数学名著译丛

抽象代数学

卷 1

基本概念

N. 贾柯勃逊 著

科学出版社

数学名著译丛

抽象代数学

卷 1

基本概念

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书是作者根据他在几所大学里讲授的抽象代数学讲义编成的。全书分三卷。本卷是卷 1，综合地介绍抽象代数学的基本概念，是一本较为理想的群论入门书。

在本卷中，作者首先简单介绍了集合论与有理整数系，接着详细阐述了半群及群、环、整区及域、环及域的各类型扩张、因子分解的初等理论、带算子群、模及理想、格论、同态等基本概念。

本书可供数学研究工作者、高等院校数学系教师和学生参考。

N. JACOBSON
LECTURES IN ABSTRACT ALGEBRA
VOL. 1—BASIC CONCEPTS
Van Nostrand
1951

数学名著译丛

抽 象 代 数 学

卷 1

基 本 概 念

N. 贾柯勃逊 著

黄 缘 芳 译

*

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1960 年 2 月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1987 年 8 月第三次印刷　印张：6 1/2
印数：12,201—18,200　字数：168,000

统一书号：13031·3553
本社书号：5639·13—1

定 价： 1.85 元

GF69117

序

本书是将要出版的一部分为三卷总名叫做“抽象代数学”的卷 1. 这三卷书是以著者过去十年間在北加路里那 (North Carolina) 大学,約翰·霍帕京 (Johns Hopkins) 大学及耶魯 (Yale) 大学的講义为基础写出的. 总的計划是:本卷作为抽象代数学的导引,敍述最重要的代数概念. 为达到这样的目的,势必不能把所要介紹的論題都作广泛深入的說明; 但是仍企图越出代数系的基础理論与初等性質的范围,因此在內容上必須作一定程度的取舍.我們認为:在这一阶段里,与其貪着表面上多懂一些,不如在若干論題上多深入了解一些.

本书的卷 2, 卷 3 較具专門性質, 对于其中的論題将作概括的說明. 卷 2 以綫性代数学为主題,敍述向量空間的理論. 卷 3 是域論与加罗华 (Galois) 的理論, 討論域的代数結构与域的賦值.

全书三卷都按課堂用的教本来設計的, 包括有大量难易程度不等的习題; 若干附有星号的习題是被認为在处理中比較棘手的难題. 少数附有星号的节目(記法如 *1) 則表明可以略去,而不致影响对后面內容的理解.

在編写本卷过程中, 許多朋友曾提供有益的意見与鼓励. 克里福得 (A. H. Clifford), 霍契才得 (G. Hochschild) 与約翰孙 (R. E. Johnson)三位教授,芬克拜納 (D. F. Finkbeiner) 与米尔斯 (W. H. Mills) 两位博士曾閱过底稿的各部分, 对修改原稿提出有益的見解;后面两位还协助校对,在这里謹向他們致以誠悬的謝意.

賈柯勃遜 (N. Jacobson)

New Haven, Conn.

1951 年元月 22 日

目　录

引　論

从集合論来的概念．自然数系

本册的目的是介紹基本代数系：羣、环、域、带算子羣、模及格．这些代数系的研究包含古典代数学的主要部分；故从这一角度来說，题材是古老的，但这里采用公理开发，方法上較为新穎．因为我們的討論不限于特殊代数系(例如，实数系)，初学者有时会为抽象所苦；但通过习題与例子的补充学习，会有助于困难的克服．无論如何，这样做法显然可以节省許多时間，且使認識更加清楚．

我們将要討論的代数系的基本要素是集合及这些集合的映照．故在叙述中常遇見从集合論引来的概念．所以着手討論代数系之前，有必要在这引論的开端簡单地把这些概念說明一下．我們不打算在这集合論大綱的提要里作严格的叙述，讀者可参考系統而詳細討論这門学問的其他标准教本，其中以布巴基(Bourbaki)的"集合論"(Théorie des Ensembles)特別适合要求．

本引論的第二部分把自然数系 P 作为抽象算系予以概述．以假定能适合皮阿罗(Peano)公理的一个集合及这集合里的映照(后継映照)为出发点．由此，在 P 里导入加法、乘法及次序关系．还把整数系 I 定义为自然数系 P 的一种拓广．最后，引出初等羣論上不可少的关于 I 的一二算术事实．关于自然数系基础理論的完整叙述可参考兰道(Landau)的"分析基础"(Grundlagen der Analysis)及格拉甫斯(Graves)的"实变函数論"(Theory of Functions of Real Variables)．

1. 集合的运算　我們以簡单涉猎集合論的基本概念作为討論的开端．

設 S 是元素 $a, b, c, \cdots$ 的一个任意集合，各元素的本质如

何，与討論无关．我們以 $a \in S$ 或 $S \ni a$ 表示元素 a 属于 S．設 A 与 B 为 S 的两个子集合，如果 A 里每个元素 a 都属于 B，就說 A 含于 B，或 B 含有 A（記法是 $A \subseteq B$，或 $B \supseteq A$）．因此 $A = B$ 的意义是：$A \supseteq B$，同时也有 $B \supseteq A$．如果 $A \supseteq B$，但 $B \neq A$，就記作 $A \supset B$；这时我們說，A 眞的含有 B，或說 B 是 A 的眞子集合．

設 A 与 B 是 S 的任意两个子集合，則同时有 $c \in A$，$c \in B$ 的所有元素 c 的集合叫做 A 与 B 的交，記作 $A \cap B$；推广这意义就可定义任意有限个集合的交．設以 $\{A\}$ 表示由 S 的子集合組成的任一集合，我們可进一步推广而把同时属于 $\{A\}$ 里每个 A 的所有元素 c 的集合定义为交 $\cap A$．如果 $\{A\}$ 为有限集合，以 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 表示时，則交可記为 $\bigcap_1^n A_i$，或 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$．

类似的說明可施于 S 的子集合的邏輯和．由若干子集合 A 組成的集合 $\{A\}$ 的邏輯和或併集是元素 u 的集合，这里 u 至少属于 $\{A\}$ 的某一个 A 里．这集合記作 $\cup A$．如果 $\{A\}$ 为有限集合，則这集合記作 $\bigcup_1^n A_i$，或 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$．

由 S 的所有子集合构成的集合記作 $P(S)$．为着免除例外情形的考虑，有必要把全集合 S 及空集合也作为 $P(S)$ 的成分．空集合可看作零元素，附加于"实有的"子集合所构成的集合里，并記作 ϕ．設 A 与 B 不相交，亦即沒有公共元素时，可用方程 $A \cap B = \phi$ 来表达，这就显出导入空集合的好处．設 S 是 n 个元素的有限集合，則 $P(S)$ 的元素是：空集合 ϕ，各含一个元素的 n 个集合，$\cdots$，各含有 i 个元素的 $\binom{n}{i} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}$ 个集合等等．故 $P(S)$ 里元素的总数是

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. 积集合，映照　設 S 与 T 是任意集合，則积集合 $S \times T$ 是 (s, t) 的集合，这里 $s \in S$，$t \in T$．S 与 T 无須为不同的集合．积集合 $S \times T$ 里的元素 (s, t) 与 (s', t') 作为相等，必須而且只須 $s =$

s', $t=t'$. 設 S 含有 m 个元素 $s_1, s_2, \cdots, s_m$, 而 T 含有 n 个元素 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 則 $S \times T$ 含有 mn 个元素 (s_i, t_j). 一般說来, 設 $S_1, S_2, \cdots, S_r$ 为任意集合, 則 ΠS_i 或 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ 是 r-維組 $(s_1, s_2, \cdots, s_r)$ 的集合, 这里第 i 个支量 s_i 属于 S_i.

集合 S 到集合 T 内的(单值)映照 α 是把每个 $s \in S$ 与一个 $t \in T$ 联系起来的一个对应. s 在 T 里的象, 初等数学上常記做 $\alpha(s)$; 但我們将发現以 $s\alpha$ 或 s^α 来表示更为方便. 有了映照 α, 就可得出由 $(s, s\alpha)$ 构成的 $S \times T$ 的子集合, 叫做 α 的图示. 它的特性是:

1. 設 s 是 S 的任一个元素, 則图示里有如 (s, t) 形的一个元素存在.

2. 設 (s, t_1) 与 (s, t_2) 同在图示内, 則 $t_1 = t_2$.

映照 α 能使每个 $t \in T$ 必为某些 $s \in S$ 的象时, 就說 α 是 S 到 T 上的映照. 不論 α 是 S 到 T 内或到 T 上的映照, S 的象集合(即象元素的集合)都記做 $S\alpha$ 或 S^α. 設 S 到 T 内的映照 α 使 S 里不同元素的象也不相同, 亦即只有 $s_1 = s_2$, 才有 $s_1\alpha = s_2\alpha$ 时, 这样的 α 称为 1—1 映照. 今設 α 是 S 到 T 上的 1—1 映照, 如果 t 是 T 的任一个元素, 則在 S 里必有唯一元素 s 使 $s\alpha = t$. 故若把这个元素 s 与 t 联系起来, 即得 T 到 S 内的一个映照, 叫做 α 的逆映照, 記作 α^{-1}. 显然 α^{-1} 是 T 到 S 上的 1—1 映照.

S 到 T 内的两个映照 α 与 β 作为相等的充要条件无疑地是: 对于 S 里所有 s, $s\alpha = s\beta$. 这就是說, $\alpha = \beta$ 的充要条件是: 它們有同一的图示.

設 α 是 S 到 T 内的映照, 而 β 是 T 到第三集合 U 内的映照, 則 S 的元素 s 到 U 内元素 $(s\alpha)\beta$ 的映照叫做 α 与 β 的积, 記作 $\alpha\beta$; 故由定义得 $s(\alpha\beta) = (s\alpha)\beta$.

一个集合到它自身内的映照叫做这集合的变换, 其中含有使 S 里每个元素都不动的恆等映照或恆等变换, 記作 1 (必要时或記作 1_S). 設 α 是 S 的任一个变换, 显然有 $\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$.

設 α 是 S 到 T 上的 1—1 映照, 而 α^{-1} 是它的逆映照, 則 $\alpha\alpha^{-1}=$

1_S，而 $\alpha^{-1}\alpha = 1_T$. 反过来說，設 α 是 S 到 T 內的一个映照，而 β 是 T 到 S 內的一个映照，如果 $\alpha\beta = 1_S$，而 $\beta\alpha = 1_T$，則 α 与 β 都是 1—1 映照，α 必定是 S 到 T 上的映照，β 必定是 T 到 S 上的映照，而且 $\beta = \alpha^{-1}$. 这性質很有用，并且也容易証明的[1].

积集合的概念使我們能够定义二或多变数的函数的概念. 譬如，函数值属于 T 的 S 里两个变数的函数便是 $S \times S$ 到 T 內的一个映照. 更进一步还可考究 $S_1 \times S_2$ 到 T 內的映照. 但特别饒有趣味的却是 $S \times S$ 到 S 內的映照，这映照叫做 S 里的**二元合成**.

3. 等价关系 我們說**关系** R 被确定在集合 S 里的意思是指：对于任意有序二維組 (a, b)，这里 a，b 属于集合 S，我們能够决定 a 是否与 b 有这已知关系. 更明确地說，关系可定义为 $S \times S$ 到由两个元素构成的集合內的映照. 我們可取"是"与"非"两字为这两个元素. 于是，如果 $(a, b) \to$ 是(亦即映照于"是")，就說：a 对于 b 有已知的关系，記作 $a\mathrm{R}b$. 如果 $(a, b) \to$ 非，就說：a 对于 b 无已知的关系，記作 $a\not\mathrm{R}b$.

設关系～(代替 R) 适合下列条件：

1. $a \sim a$ (反身性).
2. $a \sim b$，則 $b \sim a$ (对称性).
3. $a \sim b$，且 $b \sim c$，則 $a \sim c$ (传递性).

这种关系叫做**等价关系**.

設取平面上点的集合为 S，并以点 a 与 b 在同一水平綫上来定义 $a \sim b$，这样便得等价关系的例. 設 $a \in S$，显然元素 $b \sim a$ 的集合 $\bar{a}$ 是过点 a 的水平綫. 这些綫的集合給出把 S 分成不相交的

---

1) 設 $s_1\alpha = s_2\alpha$，因

$$s_1 = s_1 1_S = s_1(\alpha\beta) = (s_1\alpha)\beta = (s_2\alpha)\beta = s_2(\alpha\beta) = s_2 1_S = s_2,$$

故知 α 是 1—1 映照. 同理可証 β 也是 1—1 映照. 次因 $S\alpha \subseteq T$，$T\beta \subseteq S$，故

$$S = S1_S = S(\alpha\beta) = (S\alpha)\beta \subseteq T\beta \subseteq S.$$

由此可見 $S\alpha = T$，$T\beta = S$；亦即 α 是 S 到 T 上的映照，β 是 T 到 S 上的映照. 最后，設 t 为 T 的任一元素，因

$$t\alpha^{-1} = (t\alpha^{-1})1_S = (t\alpha^{-1})(\alpha\beta) = ((t\alpha^{-1})\alpha)\beta = (t(\alpha^{-1}\alpha))\beta = (t1_T)\beta = t\beta,$$

故 $\alpha^{-1} = \beta$——譯者注.

子集合的一个分解. 今将指出这现象标志着等价关系.

命 S 为任一个集合,并命～为 S 里任一个等价关系. 設 $a\in S$; 命 $\bar{a}$ 表示能使 $b\sim a$ 的所有元素 b 的集合. 由 1 知 $a\in\bar{a}$. 設 b_1 与 b_2 都属于 $\bar{a}$, 由 2 及 3 知 $b_1\sim b_2$. 故 $\bar{a}$ 为等价元素的一个集合. 不但如此, $\bar{a}$ 还是这类型的最大集合. 这因为,如果任一个元素 c 与 $\bar{a}$ 里某元素 b 等价时,则 $c\in\bar{a}$. 我們把 $\bar{a}$ 叫做由元素 a 决定的(或含有元素 a 的)等价类. 設 $b\in\bar{a}$, 则 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$; 于是,由 $\bar{b}$ 的最大性得 $\bar{b}=\bar{a}$. 故得重要的結論: 任意两个等价类或者全同, 或者它們的交是空集合. 故不同的等价类的集合給出把 S 分裂为不相交的子集合的一个分解.

反之,假定一个已知的集合 S, 按任一方式被分解为不相交的子集合 $A, B, \cdots$. 如果两个集合 A, B 迭合,就規定 A 的元素 a 与 B 的元素 b 有 $a\sim b$; 按这法则来区别 S 里元素, 则在 S 里便可定义一个等价关系. 显然,这关系具有上列各性質,且由这关系决定的等价类恰是已知的集合 $A, B, \cdots$.

由 S 里一个等价关系决定的等价类的集合 $\bar{S}$ 叫做 S 关于給定关系的商集合. 必須指出, $\bar{S}$ 不是 S 的一个子集合,而是 S 的子集合的集合 $P(S)$ 里一个子集合.

等价关系与映照間有密切联系. 首先,設 S 为一个集合, 而 $\bar{S}$ 是 S 关于一个等价关系的商集合,则得 S 到 $\bar{S}$ 上一个自然映照 ν; 这映照是按从 S 的元素 a 映到由 a 决定的等价类 $\bar{a}$ 来定义的. 显然,它是到 $\bar{S}$ 上的一个映照.

反之, 設已知由一个集合 S 到另一个集合 T 上的任一映照 α, 则可利用 α 来定义一个等价关系; 它的法则是: 如果 $a\alpha=b\alpha$, 则 $a\sim b$. 这样定义显然适合公理 1, 2 及 3. 設 a' 为 T 的元素,而 a 为 S 的元素能使 $a\alpha=a'$ 时, 则等价类 $\bar{a}$ 恰是 S 里能映到 a' 的所有元素的集合. 这集合叫做 a' 的逆象,記作 $\alpha^{-1}(a')$.

今假定～是 S 里任一个等价关系,它的商集合为 $\bar{S}$. 命 α 是 S 到 T 上的一个映照,具有这样的性質:逆象 $\alpha^{-1}(a')$ 是属于 $\bar{S}$ 的一些集合的邏輯和,这就等价于說:属于 $\bar{S}$ 的任一个集合必含于某逆象

$a'\alpha^{-1}$ 里. 所以这只意味着：如果 S 里任意两个元素 a, b 有 $a\sim b$ 时，則 $a\alpha = b\alpha$. 因此，法則 $\bar{a} \to a\alpha$ 显然定义了 $\bar{S}$ 到 T 上的一个映照，叫做由給定的映照 α 导出的 $\bar{S}$ 的映照，記作 $\bar{\alpha}$. 由方程 $\bar{a}\bar{\alpha} = a\alpha$ 可看出：原映照等于自然映照 $a \to \bar{a}$ 与映照 $\bar{\alpha}$ 的积，即 $\alpha = \nu\bar{\alpha}$.

把映照分解为这样因子形式在后面极为重要. 在逆象 $\alpha^{-1}(a')$ 的集合与 $\bar{S}$ 重合时特別有用；这因为，此时映照 $\bar{\alpha}$ 是 1—1 的. 故若 $\bar{a}\bar{\alpha} = \bar{b}\bar{\alpha}$，則 $a\alpha = b\alpha$，而有 $a\sim b$. 因此 $\bar{a} = \bar{b}$. 故得因子分解 $\alpha = \nu\bar{\alpha}$，这里 $\bar{\alpha}$ 是 $\bar{S}$ 到 T 上的 1—1 映照，而 ν 是自然映照.

为解释上面的討論，試研究平面 S 到 x–軸 T 上的正射影 π_x. 此时点 a 映到 x–軸上过 a 的垂綫的足. 設 a' 为 x–軸上一点，則 $\pi_x^{-1}(a')$ 为过 a' 的鉛直綫上的点的集合. 逆象的集合即这些鉛直綫的集合，而导出的映照 $\bar{\pi}_x$ 是把鉛直綫映到它与 x–軸的交点. 显然这映照是 1—1 的，且 $\pi_x = \nu\bar{\pi}_x$，这里 ν 是一点映到含有这点的鉛直綫的自然映照.

4. 自然数 自然数 1, 2, 3, ⋯ 成为代数学上基本代数系的理由有二：第一，它作为构成更精緻的代数系的例子的一个出发点. 譬如利用它来造整数系、有理数系、以整数为模的剩余类系等等. 第二，在研究代数系时，自然数集合的函数或映照极为重要. 例如，在定义有結合乘法的代数系里，固定元素 a 的冪 a^n 决定自然数集合的一个函数或映照 $n \to a^n$.

今从关于自然数集合 P 的下列假設（本質上即是皮阿罗 (Peano) 公理）出发[1].

---

1) 皮阿罗关于自然数的公理如次：

(i) 存在有一个自然数 1.

(ii) 每个自然数 a 有一个后繼元素 a^+. 如果 a^+ 是 a 的后繼元素，則 a 叫做 a^+ 的生成元素.

(iii) 自然数 1 无生成元素.

(iv) 如果 $a^+ = b^+$，則 $a = b$.

(v) 自然数的每个集合，如果它含有 1，并且含有集合內每个元素的后繼元素，則这集合含有一切自然数.

从皮阿罗公理可推出上面 1—4 各公理. 这因为，由 (i) 知：P 不是空集合. 由 (ii) 及 (iv) 知：映照 $a \to a^+$ 是 1—1 的. 由 (iii) 知：后繼元素的映照所得象集合里不

1. P 不是空集合.

2. 有 P 到 P 内的 1—1 映照 $a \to a^+$ 存在（a^+ 是 a 的直接后継元素）.

3. 从后継元素的映照所得象的集合是 P 的眞子集合.

4. 如果 P 的任一个子集合含有非后継元素的元素，并且含有这子集合里每个元素的后継元素，則它必与 P 重合. 这假設叫做归納法公理.

关于 P 要叙述的所有性質都是这些公理的推論. 由 3 及 4 知，如果 P 的任意两个元素都为非后継元素，則必相等. 这唯一的非后継元素通例記作 1. 我們还命 $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, 等等.

性質 4 是使用归納法第一原理来証題的理論根据. 这原理是：設对于每个自然数 n 附带有命題 $E(n)$. 如果 $E(1)$ 是眞的，并設凡 $E(r)$ 是眞时 $E(r^+)$ 也是眞. 則 $E(n)$ 对于所有 n 都是眞. 这因为，如果以 S 表能使 $E(s)$ 为眞的自然数 s 的集合，則这个集合含有 1，而且 $r \in S$ 时，r^+ 也必属于 S. 故由 4 直接得出 $S = P$；就是說，$E(n)$ 对于 P 里所有 n 都是眞.

习　題　1

1. 求証：对于各个 n 都有 $n^+ \neq n$.

自然数的加法定义为 P 里一种二元合成，它使得关于 x, y 的值 $x + y$ 适合

(a) $$1 + y = y^+,$$

(b) $$x^+ + y = (x + y)^+.$$

含有 1，故为 P 的眞子集合. 由 (iii) 及 (v) 得归納法公理. 反过来，由 1—4 各公理也可推出皮阿罗的公理. 令 P' 为 P 里各元素的后継元素构成的集合. 如果 P 里每个元素总是某个元素的后継元素，則 $P \subseteq P'$；但由 3，这与 $P' \subset P$ 矛盾. 故 P 里含有非后継元素的元素. 令 e 为这样一个元素，則 $e \in P$, $e \notin P'$. 作子集合 $P_1 = \{e, P'\}$. 因 $e \in P_1$，而且 $e^+ \in P'$，又 P' 里每个元素的后継元素也属于 P'；故由 4 知：$P' = P$. 命 e 为 1，这就导出 (i) 及 (iii). 由 2 得 (ii) 及 (iv). 由 4 得出 (v). 故这两組公理是等价的——譯者注.

这样函数不但存在，且为唯一，是可以証明的[1]. 此外，还有下列的基本性质[2]：

---

1) 先证关于給定的 y 与关于每个 x，存在有一个函数 $x+y$，具有性质 (a) 及 (b) 令 P_2 是所有这样 y 的集合，对于它們，这种函数是存在的．于是：

① 当 $y=1$ 时，对于任意的 x，令 $x+y=x^+$．则因为

$$1+y=1^+=y^+,\qquad x^++y=(x^+)^+=(x+y)^+,$$

显見这个函数具有所需的性质，故 $1\in P_2$.

② 如果 $y\in P_2$，则 $x+y$ 被确定，而且具有性质 (a) 及 (b)．关于 x，令 $x+y^+=(x+y)^+$，则因为

$$1+y^+=(1+y)^+=(y^+)^+,$$

$$x^++y^+=(x^++y)^+=[(x+y)^+]^+=(x+y^+)^+,$$

显見这个函数关于 y^+ 也具有所需的性质，故 $y^+\in P_2$.

按归納法公理知 $P_2=P$，即关于任何 y 存在着一个函数，使关于每个 x 的函数值是 $x+y$，而且这个函数关于給定的 y 与任意的 x 具有性质 (a) 及 (b)．但 y 是任意的，所以这种函数的存在就被証明了.

今証关于給定的 y 与关于每个 x 所存在具有性质 (a) 及 (b) 的函数不能多于一个.

由上段論証知，函数 $x+y$ 对于任何 x 适合

$$1+y=y^+,\qquad x^++y=(x+y)^+,$$

今設函数 $x\oplus y$ 关于任何 x 也具有

$$1\oplus y=y^+,\qquad x^+\oplus y=(x\oplus y)^+.$$

令 P_1 是关于給定的 y 能使 $x+y=x\oplus y$ 的所有 x 的集合．于是：

①因为 $1+y=y^+=1\oplus y$，故 $1\in P_1$.

② 設 $x\in P_1$，则 $x+y=x\oplus y$．由皮阿罗公理(ii) 得 $(x+y)^+=(x\oplus y)^+$．所以，

$$x^++y=(x+y)^+=(x\oplus y)^+=x^+\oplus y.$$

故 $x^+\in P_1$．由归納法公理知，$P_1=P$；即对于給定的 y 与任何 x 都有 $x+y=x\oplus y$．但 y 是任意的，故对于任意的 x 及 y，函数的唯一性就被証明了——譯者注.

2) 要証 A_1，設 y 与 z 固定，而令适合 A_1 的所有 x 的集合为 P_1．因

$$1+(y+z)=(y+z)^+=y^++z=(1+y)+z,$$

故 $1\in P_1$．次設 $x\in P_1$，则 $x+(y+z)=(x+y)+z$；于是，

$$\begin{aligned}x^++(y+z)&=(x+(y+z))^+\\&=((x+y)+z)^+=(x+y)^++z=(x^++y)+z,\end{aligned}$$

故在 $x\in P_1$ 时，$x^+\in P_1$．由归納法公理知 $P_1=P$.

要証 A_2，先証 $1+y=y+1$．令适合这等式的所有 y 的集合为 P_2，显然 $1\in P_2$．次設 $y\in P_2$，则 $1+y=y+1$．于是，由 A_1 得

$$1+y^+=1+(1+y)=1+(y+1)=(1+y)+1=y^++1,$$

故 $y^+\in P_2$．由公理 4 知，$P_2=P$.

次令适合 A_2 的所有 x 的集合为 P_1．由上面証明知，$1\in P_1$．今設 $x\in P_1$，则 $x+y=y+x$．于是，由 A_1 得

$$x^++y=(x+y)^+=(y+x)^+=y^++x$$

A_1　$x+(y+z)=(x+y)+z$（加法結合律），

A_2　$x+y=y+x$（加法交換律），

A_3　$x+z=y+z$ 可推得 $x=y$（加法相消律）．

这些結果以及下列关于乘法与次序的結果的証明具載于上述教本中，故从略．

P 里乘法也是一种二元合成，适合

(a)　$$1y=y,$$

(b)　$$x^+y=xy+y.$$

这样合成是存在的，也是唯一的[1]，并具有通常性质[2]：

$$=(1+y)+x=(y+1)+x=y+(1+x)=y+x^+,$$

故 $x^+\in P_1$．由公理4知，$P_1=P$．

要証 A_3，設适合 A_3 的所有 z 的集合为 P_3．因为如果 $x+1=y+1$，則

$$x^+=1+x=x+1=y+1=1+y=y^+,$$

故由皮阿罗公理（iv）知，$x=y$．所以 $1\in P_3$．次設 $z\in P_3$，則 $x+z=y+z$ 时，$x=y$．于是，当 $x+z^+=y+z^+$ 时，

$$x^++z=(x+z)^+=(z+x)^+=z^++x$$
$$=x+z^+=y+z^+=z^++y=(z+y)^+=(y+z)^+=y^++z,$$

故由归納法假設知，$x^+=y^+$，由皮阿罗公理（iv）知，$x=y$，于是，$z^+\in P_3$；故 $P_3=P$——譯者注．

1）先証关于給定的 y 与关于每个 x，存在有一个函数 $x\cdot y$，具有性质 (a) 及 (b)．令 P_2 是所有这样 y 的集合，对于它們，这种函数是存在的．于是：

① 当 $y=1$ 时，对于任意的 x，令 $x\cdot y=x$，則因为

$$1\cdot y=1=y,\qquad x^+\cdot y=x^+=x+y=x\cdot y+y,$$

显見这个函数具有所需的性质，故 $1\in P_2$．

② 如果 $y\in P_2$，則 $x\cdot y$ 被确定，而且具有性质 (a) 及 (b)．关于 x，令 $x\cdot y^+=xy+x$，則由 A_1 及 A_2 得：

$$1\cdot y^+=1\cdot y+1=y+1=y^+,$$
$$x^+\cdot y^+=x^+\cdot y+x^+=(x\cdot y+y)+x^+=x\cdot y+(y+x^+)$$
$$=x\cdot y+(y+x)^+=x\cdot y+(x+y)^+=x\cdot y+(x+y^+)$$
$$=(x\cdot y+x)+y^+=x\cdot y^++y^+,$$

显見这个函数关于 y^+ 也具有所需的性质，故 $y^+\in P_2$．

按归納法公理知 $P_2=P$；即关于任何 y 存在着一个函数，使关于每个 x 的函数值是 $x\cdot y$，而且这个函数关于給定的 y 与任意的 x 具有性质 (a) 及 (b)．但 y 是任意的，所以这种函数的存在就被証明了．

今証关于給定的 y 与关于每个 x 所存在具有性质 (a) 及 (b) 的函数不能多于一个．

由上段論証知，函数 $x\cdot y$ 对于任何 x 适合

$$1\cdot y=y,\qquad x^+\cdot y=x\cdot y+y.$$

（續下頁）