微积分
解题方法与技巧

王寿生 李云珠 张肇炽 编

西北工业大学出版社

微积分解题方法与技巧

王寿生　李云珠　张肇炽 编

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书是以论述和介绍微积分的解题方法与技巧为中心主题的书籍，内容涉及到函数、极限、导数（含偏导数）、积分（含重积分及线、面积分）以及级数、微分方程等有关基本概念、理论和方法。

本书系统总结了微积分解题的数百种方法并列举了大量例题；同时还包含了国内近年来教学研究的成果，并对不少读者颇感困难的应用题和证明题的解法进行了专章讲述。

本书可供大专院校学生、报考研究生的考生、电大生，函授生、自学微积分的读者以及高等学校和中等专业学校教师参考。

微积分解题方法与技巧

王寿生　李云珠　张肇炽 编

责任编辑　刘彦信

*

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路 127 号）

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 毫米　1/16　14.5625 印张　348 千字

1987 年 10 月第 1 版　1987 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001-7000 册

ISBN 7-5612-0028-5/O·1

统一书号：13433·071　定价：2.45元

前　言

正在学习微积分课程的读者，往往希望能有一本满意的参考书，帮助他们在牢固掌握基本知识的基础上，学会并掌握较为系统的解题方法。报考理工科研究生的同志，也总盼望获得一本理想的复习资料，帮助他们巩固所学微积分知识，并进一步提高解题的能力与技巧；从事微积分教学的大、中专教师，也很愿意手头拥有一本篇幅不大而又较为完整的工具书。现在呈献给读者的这本《微积分解题方法与技巧》，正是基于上述愿望和设想进行的一个尝试。

本书包括理工农医师范等各类院校公共基础课——微积分中涉及的函数、极限、导数（包括偏导数）、积分（包括重积分及线、面积分）以及级数、常微分方程等有关基本概念、基本理论和基本方法，内容比较完备。为了做到少而精，本书完全舍弃了微积分教程中常规内容的复习提要和大量常见习题，突出了解题方法和技巧这一主题，并以方法为中心系统地进行概括和总结，列举近500道典型例题；或者详加剖析，务期透彻了解个中奥妙，达到举一反三；或者画龙点睛，留给读者余地，希冀事半功倍。这些方法和例题，不仅较为全面而丰富，并且往往具有较强的综合性，可以帮助读者较快地提高解题能力和水平；同时还包含了近年来国内的一些教学研究成果，可以有助于读者增长学识，开阔眼界和思路，也可以作为一般教材和读物的一个有益补充。此外，考虑到不少读者常常对各类应用题和证明题的解法感到困难，本书特列专章进行讲述。

本书是在编者多年从事教学工作和为报考研究生的大学生、青年教师以及在职人员进行辅导讲课的基础上编写而成的。初稿首次在《数学学习》杂志1985年增刊上发表后，得到许多读者和国内同行的较好评价和热情鼓励。1986年，西北工业大学应用数学系一些同人，曾使用这份初稿作为校内本科生同名选修课程的教材。国内一些院校也把它用作报考研究生的辅导教材。这次，又进行了修改补充，正式奉献给广大读者。如果能对学习微积分的读者、报考研究生的同志和从事有关教学工作的教师有所助益，编者将感到不胜荣幸。

本书共分九章，第一、二、三章、第八章8.1-8.3及第九章由王寿生编写；第四、五章及第八章8.4、8.5由李云珠编写；第六、七章及第八章8.6、8.7由张肇炽编写。

国家教委工科数学课程指导委员会委员、陕西省数学会高等数学委员会主任孙家永教授曾经审阅了本书的初稿，提出过许多宝贵意见；国内一些同行专家也对初稿和它的出版，提出了不少有益建议；西北工业大学有关领导和教务处负责同志，对本书的编写和出版给予了热情鼓励和支持，在此我们一并表示衷心感谢。

由于水平所限，加之时间仓促，错漏谬误定然不少，尚祈读者不吝指正。

编　者

1986年12月

目　　录

第一章　关于函数问题的若干方法

函数是微积分学中的一个重要的基本概念，也是微积分学的主要研究对象，本章我们叙述关于函数问题的若干方法和技巧。

§1.1　函数的四种表示法

1.1.1　解析法（也叫公式法）

例如　$y=3x^2+1$，$y=\frac{1}{1+x^4}$，$y=3\sin x+\cos x,\cdots$。变量y与x之间的函数关系是用一个含有这两个变量的有关数学运算的等式来表示的，这种方法叫解析法。这种方法的优点是简单、明确，便于用数学方法进行研究，但直观性较差，而且在实际问题中还存在着不能用解析法来表示的函数。

1.1.2　列表法

这种方法是将自变量与因变量的值列成表格，以表示其间的对应关系。它的优点是可以达到所需要的精确度，但缺乏直观性，也不便于理论研究。

1.1.3　图示法

用函数的图形来表示函数的方法称为图示法，这种方法给人以直观的印象，但它的精确度往往受到限制。

1.1.4　叙述法

用语言直接叙述函数的定义域和对应法则，这种表示函数的方法称为叙述法。

例 1　$y=[x]$表示函数的定义域是全体实数，对应规律是：y代表不超过x的最大整数。

例 2　$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

叙述法常用于理论研究。

§1.2　函数定义域的表示法与求法

1.2.1　函数定义域的表示法

表示函数定义域的方法一般有如下五种：

1　不等式表示法

用不等式来表示函数自变量的取值范围，这种方法称为不等式表示法。

例 1　$y=\frac{1}{x-1}$，$x\neq 1$。

例 2　$y=\sqrt{x}$，$0\leqslant x<+\infty$。

2　区间表示法

将表示函数定义域的不等式改用区间符号来表示，这种方法称为区间表示法。

例 3　$y=\ln(x-3)$的定义域是$(3,+\infty)$。

例 4　$y=\sqrt{5-x^2}$的定义域是$[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$。

3　叙述法

用文字叙述函数定义域的方法称为叙述法。

例 5　凸n边形的内角和S是边数的函数，即$S=(n-2)\cdot 180°$，定义域是：不小于3的自然数。

4　集合表示法

用集合来表示函数定义域的方法称为集合表示法。

例 6　$y=\frac{1}{x-2}$，定义域是$\{x: x\neq 2, x\in R\}$，R表示所有实数。

5　图示法

用图形表示函数定义域的方法称为图示法。

例 7　因为$y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$的定义域就是适合下列不等式组的解：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x-3\neq 0 \\ 5-x>0, \end{cases} \quad 即\begin{cases} x\geqslant 2 \\ x\neq 3 \\ x<5, \end{cases}$$

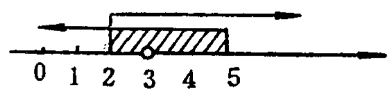

图 1-1

因此定义域可表示如图 1-1。

为了研究问题的方便，上述五种方法常常混合使用。

1.2.2　函数定义域的求法

求函数的定义域一般有三种方法。

1　代数解析法

在实际问题中，函数的定义域是由所研究问题的实际意义来确定的；一般数学式子给出的抽象函数$y=f(x)$，如果没有指明自变量与因变量的具体意义（如物理意义，几何意义等）或其它声明，则认为这个函数的定义域是使得这个数学式子有意义的自变量的一切实数值的集合；如果表示一个函数的解析式是由几个数学式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个数学式子允许值范围的公共部分。

常见的用代数解析法求函数定义域有下列五种情况：

1°　当函数为整式时，它的定义域是全体实数；

2°　当函数为偶次根式时，它的定义域由能使根号内的式子大于或等于0的数组成；

3°　当函数为分式时，它的定义域由能使分母不等于0的数组成；

4° 当函数为对数函数时，它的定义域由能使真数表达式大于 0 的数组成；

5° 当函数为反三角函数时，它的定义域如下表：

函　数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arctg}x$	$y=\mathrm{arcctg}x$
定 义 域	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\infty<x<+\infty$	$-\infty<x<+\infty$

综合上述五种情况可知，用代数解析法求函数的定义域，就是在实数范围内求能使函数表达式有意义的自变量的数值的全体，在这个意义下，定义域也就是函数的存在域。

2　图象观察法

如果函数关系是由图象法表示的，那么用观察法求定义域是较简便的。

例 8　观察正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的图象（图 1-2）可知，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$时（k 是整数）$\mathrm{tg}x$ 的值不存在，即可知 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是

$\left\{x:\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\right\}$（其中 J 是整数集）

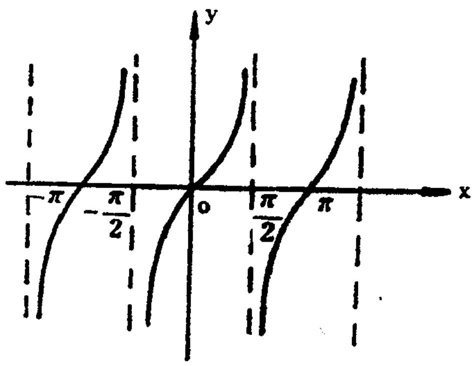

图 1-2

3　其它求法

1°　已知函数 $y=f(x)$的定义域，求复合函数 $y=f(u)$的定义域：这类问题可由 x 的变化范围，推广到 u 的变化范围而求得。

例 9　设 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求

（1） $f(\sin x)$；（2） $f(x+a)$ $(a>0)$；（3） $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域。

解（1） 为使 $f(\sin x)$有意义，必须使 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，即 $f(\sin x)$的定义域为

$$[2k\pi,\ (2k+1)\pi]（k 为整数）。$$

（2） 为使 $f(x+a)$ $(a>0)$有意义，必须使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ $(a>0)$，所以$f(x+a)$ $(a>0)$的定义域为$[-a,\ 1-a]$。

（3） 为使 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 有意义，必须使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 与 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 同时成立，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 与 $a\leqslant x\leqslant 1+a$ 同时成立，所以

若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域为$[a,\ 1-a]$；

若 $a>\frac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域不存在。

2°　分段函数的定义域可分段考虑，然后用整体写出。

例 10　求下列函数的定义域（用区间表示）。

（1） $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1,\\ 1, & x>1;\end{cases}$　　（2）$y=\begin{cases}x^2+1 & -1<x<2,\\ x^3-3 & 2<x\leqslant 4;\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0,\\ x\ , & 0<x<1,\\ 2\ , & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

解（1） 定义域为$(0,\ 1)$，$(1,\ +\infty)$；

（2） 定义域为$(-1, 2)$，$(2, 4]$；

（3） 定义域为$(-\infty, 0)$，$(0, 2]$。

§1.3 函数值和函数值域的求法

1.3.1 函数值

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 $x=x_0$ 时，对应的函数值为 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$， 其中若 x_0 为一常数，则直接代入就可得到；若x_0为一字母，则必须同时考虑到使函数有意义；若x_0为一函数，代入后得到一个复合函数。

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$，求（1）$f(0)$；（2）$f(x)+f(-x)$；（3）证明：

$$f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2$$

解（1）
$$f(0)=\frac{ae^0+be^{-0}}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1;$$

（2）
$$f(x)+f(-x)=\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}+\frac{ae^{-x}+be^x}{a+b}=\frac{(a+b)(e^x+e^{-x})}{a+b}=e^x+e^{-x};$$

（3）
$$\because\ f(2x)=\frac{ae^{2x}+be^{-2x}}{a+b},\quad f(-2x)=\frac{ae^{-2x}+be^{2x}}{a+b},$$

$\therefore$
$$f(2x)-f(-2x)=\frac{(a-b)(e^{2x}-e^{-2x})}{a+b}$$

又$\because$
$$f(x)-f(-x)=\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}-\frac{ae^{-x}+be^x}{a+b}=\frac{(a-b)(e^x-e^{-x})}{a+b}$$

$\therefore$
$$[f(x)]^2-[f(-x)]^2=[f(x)+f(-x)][f(x)-f(-x)]=\frac{(a-b)(e^{2x}-e^{-2x})}{a+b}$$

因此
$$f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2.$$

例 2 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}, & x\geqslant 2,\\[2mm] \dfrac{2-x}{x+1}, & x<2\end{cases}$ $(x\neq-1)$，求$f(0)$，$f(4)$，$f(a)$。

解 $\because$ $0<2$， $\therefore\ f(0)=\dfrac{2-0}{0+1}=2$；

$\because$ $4>2$， $\therefore\ f(4)=\dfrac{4-2}{4+1}=\dfrac{2}{5}$；

计算 $f(a)$时要分两种情况：

当 $a\geqslant2$ 时， $f(a)=\dfrac{a-2}{a+1}$；

当 $a<2$ 时， $f(a)=\dfrac{2-a}{a+1}$（其中$a\neq-1$）。

例 3 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$。

解 当 $n=2$ 时，$f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

设当 $n=k$ 时， 有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，

则当 $n=k+1$ 时，有 $f_{k+1}(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

从而由数学归纳法知，对于任何自然数 n 有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 4 判别下列各对函数是否相同，并说明原因。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x(x+1)}$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=x^2$， $g(x)=x^2(x>0)$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$， $g(x)=x$；

(4) $f(x)=\ln x^2$， $g(x)=2\ln|x|$.

解 (1)不相同。$\because f(x)$的定义域是 $x\neq 0$，$x\neq -1$，而 $g(x)$的定义域是 $x\neq -1$；

(2)不相同，$\because f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，而 $g(x)$的定义域是$(0, +\infty)$；

(3)不相同，$\because f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，而 $g(x)=x$；

(4)相同。

1.3.2 函数值域的求法

求函数值域的方法一般有如下四种：

1 观察法

对于一些简单的函数可在定义域及函数对应法则基础上确定函数的值域，这种方法称为观察法。

例 5 求函数 $y=2+\sqrt{x^2+4}$的值域。

解 显然算术根$\sqrt{x^2+4}$非负，但因 $x^2\geqslant 0$，$\therefore$ $x^2+4\geqslant 4$，$\sqrt{x^2+4}\geqslant\sqrt{4}=2$，故所给函数的值域为 $4\leqslant y<+\infty$。

2 函数变换法

因为在一般情况下，求定义域总比求值域要简单一些，因此，我们可由函数 $y=f(x)$ 求得反函数 $x=f^{-1}(y)$，然后求 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域以确定 $y=f(x)$ 的值域，这种方法称为函数的变换法

当然这里的 f 一般为单值对应，而 f^{-1} 则既可能是单值对应，也可能是多值对应。

例 6 求函数$y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$的值域。

解 由$y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$得$x=\dfrac{3y\pm\sqrt{y^2+8y}}{4y}$ （即$x=f^{-1}(y)$）

求 $f^{-1}(y)=\dfrac{3y\pm\sqrt{y^2+8y}}{4y}$的定义域：这从$\begin{cases} y^2+8y\geqslant 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$可得，为$\begin{cases} -\infty<y\leqslant -8 \\ 0<y<+\infty \end{cases}$

所以函数$y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$的值域为$(-\infty, -8]$，$(0, +\infty)$。

3 图象法

据根函数对应法则，作出函数的图象，由图象位置来确定函数的值域，这种方法称为图象法。

例 7 求函数$y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$的值域。

解 函数的定义域是$[-1, 2)$和$(2, +\infty)$，且当x在$[-1, 2)$中取值时，y的值由零减少到负无穷，当x在$(2, +\infty)$中取值时，y的值由正无穷逐步趋近于零。由图象（见图 1-3）可见函数的值域为全体实数。

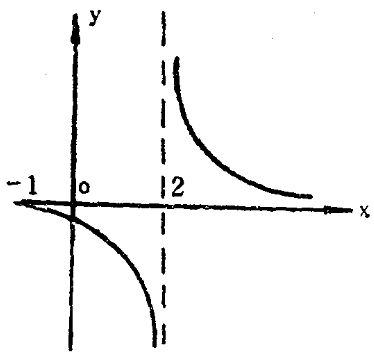

图 1-3

图象法的优点是直观，可避免复杂运算，缺点是描绘图象费时间而且不准确，若结合函数的解析式子进行正确分析，则可提高精确性。

4 利用极值求值域法

利用某些初等函数的极值，有时可以确定函数值的变化范围，从而求出函数的值域。

例 8 求函数$y=\dfrac{5}{2x^2-x+1}$的值域。

解 因为 $2x^2-x+1$ 的最小值为$\dfrac{7}{8}$，$\dfrac{7}{8}>0$，而分子 $5>0$，所以

$$0<y\leqslant\frac{40}{7}.$$

§1.4 反函数的象图和求法

习惯上用字母x表示自变量，y表示函数，因而函数$y=f(x)$的反函数就写成$y=f^{-1}(x)$。如果把原函数与反函数的图象画在同一个直角坐标系中，则它们的图象关于直线 $y=x$ 是对称的。利用这一点，从原函数$y=f(x)$的图象就可以作出反函数$y=f^{-1}(x)$的图象来。

为了求出反函数，可以采取下面图示的步骤：

原 函 数 $\xrightarrow{\text{逆运算}}$ （以y为自变量的反函数） $\xrightarrow{\text{调换字母 } x \text{ 和 } y}$ 反 函 数

$y=f(x)$	$x=f^{-1}(y)$	$y=f^{-1}(x)$
定义域$x\in N$	定义域$y\in M$	定义域$x\in M$
值域$y\in M$	值域$x\in N$	值域$y\in N$

当然，并不是所有函数都有反函数，例如$y=c$（常数）就没有反函数，所以上面叙述的是指在反函数存在的前提下来进行讨论的。

例 1 求下列函数的反函数

（1）$y=x^2$；（2）$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）；

解（1） 函数$y=x^2$的定义域是$x\in(-\infty,+\infty)$，值域是$y\in[0,+\infty)$

作逆运算，得
$$x=\pm\sqrt{y}$$

所以函数$y=x^2$有两个单值的反函数：

$$x=\sqrt{y}\quad(y\geqslant 0,\ x\geqslant 0);$$

$$x=-\sqrt{y}\quad(y\geqslant 0,\ x\leqslant 0).$$

将字母x和y对调，得

$y=\sqrt{x}$是$y=x^2$的一个反函数，定义域为$x\geqslant 0$，值域为$y\geqslant 0$；

$y=-\sqrt{x}$是$y=x^2$的另一个反函数，定义域为$x\geqslant 0$，值域是$y\leqslant 0$。

（2）$\because\ y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$），$\therefore\ y>0$。

据根对数的定义得
$$x=\log_a y\quad(y>0),$$

所以函数$y=a^x$在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内都有反函数，这个反函数就是

$$x=\log_a y\quad(y>0)$$

对调字母x和y，得所求的反函数是

$$y=\log_a x\quad(x>0).$$

§1.5 函数的作图法

1.5.1 平移作图法

如果已知函数$y=f(x)$的图象，那么

1. $y=f(x+a)$的图象可以这样得到：当$a>0$时，将$y=f(x)$的图象向左平移a个单位，当$a<0$时，将$y=f(x)$的图象向右平移$|a|$个单位。

2. $y=f(x)+b$的图象可以这样得到：当$b>0$时，将$y=f(x)$的图象向上平移b个单位，当$b<0$时，将$y=f(x)$的图象向下平移$|b|$个单位。

3. $y=f(x+a)+b$的图象可以这样得到：先将$y=f(x)$的图象按1法平移，再按2法平移。

例 1 作函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ 的图形。

解 先画$y=\sin x$的图形，然后沿x轴的反方向平移$\frac{\pi}{4}$个单位即得$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

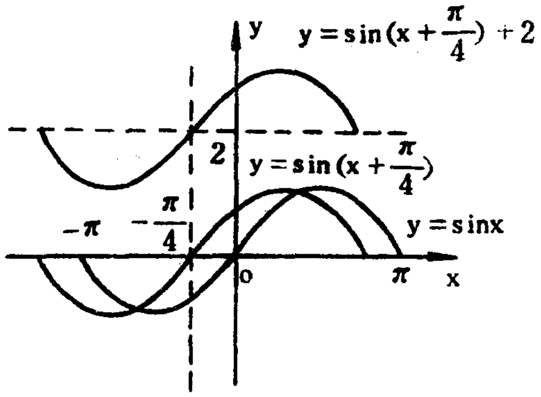

图 1-4