

微积分 解题方法与技巧

王寿生 李云珠 张肇炽 编

西北工业大学出版社

083550

微积分解题方法与技巧

王寿生 李云珠 张肇炽 编



科工委学院802 2 0029318 0



西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书是以论述和介绍微积分的解题方法与技巧为中心主题的书籍，内容涉及到函数、极限、导数（含偏导数）、积分（含重积分及线、面积分）以及级数、微分方程等有关基本概念、理论和方法。

本书系统总结了微积分解题的数百种方法并列举了大量例题；同时还包含了国内近年来教学研究的成果，并对不少读者颇感困难的应用题和证明题的解法进行了专章讲述。

本书可供大专院校学生、报考研究生的考生、电大生、函授生、自学微积分的读者以及高等学校和中等专业学校教师参考。

微积分解题方法与技巧

王寿生 李云珠 张肇炽 编

责任编辑 刘彦信

*

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路127号）

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092毫米 1/16 14.5625 印张 348 千字

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 0001-7000册

ISBN 7-5612-0028-5/O·1 定价：2.45元

统一书号：13433·071

前 言

正在学习微积分课程的读者，往往希望能有一本满意的参考书，帮助他们在牢固掌握基本知识的基础上，学会并掌握较为系统的解题方法。报考理工科研究生的同志，也总盼望获得一本理想的复习资料，帮助他们巩固所学微积分知识，并进一步提高解题的能力与技巧；从事微积分教学的大、中专教师，也很愿意手头拥有一本篇幅不大而又较为完整的工具书。现在呈献给读者的这本《微积分解题方法与技巧》，正是基于上述愿望和设想进行的一个尝试。

本书包括理工农医师范等各类院校公共基础课——微积分中涉及的函数、极限、导数（包括偏导数）、积分（包括重积分及线、面积分）以及级数、常微分方程等有关基本概念、基本理论和基本方法，内容比较完备。为了做到少而精，本书完全舍弃了微积分教程中常规内容的复习提要 and 大量常见习题，突出了解题方法和技巧这一主题，并以方法为中心系统地进行概括和总结，列举近 500 道典型例题；或者详加剖析，务期透彻了解个中奥妙，达到举一反三；或者画龙点睛，留给读者余地，希冀事半功倍。这些方法和例题，不仅较为全面而丰富，并且往往具有较强的综合性，可以帮助读者较快地提高解题能力和水平；同时还包含了近年来国内的一些教学研究成果，可以有助于读者增长学识，开阔眼界和思路，也可以作为一般教材和读物的一个有益补充。此外，考虑到不少读者常常对各类应用题和证明题的解法感到困难，本书特列专章进行讲述。

本书是在编者多年从事教学工作和为报考研究生的大学生、青年教师以及在职人员进行辅导讲课的基础上编写而成的。初稿首次发表在《数学学习》杂志 1985 年增刊上发表后，得到许多读者和国内同行的较好评价和热情鼓励。1986 年，西北工业大学应用数学系一些同人，曾使用这份初稿作为校内本科生同名选修课程的教材。国内一些院校也把它用作报考研究生的辅导教材。这次，又进行了修改补充，正式奉献给广大读者。如果能对学习微积分的读者、报考研究生的同志和从事有关教学工作的教师有所助益，编者将感到不胜荣幸。

本书共分九章，第一、二、三章、第八章 8.1-8.3 及第九章由王寿生编写；第四、五章及第八章 8.4、8.5 由李云珠编写；第六、七章及第八章 8.6、8.7 由张肇炽编写。

国家教委工科数学课程指导委员会委员、陕西省数学会高等数学委员会主任孙家永教授曾经审阅了本书的初稿，提出过许多宝贵意见；国内一些同行专家也对初稿和它的出版，提出了不少有益建议；西北工业大学有关领导和教务处负责同志，对本书的编写和出版给予了热情鼓励和支持，在此我们一并表示衷心感谢。

由于水平所限，加之时间仓促，错漏谬误定然不少，尚祈读者不吝指正。

编 者

1986 年 12 月

目 录

第一章 关于函数问题的若干方法	1
§ 1.1 函数的四种表示法	1
1.1.1 解析法	1
1.1.2 列表法	1
1.1.3 图示法	1
1.1.4 叙述法	1
§ 1.2 函数定义域的表示法与求法	1
1.2.1 函数定义域的表示法	1
1.2.2 函数定义域的求法	2
§ 1.3 函数值和函数值域的求法	4
1.3.1 函数值	4
1.3.2 函数值域的求法	5
§ 1.4 反函数的图象和求法	6
§ 1.5 函数的作图法	7
1.5.1 平移作图法	7
1.5.2 伸缩作图法	8
1.5.3 图形叠加法	8
1.5.4 绝对值函数作图法	8
1.5.5 分段函数作图法	9
1.5.6 一般复合函数作图法	9
1.5.7 利用 $f(x)$ 的图形作 $f(-x)$ 和 $-f(x)$ 的图形	10
1.5.8 极坐标方程作图法	10
1.5.9 参变量方程作图法	10
1.5.10 隐函数作图法	11
1.5.11 微分作图法	11
§ 1.6 函数简单性质的判别法	12
1.6.1 单调性判别性	12
1.6.2 有界性判别法	13
1.6.3 奇偶性判别法	14
1.6.4 周期性判别法	14
第二章 求极限的方法	16
§ 2.1 利用有关公式求极限	16
§ 2.2 求和式极限的部分分式法	16
§ 2.3 求乘积极限的商式法	16
§ 2.4 单调数列法	17
§ 2.5 利用数列的递推关系求极限	17

§ 2.6	级数法	19
§ 2.7	定积分法	19
§ 2.8	斯笃兹方法	20
§ 2.9	不等式估值法	21
§ 2.10	化简分式或实行有理化的方法	21
§ 2.11	变量代换法	22
§ 2.12	先取对数法	22
§ 2.13	利用函数极限与数列极限的关系求极限	23
§ 2.14	利用基本极限的结果求极限	24
§ 2.15	代替法	24
§ 2.16	洛必达法则	25
§ 2.17	展开法	26
§ 2.18	利用导数的定义求极限	27
§ 2.19	利用微分中值定理求极限	27
§ 2.20	利用积分中值定理求极限	28
§ 2.21	利用黎曼引理求极限	28
§ 2.22	二重极限	29
§ 2.23	二次极限	31
§ 2.24	幂级数的极限	31
§ 2.25	含参变量积分的极限	32

第三章 求导数的方法 33

§ 3.1	复合函数求导法	33
§ 3.2	高阶导数	33
§ 3.3	反函数的导数	34
§ 3.4	隐函数的导数	34
§ 3.5	用参变量表示的函数的导数	35
§ 3.6	对数求导法	35
§ 3.7	根据函数的特性进行化简	36
§ 3.8	利用变量代换进行化简	36
§ 3.9	抽象函数求导法	37
§ 3.10	分段函数求导法	37
§ 3.11	应用泰勒展开式求导数	39
§ 3.12	一阶偏导数的计算	39
3.12.1	用一阶偏导数的定义及一元函数的求导公式	39
3.12.2	复合函数求导法	40
3.12.3	隐函数求导法	41
§ 3.13	高阶偏导数的计算	45
3.13.1	利用高阶偏导数的概念直接计算	45

3.13.2	分段函数在分段点处的高阶偏导数	46
3.13.3	二元函数的 n 阶偏导数	46
3.13.4	复合函数的高阶偏导数	46
3.13.5	隐函数的高阶偏导数	48
§ 3.14	全导数的计算	49
§ 3.15	方向导数的计算	50
第四章	一元函数积分法	51
§ 4.1	不定积分的基本算法	51
4.1.1	分解积分法	51
4.1.2	换元积分法	52
4.1.3	分部积分法	54
4.1.4	有理函数积分法	57
4.1.5	包含二次三项式的最简积分	58
4.1.6	三角有理函数的积分法	59
4.1.7	某些无理函数的积分法	61
4.1.8	一些特殊形式的不定积分问题	63
§ 4.2	定积分的基本算法	64
4.2.1	利用定义计算定积分	64
4.2.2	利用牛顿—莱布尼兹公式	65
4.2.3	定积分的换元积分法	66
4.2.4	定积分的分部积分法	68
4.2.5	利用定积分的性质及一些常用公式计算定积分	69
4.2.6	定积分的近似算法	70
§ 4.3	变上限的定积分	71
§ 4.4	广义积分	73
4.4.1	两种类型广义积分的计算法	73
4.4.2	广义积分的审敛法	75
§ 4.5	若干综合题	76
第五章	多元函数积分法	79
§ 5.1	二重积分的计算法	79
5.1.1	适当选择积分次序	79
5.1.2	适当选择坐标系	80
5.1.3	利用被积函数和积分区域的对称性简化计算	81
5.1.4	注意被积函数在不同分区域中的符号	83
5.1.5	二重积分的换元	84
5.1.6	利用格林公式将二重积分化为线积分	86
5.1.7	二重广义积分的计算	87
5.1.8	利用二重积分解决定积分有关问题	87
§ 5.2	三重积分算法	88

5.2.1	化为三次单积分	88
5.2.2	利用不同坐标计算(三重积分的换元)	88
5.2.3	计算三重积分的“先二后一”法	89
5.2.4	“求围定顶”法	91
§ 5.3	曲线积分的计算法	93
5.3.1	第一型曲线积分的计算	93
5.3.2	第二型曲线积分的计算	95
§ 5.4	曲面积分的计算法	100
5.4.1	第一型曲面积分的计算	100
5.4.2	第二型曲面积分的计算	101
第六章	有关级数问题的方法	107
§ 6.1	数项级数敛散性的判定方法	107
6.1.1	直接判定法	107
6.1.2	正项级数收敛准则	107
6.1.3	比较判敛法	108
6.1.4	拉阿伯判敛法	111
6.1.5	积分判敛法	111
6.1.6	对数判敛法	112
6.1.7	任意项级数的收敛准则	113
6.1.8	莱布尼兹判敛法	113
6.1.9	狄里赫利判敛法	115
§ 6.2	幂级数解题方法	117
6.2.1	收敛半径的确定	117
6.2.2	函数展开成幂级数的方法	119
6.2.3	求幂级数和函数的方法	122
6.2.4	利用幂级数求数项级数的和	125
§ 6.3	付立哀级数展开方法	127
6.3.1	正交函数族的讨论	127
6.3.2	周期函数的付立哀级数展开	128
6.3.3	在有限区间上定义的函数的付立哀展开	130
6.3.4	利用付立哀展开求数项级数的和	133
6.3.5	复数形式的付立哀级数	135
§ 6.4	一致收敛性的判敛方法	136
第七章	微分方程的解法	138
§ 7.1	一阶微分方程的解法	138
7.1.1	分离变量法	138
7.1.2	可化为齐次的微分方程的解法	139
7.1.3	可化为线性的微分方程的解法	142
7.1.4	全微分方程的解法	145
7.1.5	隐式微分方程的解法	150

§ 7.2	某些高阶微分方程的解法	152
§ 7.3	常系数线性微分方程的解法	156
7.3.1	待定系数法	156
7.3.2	微分算子法	158
7.3.3	降阶法	161
7.3.4	常数变易法	162
7.3.5	“共轭方程”法	163
§ 7.4	变系数线性微分方程的解法	164
7.4.1	欧拉方程及其它某些微分方程的解法	164
7.4.2	二阶线性微分方程的解法	165
§ 7.5	常系数线性微分方程组的解法	168
第八章	一些应用题的解法	172
§ 8.1	用微分的方法作函数的图形	172
8.1.1	函数作图的方法与步骤	172
8.1.2	极坐标方程曲线作图	172
§ 8.2	空间曲线的切线法平面方程和曲面的切平面、法线方程	173
8.2.1	空间曲线的切线与法平面方程	173
8.2.2	曲面的切平面和法线方程	174
§ 8.3	极值问题的解法	175
8.3.1	二元函数无条件极值的求法	175
8.3.2	二元函数条件极值的求法	178
8.3.3	最大值与最小值的求法	180
§ 8.4	面积、体积和弧长的求法	181
8.4.1	求平面图形的面积	181
8.4.2	求空间体体积	185
8.4.3	求曲线弧的长度	188
8.4.4	求曲面的面积	188
§ 8.5	质量、重心及转动惯量等的求法	190
8.5.1	求物体的质量	190
8.5.2	求物体的重心或质心	191
8.5.3	求物体的转动惯量	191
8.5.4	求变力所做的功	192
8.5.5	求引力、通量、环流量等	192
§ 8.6	有关级数的一些应用题的解法	195
8.6.1	数值计算	195
8.6.2	幂级数在解微分方程中的应用	199
§ 8.7	有关微分方程的一些应用题的解法	200
第九章	几种常用的论证方法	206
§ 9.1	几种常用的论证方法	206

9.1.1	分析性证明法	206
9.1.2	综合性证明法	208
9.1.3	构造性证明法	209
9.1.4	归纳性证明法	210
9.1.5	反证性证明法	211
9.1.6	反例性证明法	211
9.1.7	计算性证明法	212
§ 9.2	证明不等式的方法	212
9.2.1	配方法	212
9.2.2	逐项比较法	213
9.2.3	归纳法	213
9.2.4	放缩法	214
9.2.5	利用导数	215
9.2.6	利用微分中值定理	215
9.2.7	利用泰勒公式	215
9.2.8	凸函数法	216
9.2.9	利用级值和最值	217
9.2.10	判别式法	218
9.2.11	利用定积分的定义	218
9.2.12	利用定积分的质性	219
9.2.13	利用积分中值定理	220
9.2.14	将定积分化为重积分	220
§ 9.3	证明方程根的存在性的方法	221
9.3.1	利用连续函数的介值定理	221
9.3.2	利用函数的单调性	221
9.3.3	利用微分中值定理	222
9.3.4	利用最大值与最小值定理	223
9.3.5	利用积分中值定理	223

第一章 关于函数问题的若干方法

函数是微积分学中的一个重要的基本概念，也是微积分学的主要研究对象，本章我们叙述关于函数问题的若干方法和技巧。

§ 1.1 函数的四种表示法

1.1.1 解析法（也叫公式法）

例如 $y = 3x^2 + 1$, $y = \frac{1}{1+x^4}$, $y = 3\sin x + \cos x, \dots$ 。变量 y 与 x 之间的函数关系是用一个含有这两个变量的有关数学运算的等式来表示的，这种方法叫解析法。这种方法的优点是简单、明确，便于用数学方法进行研究，但直观性较差，而且在实际问题中还存在着不能用解析法来表示的函数。

1.1.2 列表法

这种方法是将自变量与因变量的值列成表格，以表示其间的对应关系。它的优点是可以达到所需要的精确度，但缺乏直观性，也不便于理论研究。

1.1.3 图示法

用函数的图形来表示函数的方法称为图示法，这种方法给人以直观的印象，但它的精确度往往受到限制。

1.1.4 叙述法

用语言直接叙述函数的定义域和对应法则，这种表示函数的方法称为叙述法。

例 1 $y = [x]$ 表示函数的定义域是全体实数，对应规律是： y 代表不超过 x 的最大整数。

例 2 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$

叙述法常用于理论研究。

§ 1.2 函数定义域的表示法与求法

1.2.1 函数定义域的表示法

表示函数定义域的方法一般有如下五种：

1 不等式表示法

用不等式来表示函数自变量的取值范围,这种方法称为不等式表示法。

例 1 $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1.$

例 2 $y = \sqrt{x}, 0 \leq x < +\infty.$

2 区间表示法

将表示函数定义域的不等式改用区间符号来表示,这种方法称为区间表示法。

例 3 $y = \ln(x-3)$ 的定义域是 $(3, +\infty).$

例 4 $y = \sqrt{5-x^2}$ 的定义域是 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}].$

3 叙述法

用文字叙述函数定义域的方法称为叙述法。

例 5 凸 n 边形的内角和 S 是边数的函数,即 $S = (n-2) \cdot 180^\circ$, 定义域是: 不小于 3 的自然数。

4 集合表示法

用集合来表示函数定义域的方法称为集合表示法。

例 6 $y = \frac{1}{x-2}$, 定义域是 $\{x: x \neq 2, x \in R\}$, R 表示所有实数。

5 图示法

用图形表示函数定义域的方法称为图示法。

例 7 因为 $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(5-x)$ 的定义域就是适合下列不等式组的解:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 5-x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \\ x < 5, \end{cases}$$

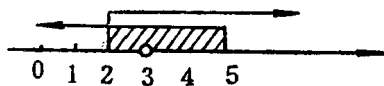


图 1-1

因此定义域可表示如图 1-1。

为了研究问题的方便,上述五种方法常常混合使用。

1.2.2 函数定义域的求法

求函数的定义域一般有三种方法。

1 代数解析法

在实际问题中,函数的定义域是由所研究问题的实际意义来确定的;一般数学式子给出的抽象函数 $y = f(x)$, 如果没有指明自变量与因变量的具体意义(如物理意义,几何意义等)或其它声明,则认为这个函数的定义域是使得这个数学式子有意义的自变量的一切实数值的集合;如果表示一个函数的解析式是由几个数学式子组合而成的,则这个函数的定义域就必须取这几个数学式子允许值范围的公共部分。

常见的用代数解析法求函数定义域有下列五种情况:

- 1° 当函数为整式时,它的定义域是全体实数;
- 2° 当函数为偶次根式时,它的定义域由能使根号内的式子大于或等于 0 的数组成;
- 3° 当函数为分式时,它的定义域由能使分母不等于 0 的数组成;

4° 当函数为对数函数时, 它的定义域由能使真数表达式大于 0 的数组成;

5° 当函数为反三角函数时, 它的定义域如下表:

函 数	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctg x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
定 义 域	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$

综合上述五种情况可知, 用代数解析法求函数的定义域, 就是在实数范围内求能使函数表达式有意义的自变量的数值的全体, 在这个意义下, 定义域也就是函数的存在域。

2 图象观察法

如果函数关系是由图象法表示的, 那么用观察法求定义域是较简便的。

例 8 观察正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 的图象 (图 1-2)

可知, 当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时 (k 是整数) $\operatorname{tg} x$ 的值不存在, 即可知 $y = \operatorname{tg} x$ 的定义域是

$$\left\{ x: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in J \right\} \quad (\text{其中 } J \text{ 是整数集})$$

3 其它求法

1° 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域, 求复合函数 $y = f(u)$ 的定义域: 这类问题可由 x 的变化范围, 推广到 u 的变化范围而求得。

例 9 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求

(1) $f(\sin x)$; (2) $f(x+a)$ ($a > 0$); (3) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域。

解 (1) 为使 $f(\sin x)$ 有意义, 必须使 $0 \leq \sin x \leq 1$, 即 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$[2k\pi, (2k+1)\pi] \quad (k \text{ 为整数}).$$

(2) 为使 $f(x+a)$ ($a > 0$) 有意义, 必须使 $0 \leq x+a \leq 1$ ($a > 0$), 所以 $f(x+a)$ ($a > 0$) 的定义域为 $[-a, 1-a]$ 。

(3) 为使 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 有意义, 必须使 $0 \leq x+a \leq 1$ 与 $0 \leq x-a \leq 1$ 同时成立, 即 $-a \leq x \leq 1-a$ 与 $a \leq x \leq 1+a$ 同时成立, 所以

若 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域为 $[a, 1-a]$;

若 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域不存在。

2° 分段函数的定义域可分段考虑, 然后用整体写出。

例 10 求下列函数的定义域 (用区间表示)。

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad (2) \quad y = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 < x < 2, \\ x^3 - 3 & 2 < x \leq 4; \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

解 (1) 定义域为 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$;

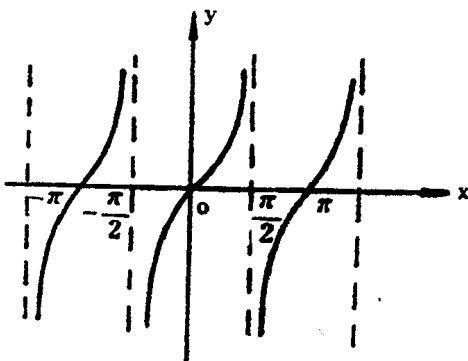


图 1-2

- (2) 定义域为 $(-1, 2), (2, 4]$;
 (3) 定义域为 $(-\infty, 0), (0, 2]$.

§ 1.3 函数值和函数值域的求法

1.3.1 函数值

对于函数 $y = f(x)$, 当自变量 $x = x_0$ 时, 对应的函数值为 $y|_{x=x_0} = f(x_0)$, 其中若 x_0 为一常数, 则直接代入就可得到; 若 x_0 为一字母, 则必须同时考虑到使函数有意义; 若 x_0 为一函数, 代入后得到一个复合函数.

例 1 已知 $f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b}$, 求 (1) $f(0)$; (2) $f(x) + f(-x)$; (3) 证明:

$$f(2x) - f(-2x) = [f(x)]^2 - [f(-x)]^2$$

解 (1)

$$f(0) = \frac{ae^0 + be^{-0}}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1;$$

$$(2) \quad f(x) + f(-x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b} + \frac{ae^{-x} + be^x}{a+b} = \frac{(a+b)(e^x + e^{-x})}{a+b} = e^x + e^{-x};$$

$$(3) \quad \because f(2x) = \frac{ae^{2x} + be^{-2x}}{a+b}, \quad f(-2x) = \frac{ae^{-2x} + be^{2x}}{a+b},$$

$$\therefore f(2x) - f(-2x) = \frac{(a-b)(e^{2x} - e^{-2x})}{a+b}$$

$$\text{又} \because f(x) - f(-x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b} - \frac{ae^{-x} + be^x}{a+b} = \frac{(a-b)(e^x - e^{-x})}{a+b}$$

$$\therefore [f(x)]^2 - [f(-x)]^2 = [f(x) + f(-x)][f(x) - f(-x)] = \frac{(a-b)(e^{2x} - e^{-2x})}{a+b}$$

因此

$$f(2x) - f(-2x) = [f(x)]^2 - [f(-x)]^2.$$

例 2 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & x \geq 2, \\ \frac{2-x}{x+1}, & x < 2 \end{cases}$ ($x \neq -1$), 求 $f(0)$, $f(4)$, $f(a)$.

解 $\because$

$$0 < 2, \quad \therefore f(0) = \frac{2-0}{0+1} = 2;$$

$$\because 4 > 2, \quad \therefore f(4) = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5};$$

计算 $f(a)$ 时要分两种情况:

$$\text{当 } a \geq 2 \text{ 时, } f(a) = \frac{a-2}{a+1};$$

$$\text{当 } a < 2 \text{ 时, } f(a) = \frac{2-a}{a+1} \text{ (其中 } a \neq -1 \text{)}.$$

例 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 当 $n=2$ 时, $f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$

设当 $n=k$ 时, 有 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$

则当 $n=k+1$ 时, 有 $f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

从而由数学归纳法知, 对于任何自然数 n 有

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 4 判别下列各对函数是否相同, 并说明原因.

(1) $f(x) = \frac{x}{x(x+1)}, g(x) = \frac{1}{x+1};$

(2) $f(x) = x^2, g(x) = x^2(x > 0);$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x;$

(4) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln |x|.$

解 (1)不相同. $\because f(x)$ 的定义域是 $x \neq 0, x \neq -1$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $x \neq -1$;

(2)不相同. $\because f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$;

(3)不相同. $\because f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 而 $g(x) = x$;

(4)相同.

1.3.2 函数值域的求法

求函数值域的方法一般有如下四种:

1 观察法

对于一些简单的函数可在定义域及函数对应法则基础上确定函数的值域, 这种方法称为观察法.

例 5 求函数 $y = 2 + \sqrt{x^2 + 4}$ 的值域.

解 显然算术根 $\sqrt{x^2 + 4}$ 非负, 但因 $x^2 \geq 0$, $\therefore x^2 + 4 \geq 4$, $\sqrt{x^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2$, 故所给函数的值域为 $4 \leq y < +\infty$.

2 函数变换法

因为在一般情况下, 求定义域总比求值域要简单一些, 因此, 我们可由函数 $y = f(x)$ 求得反函数 $x = f^{-1}(y)$, 然后求 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域以确定 $y = f(x)$ 的值域, 这种方法称为函数的变换法

当然这里的 f 一般为单值对应, 而 f^{-1} 则既可能是单值对应, 也可能是多值对应.

例 6 求函数 $y = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 的值域.

解 由 $y = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 得 $x = \frac{3y \pm \sqrt{y^2 + 8y}}{4y}$ (即 $x = f^{-1}(y)$)

求 $f^{-1}(y) = \frac{3y \pm \sqrt{y^2 + 8y}}{4y}$ 的定义域: 这从 $\begin{cases} y^2 + 8y \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ 可得, 为 $\begin{cases} -\infty < y \leq -8 \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$

所以函数 $y = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 的值域为 $(-\infty, -8] \cup (0, +\infty)$.

3 图象法

据根函数对应法则, 作出函数的图象, 由图象位置来确定函数的值域, 这种方法称为图象法.

例 7 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 的值域.

解 函数的定义域是 $[-1, 2)$ 和 $(2, +\infty)$, 且当 x 在 $[-1, 2)$ 中取值时, y 的值由零减少到负无穷, 当 x 在 $(2, +\infty)$ 中取值时, y 的值由正无穷逐步趋近于零. 由图象 (见图 1-3) 可见函数的值域为全体实数.

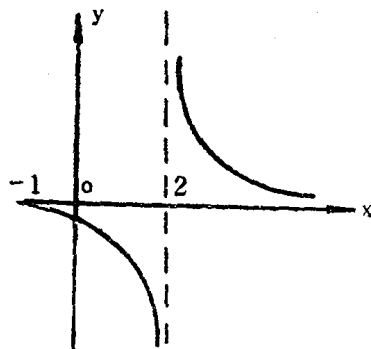


图 1-3

图象法的优点是直观, 可避免复杂运算, 缺点是描绘图象费时间而且不准确, 若结合函数的解析式子进行正确分析, 则可提高精确性.

4 利用极值求值域法

利用某些初等函数的极值, 有时可以确定函数值的变化范围, 从而求出函数的值域.

例 8 求函数 $y = \frac{5}{2x^2 - x + 1}$ 的值域.

解 因为 $2x^2 - x + 1$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8} > 0$, 而分子 $5 > 0$, 所以

$$0 < y \leq \frac{40}{7}.$$

§ 1.4 反函数的象图和求法

习惯上用字母 x 表示自变量, y 表示函数, 因而函数 $y = f(x)$ 的反函数就写成 $y = f^{-1}(x)$. 如果把原函数与反函数的图象画在同一个直角坐标系中, 则它们的图象关于直线 $y = x$ 是对称的. 利用这一点, 从原函数 $y = f(x)$ 的图象就可以作出反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象来.

为了求出反函数, 可以采取下面图示的步骤:

原函数 $\xrightarrow{\text{逆运算}}$ (以 y 为自变量的反函数) $\xrightarrow{\text{调换字母 } x \text{ 和 } y}$ 反函数		
$y = f(x)$	$x = f^{-1}(y)$	$y = f^{-1}(x)$
定义域 $x \in N$	定义域 $y \in M$	定义域 $x \in M$
值域 $y \in M$	值域 $x \in N$	值域 $y \in N$

当然,并不是所有函数都有反函数,例如 $y=c$ (常数)就没有反函数,所以上面叙述的是指在反函数存在的前提下来进行讨论的。

例 1 求下列函数的反函数

(1) $y=x^2$; (2) $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$);

解 (1) 函数 $y=x^2$ 的定义域是 $x\in(-\infty, +\infty)$, 值域是 $y\in[0, +\infty)$
作逆运算, 得 $x=\pm\sqrt{y}$

所以函数 $y=x^2$ 有两个单值的反函数:

$$x=\sqrt{y} \quad (y\geq 0, x\geq 0);$$

$$x=-\sqrt{y} \quad (y\geq 0, x\leq 0).$$

将字母 x 和 y 对调, 得

$y=\sqrt{x}$ 是 $y=x^2$ 的一个反函数, 定义域为 $x\geq 0$, 值域为 $y\geq 0$;

$y=-\sqrt{x}$ 是 $y=x^2$ 的另一个反函数, 定义域为 $x\geq 0$, 值域是 $y\leq 0$.

(2) $\because y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$), $\therefore y>0$.

据根对数的定义得 $x=\log_a y \quad (y>0)$,

所以函数 $y=a^x$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内都有反函数, 这个反函数就是

$$x=\log_a y \quad (y>0)$$

对调字母 x 和 y , 得所求的反函数是

$$y=\log_a x \quad (x>0).$$

§ 1.5 函数的作图法

1.5.1 平移作图法

如果已知函数 $y=f(x)$ 的图象, 那么

1. $y=f(x+a)$ 的图象可以这样得到: 当 $a>0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位, 当 $a<0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $|a|$ 个单位。

2. $y=f(x)+b$ 的图象可以这样得到: 当 $b>0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向上平移 b 个单位, 当 $b<0$ 时, 将 $y=f(x)$ 的图象向下平移 $|b|$ 个单位。

3. $y=f(x+a)+b$ 的图象可以这样得到: 先将 $y=f(x)$ 的图象按 1 法平移, 再按 2 法平移。

例 1 作函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ 的图形。

解 先画 $y=\sin x$ 的图形, 然后沿 x 轴的反方向平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 即得 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

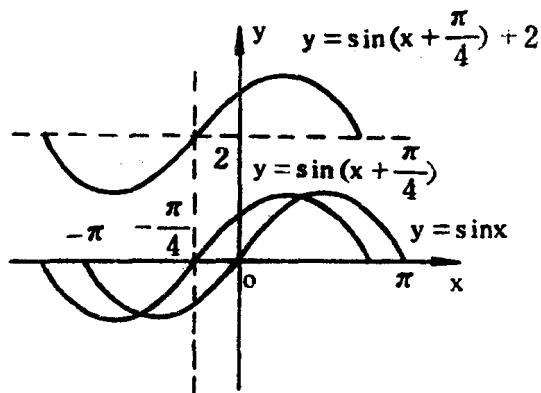


图 1-4