毕。

定理1.1 设 $f\in L^1(R^n)$，则对任意的 $t>0$，有

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>t\}|\leqslant\frac{C}{t}\|f\|_1,$$

其中C是与 f,t 无关的固定常数。

证明 记 $E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>t\}$。设 $x\in E_t$，则存在一个方体 Q_x，使得 $x\in Q_x$，且

$$\int_{Q_x}|f(y)|\mathrm{d}y>t|Q_x|.$$

下面我们按 Vitali 覆盖原理，选取方体序列$\{Q_k\}$，使得 Q_k 互不相交，但 $E_t\subset\bigcup 5Q_k$。事实上，由于

$$|Q_x|<\frac{1}{t}\int_{Q_x}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{t}\|f\|_1,$$

可以选取 Q_1，使得 $l(Q_1)\geqslant\frac{1}{2}\sup l(Q_x)$，其中 $l(Q)$ 表示Q的边长。假设 $Q_1,\cdots,Q_{k-1}$ 已经选取完毕，我们选取 Q_k，使得

$$l(Q_k)\geqslant\frac{1}{2}\sup\{l(Q_x):\ Q_x\cap Q_j=\varnothing,\ j=1,\cdots,k-1\}.$$

如果按上述原则选取的方体序列是有限的，则显然有 $E_t\subset\bigcup 5Q_k$，这是因为每个 Q_{x_0} 都同某个 Q_{k_0} 相交，而由 Q_{k_0}的取法知 $l(Q_{k_0})\geqslant\frac{1}{2}l(Q_{x_0})$。如果选取的方体序列是无穷的，则由 Q_k 互不相交，知

$$\sum_k |Q_k|\leqslant\sum_k\frac{1}{t}\int_{Q_k}|f(y)|\,dy\leqslant\frac{1}{t}\|f\|_1,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}l(Q_k)=0$。对任意 $x\in E_t$，存在 Q_x，使得 $x\in Q_x$。由 Q_k的选法以及 $l(Q_k)\to 0$ 知 Q_x 必与某个 Q_k 相交。取 k 为具有此性质的最小整数，则 $l(Q_k)\geqslant\frac{1}{2}l(Q_x)$，从而 $Q_x\subset 5Q_k$，这就证明了 $E_t\subset\bigcup 5Q_k$。于是

$$|E_t|\leqslant\sum_k|5Q_k|\leqslant C\sum_k|Q_k|\leqslant\frac{C}{t}\|f\|_1.$$

定理1.1获证。

定理1.2 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p\leqslant\infty$，则

$$\|M(f)\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中 C 只依赖于 p 与维数 n，与 f 无关。

证明 $p=\infty$时，

$$\|M(f)\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$$

是显然的。

考虑$1<p<\infty$的情形。对任意 $t>0$，设

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当}|f(x)|>t/2,\\ 0, & \text{当}|f(x)|\leqslant t/2,\end{cases}$$

以及

$$f_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{当}|f(x)|>t/2,\\ f(x), & \text{当}|f(x)|\leqslant t/2.\end{cases}$$

显然 $f_1(x)+f_2(x)=f(x)$，且 $f_1(x)\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，这是因为

$$\int_{R^n}|f_1(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\left\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\right\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\left\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\right\}}|f(x)|\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{p-1}\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

记

$$E_t=\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f)(x)>t\},$$

则

$$E_t\subset\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_1)(x)>\frac{t}{2}\right\}\cup\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_2)(x)>\frac{t}{2}\right\}$$

$$=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(f_1)(x)>\frac{t}{2}\right\}.$$

根据定理1.1，有

$$|E_t|\leqslant\frac{C}{t}\|f_1\|_1=\frac{C}{t}\int_{\{x:\,|f(x)|>t/2\}}|f(x)|\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$\|M(f)\|_p^p=\int_{R^n}M(f)^p(x)\,\mathrm{d}x=p\int_0^\infty t^{p-1}|E_t|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cp\int_0^\infty t^{p-2}\int_{\left\{x:\,|f(x)|>\frac{t}{2}\right\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cp\int_{R^n}|f(x)|\int_0^{2|f(x)|}t^{p-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{Cp}{p-1}\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

推论1.1 设E是$\boldsymbol{R}^n$中测度有限的集合，令$\tilde{E}=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M(\chi_E)(x)>\frac{1}{2}\right\}$，其中$\chi_E$表示$E$的特征函数，则$|\tilde{E}|\leqslant C|E|$，其

中C与E无关。

证明 由定理1.1知$|\tilde{E}|\leqslant C\|\chi_E\|_1=C|E|$。证毕。

推论1.2 设$f\in L^1_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则对几乎所有的$x\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y=0, \qquad (1.1)$$

其中$Q(x,r)$表示以x为中心边长为r的方体。

证明 不失一般性，可以假设$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$。我们只需证明，对任意$t>0$，

$$A_t=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ \overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y>t\right\}$$

是一个零测集，这是因为使式(1.1)不成立的点包含在集合$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{1/j}$中。

对任意固定的$\varepsilon>0$，令$f=g+h$，其中g是具有紧支集的连续函数，且$\int_{\boldsymbol{R}^n}|h|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$。这时，显然有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|g(y)-g(x)|\,\mathrm{d}y=0$$

处处成立。因此

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|h(y)-h(x)|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant M(h)(x)+|h(x)|.\end{aligned}$$

故

$$A_t\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M(h)(x)>t/2\}\cup\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |h(x)|>\frac{t}{2}\right\}.$$

于是

$$|A_t| \leqslant \left|\left\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ M(h)(x) > \frac{t}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ |h(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant Ct^{-1}\|h\|_1 + 2t^{-1}\|h\|_1 < Ct^{-1}\varepsilon,$$

由 ε 可任意小，便推出 $|A_t| = 0$。

推论1.3 设 $f \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，则对几乎所有的 $x \in \boldsymbol{R}^n$，有 $|f(x)| \leqslant M(f)(x)$。

证明 由推论1.2直接推出。

推论 1.3 告诉我们，Hardy-Littlewood 极大函数 $M(f)(x)$ 是较 $f(x)$ 大的函数，但定理1.1与定理1.2说明，它并不太大，它的 L^p 模（$1 < p \leqslant \infty$）被 f 的 L^p 模控制（$p = 1$ 时是"弱 L^1 模"）。因此，对很多算子来说，便可以通过 Hardy-Littlewood 极大函数进行估计。这一点以后将会经常遇到。在这里我们看一个恒等逼近的例子。

定理1.3 设 $\varphi(x) \geqslant 0$ 是径向函数，即 $\varphi(x) = \varphi(|x|)$，$\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\varphi(t)$ 在 $(0, \infty)$ 单调下降，则对于任意 $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\varphi_+(f)(x) \leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x),$$

其中

$$\varphi_+(f)(x) = \sup_{t>0}|\varphi_t * f(x)|,$$

$$\varphi_t(\cdot) = \frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right).$$

证明 先考虑

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{B_j}(x)$$

的情形，其中 $\chi_{B_j}(x)$ 是 B_j 的特征函数，B_j 是一以原点为中心、r_j 为半径的球体：$B_j = B(0, r_j)$。这时

$$\int_{R^n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} a_j |B_j|.$$

而

$$\int_{R^n} f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j |B_j| \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|f(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(0),$$

故

$$\int_{R^n} f(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

注意到$\|\varphi_t\|_1 = \|\varphi\|$，便有

$$\sup_{t>0}\left|\int_{R^n} f(x-y)\varphi_t(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

对于一般的φ，取具有上述性质的$\varphi^{(j)} \uparrow \varphi$，则

$$\left|\int_{R^n} f(x-y)\varphi_t(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{R^n} |f(x-y)|\varphi_t(y)\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{j\to\infty}\int_{R^n} |f(x-y)|\varphi_t^{(j)}(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|\varphi\|_1 M(f)(x).$$

推论1.4 若$\varphi \in L^1(R^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，且

$$\Phi(x) = \sup_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)| \in L^1(\boldsymbol{R}^n),$$

则对于任意$f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\varphi_+(f)(x) \leqslant CM(f)(x), \tag{1.2}$$

其中C与f无关，且对几乎所有的$x \in \boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{t\to 0}\varphi_t * f(x) = f(x). \tag{1.3}$$

证明 只需注意$\varphi_+(f)(x) \leqslant \Phi_+(f)(x)$，并用定理1.3，便得(1.2)。至于等式(1.3)，只需根据(1.2)，并用推论1.2的证明方法便可得到。值得指出的是，在证明中需要用到下述事实：对具有紧支集的连续函数f，等式(1.3)是处处成立的。这一事实不难证明。细节也可参看下面的定理。

定理1.4 若$\varphi \in L^1(R^n)$，$\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，则对任意