线性代数

解题中的错误分析

线性代数解题中的错误分析

杜智敏
郭宜斌 编著

教育科学出版社

线性代数解题中的错误分析

杜智敏
郭宜斌 编著

教育科学出版社出版
（北京·北太平庄·北三环中路46号）
新华书店北京发行所发行
燕华印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米 1/32 印张：11.125 字数：249.000
1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷
印数：00,001—5,000册

ISBN 7-5041-0462-0/G·425 定价：4.70元

前　言

1983年初，我们根据线性代数课教学实践中积累的资料，编写了《线性代数教学参考资料——错在哪里？》。现在，这本线性代数课外参考书《线性代数解题中的错误分析》就是在它的基础上，经过了不同类型教学班（60学时、40学时的本科班以及大专班）的试用，进一步修改而成的。

本书各章皆由三部分组成。“概要”主要是指出学习每一章时应达到的要求，学习中可能对哪些概念和方法产生错误的理解，以及应该注意什么问题；“错在哪里”是从学生作业中收集并加以挑选的有共性或典型的错例，对产生错误的原因进行分析，并对每题给出尽可能多的解法。“习题选解”中选入了另一些题目及解答，以便弥补在课堂上例题较少的不足。

编写本书的目的是：

1. 给工科学生提供一本有益于巩固知识、提高能力的课外参考书。学习的实践告诉我们，发现别人解题中的错误要比自己解题更难。瑞典学者C. G. 荣格指出：“知识不仅出自真理，而且取自谬误”。我们希望学生能够利用本书中的各种各样的错误解法——往往是学生自己所犯的错误——认识产生错误的原因，从中吸取有益的教训；也希望利用各个题目的多种解题思路与方法，从中得到有益的启示。通过正反二方面的学习，加深对所学基本概念、基本理论和

方法的理解及掌握，同时培养与提高逻辑思维能力、判断能力、表达能力，发展学生的发散型思维，养成严谨的学风，以利于创造能力的培养。

2. 为广大自学线性代数的朋友提供一本学习参考书。除帮助读者加深对所学知识的理解与掌握外，还提供了一位批改作业的“老师”。经过试用证实，本书基本上把许多容易发生的具有共性的错误收集进来了。这样，通过阅读本书，对照自己的解答，便可检查自己的学习情况。

3. 为初次担任线性代数课教学的教师提供一本教学参考书。使之了解学生易在哪些方面出现错误，在教学中更有针对性。同时，还可以组织课堂讨论，引导学生对错误解答进行分析，因而本书也为改革教学方法、实行启发式教学提供了一定的素材。

在我们编写线性代数教学参考资料的过程中，得到了北京航空学院数学教研室的领导和同事们的支持与帮助，教育科学出版社的有关同志为本书出版付出了艰辛的劳动，在此一并表示感谢。

限于作者的水平与经验，书中定有不少缺点错误，诚恳希望读者批评指正。

作　者

1985年9月

目　　录

符号说明

解1——第一种错误解法；

证1——第一种错误证法。

〔解法1〕——第一种参考解法；

〔证明1〕——第一种参考证法。

第一章　n 阶 行 列 式

（一）概　　要

行列式最早产生于线性方程组的求解问题，然而它的应用却不仅于此，坐标变换、多重积分中变量置换、解行星运动的微分方程组、将三个或多个变量的二次型化为标准形及实二次型正定、负定的判定等等，都会引起行列式的新的应用。因此，行列式是数学中基本的、常见的有力工具之一，也是线性代数的基本内容之一。

行列式部分的主要内容是定义、性质、按行（列）的展开式（更一般地为*Laplace*展开定理）以及*Cramer*法则，其重点是n阶行列式的计算。

在学习过程中要注意培养自己的抽象能力，过好学习线性代数的第一关——“n”字关，同时要提高逻辑推理能力，对有关定理证明的思想方法要熟悉，为以后的学习奠定好基础。

在计算行列式或证明行列式恒等式的过程中应注意以下几点：

（1）在运用行列式的性质时：

“行列式的某行中各元素同乘以一数后，加到另一行的各对应元素上，行列式的值不变。”在使用中切勿变成“行列式的某行中各元素同乘以一数后，将另一行中对应元素加

到该行上，那么行列式的值不变。”

对于以字母为元素的行列式，在运用上述性质时，要注意所乘的代数式分母不能为零。

每应用一次性质都要在完成上一步的基础上来做，否则将可能出现“任意行列式均等于零”的错误。例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}\neq 0$$

但如果将第一行减第二行，第二行减第三行，第三行同时减去第一行，便得

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

（2）在对行列式做展开时：

若采用 $D=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$，$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ 计算时对 A_{ik} 的正负号不要忽略。

若采用 *Laplace* 展开定理，除注意正负号问题外，应注意不要丢项：“行列式等于某 k 个行（列）的所有的 k 阶子式与其代数余子式乘积之和”。

（3）关于范德蒙（*Vandermonde*）行列式

首先要正确判定所要计算的行列式本身或通过适当恒等

变形后，是否为范德蒙行列式。其次对于其行列式的值 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ 要搞清每个符号的含义，具体计算时要写出结果。

（4）要根据问题的具体结构，决定应用哪一种数学归纳法。在证明行列式恒等式时，若得递推关系为 $D_n=\alpha D_{n-1}+a_n$ 时（α，a_n 为常量），可用第一数学归纳法；若递推关系为 $D_n=\alpha D_{n-1}+\beta D_{n-2}$ 时（α，β 为常量），就必须用第二数学归纳法（即第二步必须假定 $n\leqslant k-1$ 时成立，再证 $n=k$ 时成立）。

（二）错在哪里

1. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解：将第一行乘以3逐次减去第2，3，…，n行，降阶后再用第一行减去各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 7 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 9-n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$=\begin{vmatrix} 7 & 6 & \cdots & 6 \\ 6 & 6 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 6 & \cdots & 9-n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$=\begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$=-6(n-3)!$$

分析：

这一解法的错误在于对行列式的性质应用得不对。"将第一行乘以3逐次减去第2，…，n行"的实质是"将第2，…，n行均乘以-1，然后再将第一行乘以3逐次加到第2，3，…，n行"，这样所得到的（1）式的右端已经与D_n相差一个符号$(-1)^{n-1}$，从（2）到（3）的运算中犯了同样的错误，于是（2）与（3）之间又相差一个符号$(-1)^{n-2}$，两次错误造成最后的结果不是D_n，而是

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}D_n=-6(n-3)!$$

于是可知，

$$D_n=6(n-3)!$$

参考解法：

〔解法1〕第1，2，…，$n-1$列依次减去第n列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

直接应用n阶行列式的定义，则

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)^{\tau(12n45\cdots n-13)}\cdot(-2)(-1)\cdot 3\cdot 1\cdots(3-n) \\ &=(-1)^{n-3+n-4}\cdot(-1)^{-3}6(n-3)! \\ &=6(n-3)! \end{aligned}$$

解毕

〔解法2〕接解法1中的（1）式，将第3列与第n列对换，再按第3行展开，得

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot(-2)(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(3-n) \\ &=6(n-3)! \end{aligned}$$

解毕

〔解法3〕接解法1的（1）式按第3行展开，得

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 \\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n \end{vmatrix}$$

（2）

再按第 3 列展开，得

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\cdot(-1)^{n-1+3}\cdot(3-n)\cdot(-2)(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$
$$=6(n-3)!$$

解毕

〔解法4〕接解法 3 的（2）式，取前二行，根据 *Laplace* 展开定理

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4\\ 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n\end{vmatrix}$$

$$=6\cdot(-1)^{3+n}\cdot(3-n)\cdot(-1)^{n-3+1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$
$$=6(n-3)!$$

解毕

2．计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & & & 1\\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix}$$

解1：第 n 列乘以 $\left(-\frac{1}{a}\right)$加到第1列上，则得

$$D=\begin{vmatrix} a-\frac{1}{a} & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)a^{n-1}=a^{n}-a^{n-2}$$

解2：按第一行展开，则有

$$D=a^{n}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2} \tag{1}$$

$$=a^{n}+(-1)^{n+1}a^{n-2}$$

分析：

解1的做法中忽略了$a=0$的情况，这种做法只适用于$a\neq0$的情况。

解 2 在按第 1 行展开过程中有错误，即（1）式右端第 2 项应为

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=-a^{n-2}$$

于是$D=a^n-a^{n-2}$.

参考解法：

〔解法1〕将第n行乘以$(-a)$加到第1行上，得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a^2 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1-a^2 \\ a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(1-a^2)\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot a^{n-2}$$

$$=-(1-a^2)a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

解毕

〔解法2〕将第n行依次与上一行对换，经过$n-2$次对换成为第2行，再将第n列依次与前一列对换，经过$n-2$次对换成为第2列，于是选取第1，2行，按*Laplace*定理展开：

$$D=(-1)^{n-2}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\cdot a^{n-2}$$

$$=(a^2-1)a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

解毕

〔解法3〕当 $a=0$ 时，$D=0$。当 $a\neq0$ 时，第1行乘以 $\left(-\dfrac{1}{a}\right)$加到第$n$行上，得

$$D=\begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a-\dfrac{1}{a} \end{vmatrix}=a^{n-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^n-a^{n-2}$$

解毕

〔解法4〕取第2，3，…，$n-1$行，根据 *Laplace* 展开定理，按这$n-2$行展开，于是有

$$D=\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^{n-2}\cdot(a^2-1)=a^n-a^{n-2}$$

解毕

3．计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}\qquad(1)$$

解：将第1，2行均乘以（-1）加到第3行上，并且同时把第1行及第3行乘以（-1）后加到第2行上，于是得

$$D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ -2x & 0 & -2y \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$=0$$

分析：

本解法的错误在于没有在完成上一步的基础上来做下一步，而是全从原来的行列式出发，结果本应将（2）式右端的第3行乘以（-1）加到（1）式右端的第2行上，却仍把（1）式右端的第3行乘（-1）加到第2行上，形成了（2）中的第2行。为了避免这样的错误发生，在计算不是十分熟练的情况下，最好步骤写细一些，每一步都在前一步的基础上完成。

参考解法：

〔解法1〕将第2、3行均加到第1行，然后提取公因子$2(x+y)$，于是得

$$D=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(-x^2+xy-y^2)=-2(x^3+y^3)$$

解毕

〔解法2〕将第1，2行乘以（-1）均加到第3行上，然后按第1列展开：