大学

数学系

自学丛书

复变函数论

FUBIAN HANSHU LUN

大学数学系自学丛书

复 变 函 数 论

东北师范大学

朱静航　主编

辽 宁 人 民 出 版 社

1 9 8 3 年 · 沈阳

复变函数论
朱静航 主编
*
辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行
沈阳市第一印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：17 1/4
字数：450,000 印数：1—13,200
1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷
统一书号：7090·208 定价：2.25元

序　言

“复变函数论”这门课程的基础是数学分析.

根据国家的统一教学计划，这门课程是数学专业的基础课，也是必修课. 它研究的对象是解析函数——一种特殊的复变函数类，所以也称为**解析函数论**. 数学里专门研究函数的领域称为**分析**——它以变量间的依赖关系作为自己的对象. 单复变函数论（简称**函数论**）和数学分析（微积分）、微分方程、微分几何等，都是分析这个领域的重要组成部分，因此复变函数论亦称**复分析**. 它在初期是实变函数分析在复数域的推广，它的基本概念如函数、极限、连续、导数等等，在形式上与数学分析里的相应概念相类似. 在推广的过程中有所发展，到十九世纪中叶，逐步形成了数学里分析领域重要分枝.

这门课程，不但数学专业必读，其他如物理以及工科等各有关专业，都要程度不同地涉及其中的某些内容. 特别是复变函数论的理论和方法，在流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等物理和工程技术各学科中，都有广泛的应用，并是解决有关问题的有力工具.

根据1980年教育部颁发的关于“复变函数论教学大纲”，其主要内容为复变函数的微商、积分、级数、留数理论、共形映射、解析开拓和黎曼曲面等. 这些内容基本上是围绕 L. Euler, A. L. Cauchy, 以及后来的P. G. L. Dirichlet, K. Weierstrass, G. F. B. Riemann等人的工作，和解析函数的特征性质展开的. 这些内容尽管是较古典的，但是又是最基本的理论和方法，这对于我们加深数学修养，增

强数学工作能力，显然是必须的；为学习后继课程，自学和钻研一些有关问题，打下必要的基础。

本书除了一些必备的基础知识外，还适当地纳入了某些现代的内容，指出了某些新发展的方向，这对于巩固和加深基础知识，扩大眼界，了解发展趋势，培养能力是有益的。

本书中带*号的内容，如时间紧，可以省略或粗读。

书中第一章主要是基本概念，着重讨论了复数的性质和运算法则，以及复变函数的函数、极限和连续等概念。如果读者对数学分析有一定基础，本章可以粗读。第二至六章要求精读，这是本书的中心，它们反映了解析函数在相应条件下的特征，如满足C.—R.方程，可以用多项式逼近，沿闭路积分为零，展开成幂级数，留数定理，共形映射等，七、八、九三章可以作为一般的学习和要求。但也要了解其主要问题、思路和方法。

我们针对自学这个特点，较多地安排了一定数量的例题和习题，以及解答.我们认为例题和习题是帮助读者深刻理解概念、定理，论证和计算问题，获取思考方法等，必不可少的内容。因之要求读者，在读完章节之后，一定要阅读例题，选作习题（不要求全作），才能深入理解所学的知识和问题的本质。还要从实际出发，循序渐进，刻苦钻研，

编 者

责任编辑：于　乞
封面设计：安今生

目　录

序　言

第一章　复数和复变函数 …… 1

§ 1·1　复数概念 …… 1

1　复数及其被认识的历史梗概 …… 2

2　复数的算术运算 …… 3

§ 1·2　复数的几何表示 …… 3

1　复数平面 …… 3

2　复数的极坐标形式 …… 4

3　De Moivre 公式和复数的n次方根 …… 6

§ 1·3　扩充的复数平面 …… 8

习　题（1·1） …… 10

§ 1·4　平面点集 …… 11

1　某些平面点集合与定理 …… 11

2　区　域 …… 12

§ 1·5　复变函数 …… 15

1　函数概念 …… 15

2　极限概念 …… 18

3　连续性 …… 18

习　题（1·2） …… 22

学习指导 …… 23

第二章　微商与解析函数 …… 49

§ 2·1　复变函数的微商和解析函数概念 …… 49

1　微商和微分 …… 49

2 解析函数概念 ……………………………………………52
3 C.—R.条件（方程） ………………………………………53
4 解析函数的性质 …………………………………………56
5 单叶解析函数及其反函数 ………………………………59
§ 2·2 解析函数与调和函数的关系……………………………60
1 调和函数概念 ……………………………………………60
2 解析函数与调和函数间的关系 …………………………60
习 题（2·1）………………………………………………62
§ 2·3 某些初等函数的解析性 ……………………………63
1 初等代数函数 ……………………………………………64
2 幂函数和根式函数 ………………………………………65
3 指数函数和对数函数 ……………………………………68
4 三角函数和反三角函数 …………………………………71
*5 双曲线函数和反双曲线函数 …………………………75
*6 一般的幂函数和一般的指数函数 ……………………76
*7 关于初等超越函数的定义 ……………………………80
§ 2·4* 用多项式逼近函数……………………………………82
1 “偏差”和一致收敛 ………………………………………82
2 用多项式逼近函数 ………………………………………82
习 题（2·2）………………………………………………84
学习指导 ……………………………………………………85
第三章 复变函数的积分……………………………………106
§ 3·1 复变函数积分的概念 ………………………………106
1 复变函数积分的定义 ……………………………………106
2 复变函数积分的基本性质 ………………………………109
3 复变函数积分的计算 ……………………………………110
习 题（3·1）………………………………………………115
§ 3·2 Cauchy积分定理及其推广 …………………………116
1 Cauchy 积分定理及其证明………………………………116
2 Cauchy积分定理的推广 …………………………………125

3 Cauchy积分定理推广到复连通区域 …………………125
习 题（3·2） ……………………………………129
§ 3·3 不定积分 ……………………………………130
1 积分上限函数的解析性 ……………………………130
2 不定积分 ……………………………………………132
3 Newton-Leibniz公式 ………………………………133
§ 3·4 Cauchy积分公式 ……………………………134
1 Cauchy 积分公式……………………………………134
2 算术平均值定理 ……………………………………137
习 题（3·3） ……………………………………137
§ 3·5 解析函数的无穷可微性 ……………………138
1 解析函数的无穷可微性及其证明 …………………138
2 Cauchy不等式 ………………………………………143
3 Liouville定理 ………………………………………144
4 代数基本定理及其证明……………………………144
5 Morera（莫瑞拉）定理 ……………………………145
6 可以用多项式逼近的函数的解析性 ………………146
§ 3·6 解析函数的最大模原理、Poisson积分 ……147
1 最大模原理 …………………………………………147
*2 Poisson积分公式……………………………………149
习 题（3·4） ……………………………………150
学习指导 ………………………………………………154

第四章 解析函数的级数展开式 ………………………181
§ 4·1 复数项级数…………………………………181
1 复数项级数 …………………………………………181
2 复数项级数的性质 …………………………………182
§ 4·2 函数项级数…………………………………184
1 函数项级数概念 ……………………………………184
2 函数项级数的性质 …………………………………187

3 Weierstrass定理 ……………………………………191
习 题（4·1） ……………………………………195
§ 4·3 幂级数 ……………………………………197
1 幂级数概念 ……………………………………197
2 幂级数的收敛性 ……………………………………197
3 幂级数的收敛半径 ……………………………………200
4 和函数的解析性 ……………………………………200
§ 4·4 解析函数的幂级数展开式……………………………………201
1 Taylor（泰劳）定理 ……………………………………201
2 解析函数的幂级数展开方法 ……………………………………204
习 题（4·2） ……………………………………211
§ 4·5 解析函数零点的孤立性、唯一性定理 ………212
1 解析函数零点的孤立性 ……………………………………212
2 唯一性定理 ……………………………………215
§ 4·6 Laurent级数 ……………………………………217
1 Laurent级数……………………………………217
2 Laurent级数的收敛域及其和函数的解析性…………218
习 题（4·3） ……………………………………220
§ 4·7 解析函数的Laurent展开式 ……………………………………221
1 Laurent定理……………………………………221
2 解析函数展开成Laurent级数的方法……………………225
§ 4·8 解析函数在孤立奇点邻域的性质 ……………230
1 解析函数在其有限孤立奇点邻域的性质 ……………230
2 解析函数在其无穷远点邻域的性质 ……………………236
习 题（4·4） ……………………………………237
学习指导……………………………………239
第五章 留数理论及其应用 ……………………………………286
§ 5·1 留数概念 ……………………………………286
1 关于有限远点的留数及其计算 ……………………………………286
2 关于无穷远点的留数及其计算 ……………………………………291

3 留数基本定理 ……292
习 题 (5·1) ……295
§ 5·2 用留数计算复变函数沿闭路的积分 ……296
§ 5·3 围道积分……298
习 题 (5·2) ……312
§ 5·4 辐角原理、Rouché定理及其应用……314
1 对数留数 ……314
2 辐角原理 ……316
3 Rouché定理及其应用 ……318
习 题 (5·3) ……321
学习指导 ……324

第六章 共形映射 ……372

§ 6·1 共形映射概念……372
1 导数的模及其辐角的几何意义 ……372
2 共形映射的概念 ……375
§ 6·2 解析函数的映射性质 ……376
1 解析函数的保域性 ……376
2 单叶解析函数的共形性 ……378
3 单叶解析函数的反函数及其解析性 ……379
§ 6·3 Riemann存在定理及边界对应定理 ……381
1 共形映射的基本问题 ……381
2 Riemann存在定理 ……381
*3 边界对应定理 ……382
§ 6·4 分式线性映射……384
1 分式线性映射 ……384
2 分式线性映射的共形性 ……386
3 分式线性映射的保圆性 ……388
4 对称点的不变性 ……389
5 交比不变性 ……391
6 分式线性函数的确定 ……392

§ 6·5 分式线性映射的应用 ……394
习 题（6·1） ……398
§ 6·6 某些初等函数所构成的映射……400
1 幂函数与根式函数的共形映射 ……400
2 指数函数与对数函数的共形映射 ……402
3 Жуковский（儒苛夫斯基）函数的映射 ……404
4 机翼剖面的外部到圆外部的共形映射 ……408
习 题（6·2） ……412
§ 6·7 共形映射问题举例 ……414
习 题（6·3） ……419
学习指导 ……421
第七章 解析开拓 ……473
§ 7·1 解析开拓的一般概念 ……473
1 解析开拓原理 ……473
2 完全解析函数 ……478
§ 7·2 解析开拓的一般方法——幂级数法 ……480
§ 7·3 Schwarz 对称原理 ……485
1 对称原理的特殊情况 ……485
2 对称原理应用举例 ……486
习 题（7·1） ……488
学习指导 ……488
第八章 初等多值函数与黎曼曲面 ……497
§ 8·1 初等多值函数概念 ……497
1 单值枝与单叶性区域 ……497
2 分枝、枝点与枝割线 ……499
*3 函数$W=\sqrt[n]{p(z)}$ 的枝点的判定……503
§ 8·2 黎曼曲面 ……505
1 黎曼曲面概念 ……505
2 多值函数与黎曼曲面 ……505

习　题（8·1）……………………………………509
学习指导……………………………………………509
第九章　复变函数论在流体力学上的应用………………522
§ 9·1　不可压缩、无源、无旋、稳定的平面流动
……………………………………………………522
§ 9·2　解析函数在流体力学上的意义………………523
§ 9·3　关于飞机翼升力的计算…………………………528
§ 9·4　圆域上的Dirichlet问题…………………………530
习　题（9·1）……………………………………533
学习指导……………………………………………534
编　后

第一章　复数和复变函数

§ 1·1　复数概念

直到目前为止，所学过的数学课程的一切论证和运算，基本上是在实数范围内进行的．从本门课程起，将要迈出实数范围而进入复数领域．对于某些实数概念，尽管我们在数学分析中，已学习过，但必要时仍将引入或加以证明．这种重复还是需要的．

现今“集合论”的观点的“统治”地位，是现代数学特点之一．在数学课里包括中小学数学课，都业已渗透或应用集合论的观点、语言和记号．本书也将部分地应用．例如记号“$\in$”表“属于”，“$\overline{\in}$”或“$\notin$”表“不属于”，“$\subset$”表“包含于”，“$\cup$”、“$\cap$”表示两集合的“并”、“交”等等．其他符号将随时引进．我们认为读者对上述记号的意义已有所了解．因而就不赘述了．

数学里讨论的对象，如代数讨论的对象是“数”、“式”，几何里讨论的对象是“点”或“直线”等，都称为“元素”或简称为“**元**”．由有限多个元素或无穷多个元素所组成的集体，称**有限集合**或**无穷集合**．

本章讨论的对象主要是复数和复数集．什么是复数，什么是复数集，它们都有哪些性质．这是本章讨论的主要课题．另一个课题是讨论复变函数概念及其某些性质．讨论复变函数，特别是讨论一种特殊的复变函数类——解析函数类，则是全书的任务．本章只引入复变函数概念，函数的极限和连续性．

1．复数及其被认识的历史梗概

我们把形如

$$z=x+iy$$

的数称为**复数z**．其中i称为**虚数单位**，并规定 $i^2=i\cdot i=-1$，或$i=\sqrt{-1}$（这里$\sqrt{-1}$表示它可能取的两个值中的一个，普通取正值）；x与y都是任意的实数．依次称为 z 的**实部**（Real）与**虚部**（Imaginary）．采用Weierstrass的符号，分别表示为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

例如：复数$\alpha=\sqrt{2}+i$，则$\sqrt{2}=\mathrm{Re}\alpha$，$1=\mathrm{Im}\alpha$；

$$\beta=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}i,\quad 则\frac{4}{3}=\mathrm{Re}\beta,\quad -\frac{\sqrt{5}}{2}=\mathrm{Im}\beta.$$

历史梗概①

远在三世纪，人们能解数字系数的某些一元方程．但对于$x^2+1=0$ 却无办法．原因是受实数范围的限制．直到十六世纪中叶，意大利数学家Cardano（卡当）在解一元三次方程时得出方程：

$$x^3+px+q=0$$

的根为

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\quad R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

显然当$R\geqslant0$ 时，$\sqrt{R}$为实数，方程有解．但当$R<0$ 时，在实数范围内$\sqrt{R}$无意义．于是为突破实数范围的限制而引入虚数．不但$\sqrt{R}$有意义，方程$x^2+1=0$有解，并且使数域扩大．经过不少人的努力，使复数与平面上的点，与物理的向量联系起来，复数才在数学里巩固下来，从此数学也进入了新的阶段．在十八世纪，Euler（欧拉）在他的公式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

① 朱静航：《$\sqrt{-1}$是数学发展的必然产物》．《吉林师大学报》1974年，第1期．

中，首先引入记号i.

2. 复数的算术运算

设复数$z=x+iy$，称 $x-iy$ 为z的共轭复数. 记为$\bar{z}=x-iy$. 把实数$\sqrt{x^2+y^2}$称为z的绝对值或模($\sqrt{\ }$取正值)把$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$称为 z 的辐角.

关于两个复数$\alpha=a+bi$及$\beta=c+di$ 的四则运算和相等，用下列等式来定义：

$$\alpha\pm\beta=(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$

$$\alpha/\beta=(a+bi)/(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,\quad \beta\neq 0.$$

当且仅当$a=c$, $b=d$时，$\alpha=\beta$, $a+bi=c+di$.

§ 1·2　复数的几何表示

1. 复数平面

法国数学家 Argand（阿刚）在全体复数和坐标平面上的点之间建立起一一对应关系. 即令复数$z=x+iy$与坐标为(x,y)的点相对应，这个坐标平面称为复平面或称Argand平面，亦称 Gauss（高斯）平面，用S来表示，S_z表z平面.

今后我们对于S的点和数就不加区别地使用.

复数 $z=x+yi$，或(x,y)也可以用S_z的一个自由向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示

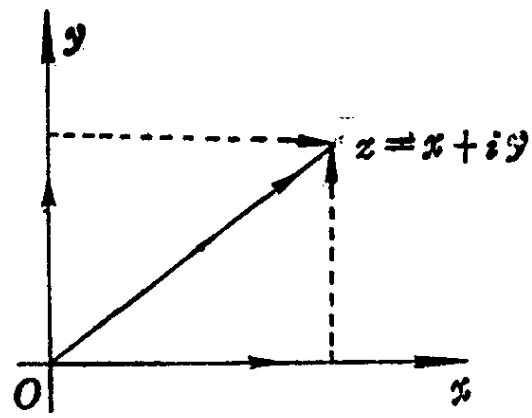

图 1·1

（如图1·1）．它在轴上的射影为$\overrightarrow{Ox}$与$\overrightarrow{Oy}$，它们的和等于向量$\overrightarrow{Oz}$．下列不等式成立：

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant |z|,$$

$$-|z|\leqslant \mathrm{Im}\, z\leqslant |z|.$$

把复数看成是两个向量之和，也符合两个向量的加法运算．这个和就是平行四边形的对角线$\overrightarrow{Oz}$．

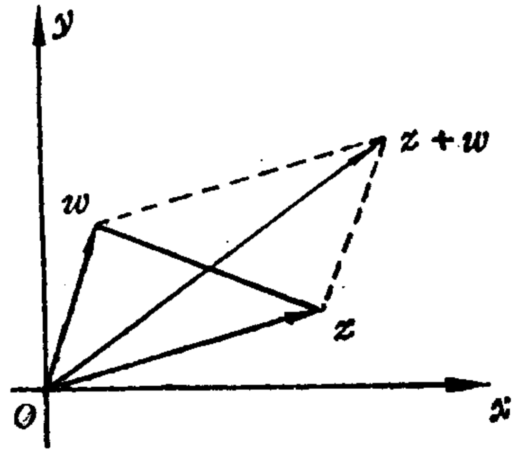

图 1·2

对于两个向量z与$w\in S_z$，差数模

$$|z-w|$$

就是z与w两点之间的距离．（图1·2）

下列不等式，显然成立

$$|z-w|\geqslant|z|-|w|;\quad |z+w|\leqslant|z|+|w|.$$

其中只有当z与w共线且同方向时，等号才成立．

把复数z表示成向量，更可以增加复数的实际意义．例如，河流的水流，设在每一点$(x,\ y)$的速度为V，可以写成复数形式为：

$$V=V_x+iV_y$$

其中V_x与V_y是V的分速度．速度V是分速度之和．

2．复数的极坐标形式

应用直角坐标$(x,\ y)$与极坐标$(\rho,\ \theta)$之间的对应关系：

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

则
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}.$$

$z=x+iy$与$\bar{z}=x-iy$可以分别表示成极坐标的形式：

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\ \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta).$$

应用Euler公式，则得z的指数表示式：

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta},\ \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)=\rho e^{-i\theta}.$$

其中：$\rho=|z|=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$是$z$的模．$\theta$与$(-\theta)$分别称为$z$与$\bar{z}$的