实用有限单元分析导论

Y. K. Cheung M. F. Yeo 著

谢秀松 王贻荪 李兰芬 译

王 磊 李朝庆 校

人 民 交 通 出 版 社

实用有限单元分析导论

Y.K.Cheung　M.F.Yeo　著

谢秀松 王贻荪 李兰芬　译

王　磊 李朝庆　校

人　民　交　通　出　版　社

实用有限单元分析导论

Y. K. Cheung and M. F. Yeo

A Practical Introduction to Finite Element Analysis

Pitman Publishing Limited 1979

本书根据Pitman出版有限公司1979年英文版本译出

谢秀松　王贻荪　李兰芬　译

王　磊　李朝庆　校

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本：850×1168 1/32　印张：7　字数：180千

1982年4月　第1版

1982年4月　第1版　第1次印刷

印数：0001—4,500册　定价：1.35元

内 容 简 介

随着电子计算机的发展，有限单元法已成为固体力学分析的强有力的工具，并已逐步渗透到其他更广泛的科学领域中。

本书除去介绍有限单元基础知识外，着重介绍了有限单元法应用的各种实践经验，例如如何选择恰当的位移函数，简化计算刚度矩阵的新进技巧，数值积分方案，求解联立方程的有效方法以及网格自动生成最新成就；通过若干实例的解算，介绍了各阶段的计算机程序，并详加评述。因此，本书是一本很有价值的参考书。

本书可作为高年级大学生、研究生教学用书。亦可供从事设计、科研工作的工程师、技术员使用。

校译者序言

本书是一本大学高年级学生教科书，在国外已使用了多年。

本书内容丰富，除包括许多基础知识（例如：虚功原理、等参数单元、推导有限单元的刚度矩阵以及总刚度矩阵的形成）外，着重介绍了现代先进的计算方法，即波前法、等参数单元数值积分、求解线性方程组的各种方法，以及程序设计和实践经验，并附有计算机程序一览表及其运用。最后详细叙述了有限单元网格自动生成。因此，我们认为本书是一本比较新颖的国外教科书，可作为国内有关理工科院校教学用书，或者教学参考书。

在此，需要说明一下，本书所介绍的电算程序，并不需要大容量的电子计算机，各院校根据现有的电子计算情况，可从中自选一些基本程序，以便于在校学生实践。在我国，一般计算站使用本书中所编制的程序及网格生成不会有什么困难。

本书读者面甚广，除作为大学高年级学生及研究生教科书外，亦可供有关科研、设计单位的工程师、技术人员使用参考。本书所叙述内容虽然比较新颖，但是读者只需要具备矩阵代数和Fortran语言程序知识就能够阅读。

本书著者张佑启教授是加拿大籍华人，获得博士学位，现任香港大学工学院院长、教授，并被聘请为我国华南工学院名誉教授。他的著作《结构分析的有限条法》已翻译成几国文字出版，中译本已于1980年9月由人民交通出版社出版发行。他曾多次回国讲学，对于有限条分析法的推广和应用起了重要作用。

本书第一、四章由谢秀松译；第三、五章由王贻荪译；第二、六章由李兰芬译；程序方面的译文由李朝庆作了全面校对；全书最后由王磊副教授审校。何福照教授通看了全部译稿。

由于译校者水平有限，译文中难免有错误缺点，热诚欢迎广大读者批评指正。

校译者 1980.12

序　言

在本书中，作者试图对有限单元法作一介绍，此法已成为工程师们最有效的，多用途的工具。和许多相当详细地讨论关于有限单元法的理论发展及应用的其它教科书不同，本书着重于这种方法的各种实践经验方面，例如（i）详细论述用于位移函数的选择，刚度公式化，数值积分，集合，求解以及网格生成的各种技巧；（ii）详细说明解题的各个推导阶段的计算机程序，并对几乎所有的程序加以评述；（iii）通过对程序执行各阶段的中间输出和最后输出的不同情况的研究，使读者能看到在每一阶段发生了些什么。本书供高年级学生，研究生以及从事实际工作的工程师使用。书中所涉及的内容大都是自成系统的，而只要求读者具有一些基本的矩阵代数和Fortran程序知识。为使书的篇幅控制在一适当的范围内，本书仅讨论平面应力问题，显然，基本的数值方法和程序编制技巧同样可应用于三维弹性力学问题，理想流体力学问题以及其它问题。

第一章研究有限单元法理论，而且主要致力于探讨选择位移函数的问题。第二章推导一个平面应力三角形单元，并逐步地描述了一个简单而可行的计算机程序。第三章介绍公式化单元的等参数概念，并讨论了数值积分方案和用来简化计算单元刚度矩阵工作量的各种技巧。第四章较详细地介绍了波前法，可以认为，此法即使不是最有效的唯一求解方案的话，也是最有效的求解方案之一；本章还通过一简单例题来表明全部计算步骤，以帮助读者了解其计算过程。第五章对前面的计算机程序给出了完整的一览表，并对一示范性例题给出了实例输入和输出。最后，在第六章介绍了两种简单的网格生成技巧，一并列出其相应的程序。

Y.K.Cheung

M.F.Yeo

目　录

第一章　有限单元法

1.1 引　　言

众所周知，现时有限单元法已成为结构分析的一种最有效的工具，并可广泛应用于各领域的问题中，有限单元法最初是作为刚度法或位移法的一种推广，其中，假设构架结构是由若干一维单元如杆单元（轴向作用力），梁单元（弯曲作用力）和框架单元（轴向，弯曲和扭转作用力）所组成。

在构架结构的刚度法中，实际结构的诸单元在各离散的节点处联结，在各节点建立外荷载和构件端部力的平衡方程，以便求出节点位移。每个构件的端部力和端位移间的关系可用刚度矩阵表示。并可借各种能量定理，例如虚功原理或最小总势能原理直接推导出来。

在固体力学中，存在二维和三维单元这样类似的情况，其几何形状如三角形，四边形以及六面体单元等，可在某些人为的节点处相联结，节点位移和等效节点力之间的刚度关系可用同样的方法来推导。按此方法，具有无限自由度的连续体可离散成为具有有限自由度的等效系统。

近几年，有限单元法已广泛应用于非结构问题，而其关系式的建立，当前主要是以变分原理或加权残数法为基础。其详细论述见Zienkiewicz的著作〔1〕。

本书自始至终将用能量原理来推导刚度矩阵和荷载矩阵。为使叙述尽可能简单，后面所介绍的各种单元和例题都限于二维弹性体领域。然而本书所讨论的内容也可直接应用于三维弹性问题，甚至用于流体力学问题中。

1.2 虚 功 原 理

此原理涉及到性质不同的、相互独立的两组量，其一，是一组平衡的力系（分别用P和σ代表外力和内应力），其次，是一组几何协调变形（分别用Δ和ε代表位移和应变）。原理指出：对于任一平衡的系统，外虚功必须等于内虚功，即

平衡系统

$$\sum P \cdot \Delta = \int_V \sigma \cdot \varepsilon \, dv \qquad (1.1)$$

几何协调变形

注意，实际上，这两组量之一总是和要求某种解的真实或实际结构有关联，而另一组是假想的或虚的量。因此，以下两种形式可供选择：

（i）虚力原理：将一组真实的位移和应变与另一组虚力和虚应力耦合。应用式（1.1），得到

$$\Sigma（虚外力）\cdot（实际位移）$$

$$= \int_V （虚应力）\cdot（实际应变）dv \qquad (1.2)$$

（ii）虚位移原理：将一组真实的力和应力与另一组虚位移和虚应变耦合。再应用方程（1.1）则有

$$\Sigma（真实外力）\cdot（虚位移）$$

$$= \int_V （真实应力）\cdot（虚应变）dv \qquad (1.3)$$

式（1.2）用来计算位移并导致单位荷载定理，而式（1.3）用来计算外力并导致单位位移定理。

1.3 最小总势能原理

系统的总势能定义为

$$\phi = U + W \qquad (1.4)$$

其中W是外力在变形形状中的总势能，定义为

$$W=-\sum P\cdot\Delta \tag{1.5}$$

U是变形结构的应变能，给作

$$U=\int_{V}\left(\int\sigma d\varepsilon\right)dv \tag{1.6}$$

现若将变形系统取作真实的或实际的系统，而将一组微小的几何协调位移$\delta\Delta$取作虚的，则借助于式（1.3），便可建立

$$\sum P\cdot\delta\Delta=\int_{V}(\sigma\cdot\delta\varepsilon)dv \tag{1.7}$$

然而，由于对实际系统加入了一虚位移，则实际系统的总势能也会发生如下的变化

$$\begin{aligned}\delta\phi&=\delta U+\delta W\\&=\int_{V}(\sigma\cdot\delta\varepsilon)dv-\sum P\cdot\delta\Delta\end{aligned} \tag{1.8}$$

比较式（1.7）和式（1.8），可得到

$$\delta\phi=0 \tag{1.9}$$

换言之，平衡系统的总势能是固定的，因为能进一步证明稳定结构的能量永远是一极小值，此结论称为固定总势能原理，或常称之为最小总势能原理。此原理还可用另一种方式表述成为‘凡满足给定边界条件的一切协调位移中，同时满足平衡条件的位移使总势能呈一固定值’。对于一个线弹性问题来说，同时满足平衡条件和协调条件的解当然是恰当的解。然而，即使有可能的话，在多数情况下，求得这种解也很困难，而研究者们不得不借助于近似法，即假定若干含有待定参数的协调位移，在满足系统总势能是极小值的条件下来求出这些参数值。

由此可见，若试行采用含有待定参数Δ_i的一组位移函数来近似表示系统的真实位移，则通过使总势能为极小值，运用

$$\frac{\partial\phi}{\partial\Delta_i}=0 \tag{1.10}$$

便可求出这些Δ_i。式（1.10）已广泛用来导出有限单元刚度矩阵。

1.4　杆的刚度矩阵

杆件主要用于桁架中，按定义，假设杆中只受轴向力。其刚度系数可直接由虎克定律推出，参照图1.1(a)可见，若将2端固定，允许1端运动，则

$$P_{x1}=\frac{EA}{l}u_1$$

$$P_{x2}=-\frac{EA}{l}u_1 \qquad (1.11)$$

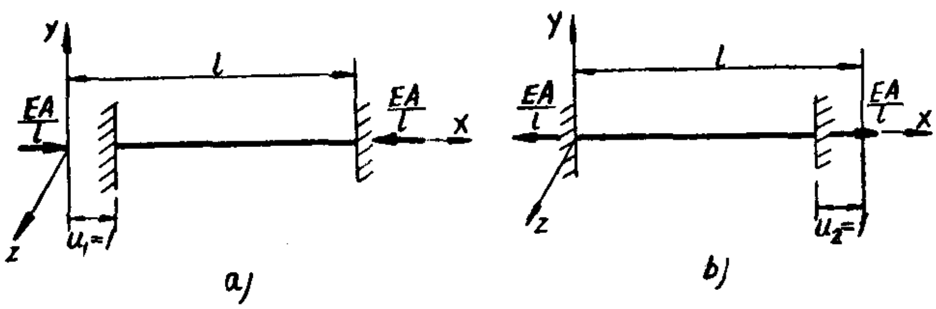


图1.1　杆

同理，若将1端固定，允许2端运动，根据图1.1(b)则有

$$P_{x1}=-\frac{EA}{l}u_2$$

$$P_{x2}=\frac{EA}{l}u_2 \qquad (1.12)$$

合并式（1.11）和式（1.12），便可得到完整的刚度关系式，其形式为

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \end{Bmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (1.13)$$

1.5　梁的刚度矩阵

只考虑弯曲作用的梁，其刚度关系式正好是众所周知的角

变-位移方程的简单推广，其形式为

$$M_1=(6EI/l^2)v_1+(4EI/l)\theta_1-(6EI/l^2)v_2+(2EI/l)\theta_2$$
$$M_2=(6EI/l^2)v_1+(2EI/l)\theta_1-(6EI/l^2)v_2+(4EI/l)\theta_2 \tag{1.14(a)}$$

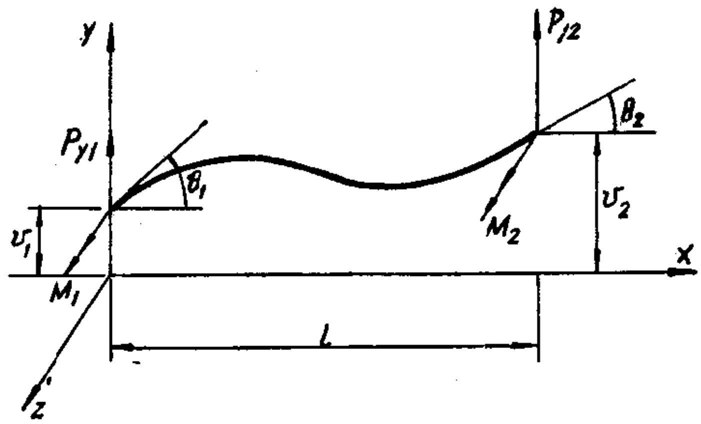


图1.2 梁

端剪力P_{y1}和P_{y2}（图1.2），其值相等但方向相反，它们构成一力偶，其值等于端弯矩之和。因而，根据式（1.14(a)），端剪力是

$$\begin{aligned}P_{y1}=-P_{y2}&=(M_1+M_2)/l\\&=(12EI/l^3)v_1+(6EI/l^2)\theta_1\\&\quad-(12EI/l^3)v_2+(6EI/l^2)\theta_2\end{aligned} \tag{1.14(b)}$$

将式（1.14）写成矩阵形式，梁的刚度关系式成为：

$$\begin{Bmatrix}P_{y1}\\M_1\\P_{y2}\\M_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2\\6EI/l^2 & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l\\-12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2\\6EI/l^2 & 2EI/l & -6EI/l^2 & 4EI/l\end{pmatrix}\times\begin{Bmatrix}v_1\\\theta_1\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

注意，此处以及本书其它部分均采用右手坐标系。

1.6 有限单元法

在我们作任何进一步的详细推导之前，指出存在着三种普通常用的单元也许是值得的。在有限单元法中绝大多数是位移单元法，此种单元是假设位移模式，而平衡单元法〔2〕（以假设应力模式为基础）和混合单元法〔3〕（同时假设位移和应力）的应用范围则少得多。本书只讨论位移单元法，由于对整个单元所假设的位移模式是用所谓的位移函数来描述，因而读者稍后将会看到，我们的主要注意力是用于恰当选择各种有限单元的位移函数。

如前所述，有限单元法最初是作为结构力学中刚度法的一种推广，并应用于二维和三维问题。然而，与构架结构不同，此时物体没有明显的联结点，在该处建立力的平衡关系。因而，可将连续体离散化为许多任意形状的单元，从而建立许多人为的联结点或节点。用此方法，连续体便可用具有有限个自由度的系统来近似表示，并能求得其数值解。下面对有限元法作详细地说明。

（i）用直线或曲线将连续体划分成为二维的有限单元，或用平面或曲面将连续体划分成为三维的有限单元。

由于每个单元可以具有其自身的形状，尺寸，材料性质和厚度，可想而知，此法能极好地适用于各种问题，包括非均质材料问题，不规则的几何形状问题，复杂支承条件问题以及各种类型的荷载组合问题。

在多数情况下，对一个问题只采用一种形式的单元，但是也可以混合不同类型的单元，例如，由于实际的需要将梁单元与板单元联合使用，在包含应力集中的问题中要将高阶单元与低阶单元联合使用。

（ii）假设单元相互被联结在许多离散的节点上，这些节点位于单元的角上或单元边界上，虽然偶而也可出现一些不与

任何其他单元相联结的内节点（图1.3(a)）。自由度为节点位移

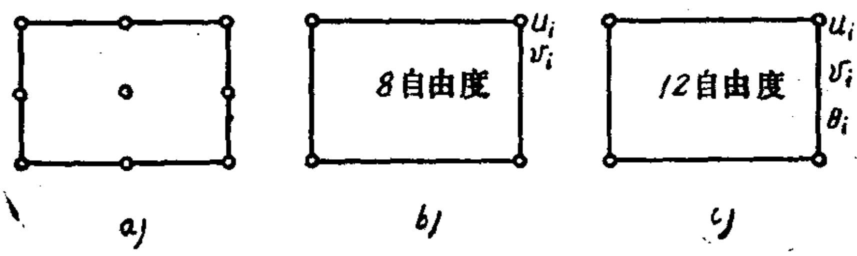


图1.3 矩形平面应力单元

参数（在每个单元内，节点与节点的自由度可以不同），通常指的是节点位移及其一阶偏导数（转角），但往往还可包含其它项，如应力，应变以及二阶或者更高阶的偏导数。以图1.3（b）的矩形平面应力单元（双直线单元）为例，它具有8个自由度，代表了4个角节点沿x和y方向的移动u和v，而图1.3（c）的高阶平面应力单元（梁型单元）具有4个附加的节点转动自由度。

（iii）我们选择关于坐标变量x、y和节点位移参数（即图1.3中的u_i，v_i）的位移函数来描述每个单元内的位移变化，应用前面已讨论过的虚功原理或最小总势能原理，可以导出联系节点'力'和节点'位移'的刚度矩阵。这种位移函数应当力求近似表达整个单元的实际位移场。

1.7 位移函数

从上述讨论显然可见，恰当地选择位移函数是整个方法的最重要部分。一个好的位移函数将导致一个高精度单元，并具备收敛的特性，反之，不恰当地选择位移函数，便会产生粗劣的或不收敛的结果，有时甚至更糟，导致一个错误的答案。后一种现象已为Clough〔4〕注意到并已作了论述，幸亏这不是一个普遍的现象。

位移函数可选择象（i）那样的一个含有待定系数的简单多项式，这些待定系数继而变换成为相应的节点位移参数。或选用

象（ii）根据形函数直接给出，形函数通常是一个密切多项式〔5〕，在单元的所有其它节点上，其值为零，而在所考虑的节点上，位移或其偏导数为1。实际上，当特定节点的位移参数为1，而所有其它节点位移参数为零时，与节点位移参数有关的形函数便给出了整个单元的位移场。形函数的若干实例在图1.4中给出。因而位移函数或者按上述（i）写作

$$f = A_1 + A_2x + A_3y + \cdots \tag{1.16(a)}$$

其中A_1，A_2等等是待定的多项式常数，或者按（ii）写作

$$f = N_1(x,y)f_1 + N_2(x,y)f_2 + \cdots \tag{1.16(b)}$$

其中f_1，f_2等等是节点位移参数，N_1，N_2等等相当于形函数。

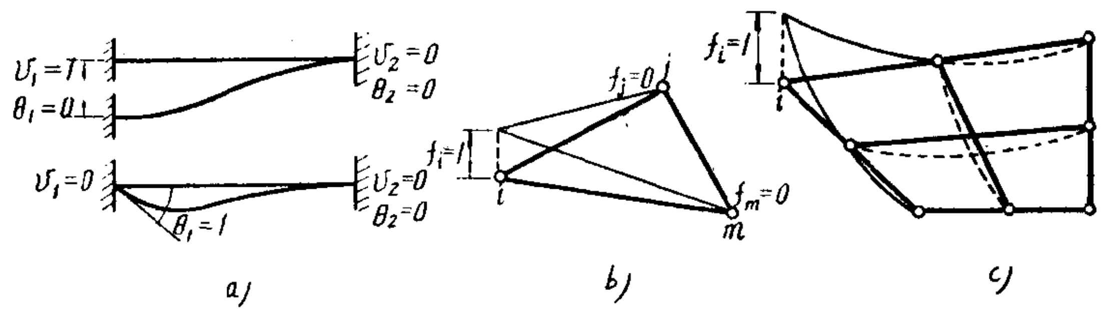


图 1.4　形函数实例

(a)梁单元；(b)三角形单元；(c)二次等参数单元

当前，在建立位移函数时，熟悉下列有益的概念，很有用处。

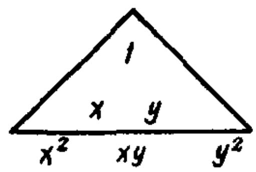
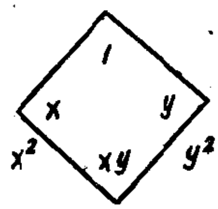
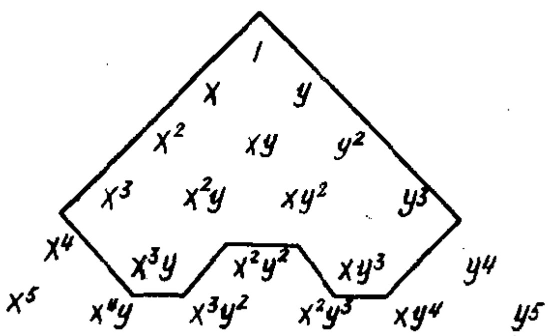
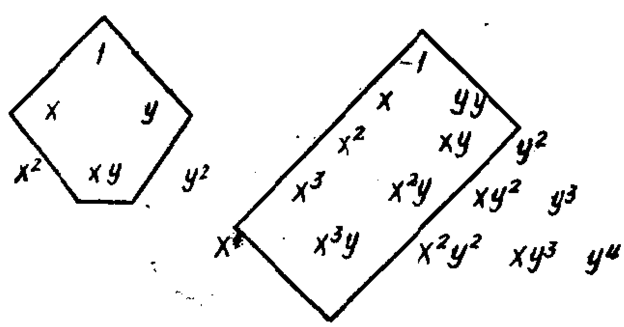
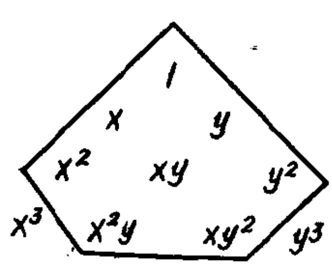
1.7.1　帕斯卡三角形(Pascal triangle)

二维单元的位移函数按简单多项式给出，帕斯卡三角形对于确定组合多项式所必须采用的项数（图1.5）是有用的工具。此处所用的专门名词与数学中所用的二项式定理的系数是不尽相同的。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & x & & y & & & & \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 & & & \\
 & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & & \\
 & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 & \\
x^5 & & - & & - & & - & & - & & y^5
\end{array}$$

图1.5　帕斯卡三角形

表1.1　典型的有限单元的自由度(DOF)及位移函数

单元型式	帕斯卡三角形	附注
常应变三角形 u—3DOF v—3DOF		u 和 v 线性变化
平面应力矩形 u—4DOF v—4DOF		u和v沿所要求的单元边界呈线性变化。xy 是相应的第四项，因为它只沿边界退化到x 或者到y。
受弯曲矩形 w—12DOF		沿所要求的单元边界呈三次方变化。x^3y 和xy^3 只沿边界退化为x和y的三次函数。
矩形梁型平面应力单元 u—4DOF v—8DOF		u 沿边界呈线性变化。v 在y 方向为线性变化，在x 方向为三次方变化，以便正确地模拟梁的特性。
有角节点和边中点节点的矩形平面应力单元 u—8DOF v—8DOF		沿边界u和v呈抛物线变化。不包括x^3和y^3。