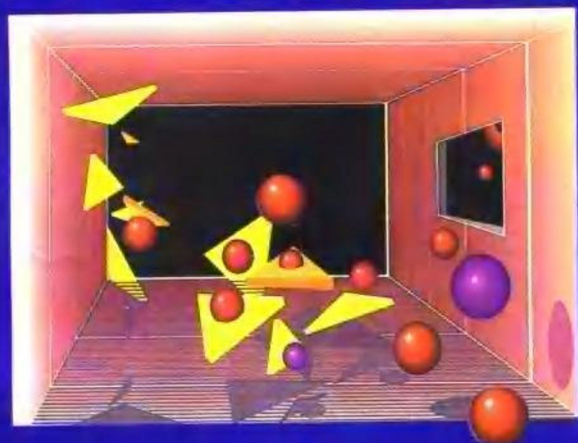


数学思想方法

教学研究导论



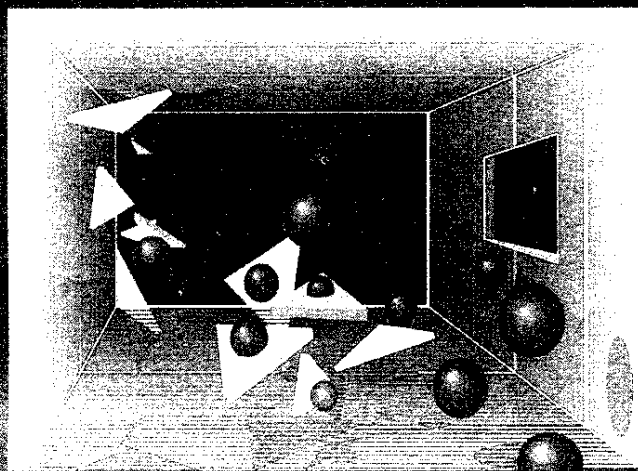
朱成杰 著

SHUXUE
SIXIANGFANGFA
JIAOXUEYANJIUDAOLUN



文匯出版社

数学思想方法 教学研究导论



朱成杰 著

SHUXUE
SIXIANGFANGFA
JIAOXUEYANJIUDAOLUN

文匯出版社

责任编辑:车明玉

封面装帧:周夏萍

数学思想方法教学研究导论

朱成杰 著

文匯出版社出版发行

(上海市虎丘路 50 号 邮政编码 200002)

全国新华书店经销

上海市青浦任屯印刷厂印刷

1998 年 6 月第 1 版 开本:850×1168 1/32

1998 年 6 月第 1 次印刷 字数:247,000

印数:1-3000 印张:9.5

ISBN 7-80531-463-2/G·283

定价:14.00 元

191/30/5

序

张民生

科学知识、科学思想和科学方法是人类知识宝库的三个基本内涵。面对 21 世纪的机遇和挑战,提高全民族的科学文化素质是摆在我们面前的紧迫任务。数学思想方法是科学思想、科学方法的一个重要部分,随着素质教育的实施,数学思想方法教学的重要性已日益凸现出来。

本书力图从数学发展等角度,展示数学思想方法的重要作用。书中论述了数学思想方法教学与素质教育的关系,对数学思想方法教学的规律进行了研究,提出了“数学思想方法训练序”的概念,并设计了对有关数学思想方法进行有序训练的方案,使数学思想方法教学从无序走向有序,把理论研究和教学实践较好地结合起来。

作者从 1989 年起就开始致力于数学思想方法及其教学的研究,前后历经八年,遂成此书,作者为此付出了巨大的辛劳。数学思想方法教学是数学学科进行素质教育的一个重要内容。本书的出版必将对数学素质教育实施和数学教学质量的提高起到促进作用。

数学思想方法教学研究方兴未艾,需要探讨的问题还有很多。本书的出版只是一个良好的开端,但愿有更多的好作品问世。值此新著即将出版之际,乐为之序。

1997 年 12 月

前 言

数学思想方法作为数学教育的重要内容,已日益引起人们的注意,这恐怕与教育愈来愈重视人的能力培养与素质提高有着密切关系。

日本数学家和数学教育家米山国藏在从事多年数学教育研究之后,说过这样一段话:“学生们在初中或高中所学到的数学知识,在进入社会后,几乎没有什么机会应用,因而这种作为知识的教学,通常在出校门后不到一两年就忘掉了,然而不管他们从事什么业务工作,那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法,却长期地在他们的生活和工作中发挥着作用。”倘若我们留意各行各业的某些专家或一般工作者,当感到他们思维敏锐、逻辑严谨、说理透彻的时候,往往可以追溯到他们在中小学所受的数学教育,尤其是数学思想方法的熏陶。理论研究和人才成长的轨迹都表明,数学思想方法在人的能力培养和素质提高方面具有重要作用。

可是,数学思想方法教学的重要性,尚未完全被广大数学教师所认识,这表现在数学教学中只注重数学知识的传授、忽视知识发生过程中数学思想方法的教学的现象依然普遍存在。诚然,按传统方法进行数学教学,也有一些学生掌握了数学思想方法,并且在日后的工作中有所建树。但是,这些学生是靠自己的艰苦努力,经历了一个漫长的摸索过程才能达到如此境界,而且只能是极少的一部分人。我们今天提倡加强数学思想方法教学,其意义在于:促使数学思想方法由盲目的、不自觉的应用向有意识的、自觉的应用转化,大大缩短学生在黑暗中摸索的历程,由只有少数人掌握数学思想方法变为多数人都能掌握,从而使数学教育更好地为提高国民

素质服务,为国家经济建设服务。因此,加强数学思想方法教学研究已成为数学教育改革中一件重要而又迫切的事情。

自1989年起,我们为中学数学教师举办了多期“数学方法论”培训班。通过这门课程的学习,许多老师都认识到,加强数学思想方法教学确实很重要,但是如何在课堂教学中加以实施却缺少办法,又无现成的资料和经验可供参考。于是我们就组织部分学员成立了研究小组,开展数学思想方法教学的研究,经过多年艰苦的探索,终于在数学思想方法的频数分布、数学思想方法训练序、数学思想方法的教学规律等方面取得了一系列成果。何若华、周筱陵、李世廷、赵华毅等老师在课题研究和教学实验中曾作出很多贡献。1994年,在上海市数学教学课题研究活动评比中,我们的研究成果获得了一等奖。1995年,在全国中学数学教育研究优秀论文评比中,我们的论文《关于数学思想方法训练序的研究》获得了一等奖。并先后在《数学教学》、《数学通报》、《数学教育学报》等杂志发表了多篇论文。北京师范大学丁尔陞教授等专家对我们的研究成果给予很高的评价,认为这项研究成果实现了数学思想方法教学从无序向有序的转化,“不仅对改变重结论轻过程,重知识轻方法,重形式轻思想的教学现状,而且对于提高数学教学的思想性很有现实意义”。各地同行纷纷来函索取资料,并希望能尽快出书。但是,我们自己总觉得尚不够成熟。在有关领导和同行们的鼓励鞭策下,又经过两年多时间的研究和写作,遂成此书,前后历时八年之久。

全书共六章,可以分成两大部分。前面三章为第一部分,通过“数学思想方法的两个源头”、“数学思想方法与数学创造”、“数学思想方法与人类文化发展”的论述,可以从一个比较广阔的视野看到数学思想方法的重要意义。后面三章为第二部分,在第四章和第五章中,对数学思想方法教学的有关问题进行了探讨。在第六章中,编制了按新教材实施数学思想方法训练序的材料。我们努力将

一定的理论阐述和较强的实用价值较好地结合起来。书中的部分内容,笔者曾在硕士研究生课程班讲授和有关会议上讲演。本书可作为教育学院培训中学数学教师的教材,也可供师范院校数学系师生、中学数学教师和数学教育研究人员阅读参考。

上海市课程教材改革委员会数学副主编兼编写组组长、《数学教学》常务副主编、华东师范大学数学系教授邹一心先生审读书稿后认为,本书对实施素质教育具有重要的现实意义。书中对数学思想方法从数学史及教育学角度作了精心阐述,追溯其来龙去脉,颇具特色。本书还特别突出了对于一般中学教师较为陌生的一些近代数学思想,体现时代气息,对于教师进修大有必要。数学思想方法训练序的设计是一项开创性的工作,是典型的“做”数学的“再创造”工作,具有很高的科研价值。书中许多章节及例题中,都采用了上海新编教材的内容进行分析,并与全国统编教材作对照,这就为教师顺利使用新教材创造了有利条件。这些评价是对笔者的鼓励和鞭策。邹先生还提出了一些宝贵的修改意见,对本书质量的进一步提高起了很大作用。

在课题研究和本书的撰写过程中,曾得到张奠宙教授、陈昌平教授、邱森教授、顾泠沅博士、陈永明副教授、郁克敏副教授、毛宏德副教授、奚定华特级教师、陈肇曾特级教师、邱万作高级教师等的鼓励与指点,特别是上海市教委副主任、上海市教育学院院长张民生教授,上海市教委师资处领导,上海市黄浦区教育局领导,上海市黄浦区教育学院领导,从我们刚开始研究起,就一直给予热情的鼓励和多方面的帮助,才使这项研究得以长期坚持下来,张民生副主任又从百忙中抽出时间为本书作序,在此谨表示衷心的感谢。

本书参考并采用了一些书报杂志中的观点和资料,书后未能全部列出文目。在此,谨向有关作者致谢。

感谢何若华高级教师为第六章编写了部分初稿。本书得以出版,还要感谢文汇出版社的领导和编辑同志的大力帮助。

关于数学思想方法及其教学的研究方兴未艾,许多问题尚待深入探讨。在这种情况下写成此书,难免失之偏颇,加上笔者学识所限,不足之处一定存在,恳请读者多多赐教。

朱成杰

1997年12月于上海

目 录

第一章 数学思想方法的两个源头	(1)
第一节 方法与数学思想方法.....	(1)
第二节 古希腊的《几何原本》.....	(2)
一、内容简介	(2)
二、《几何原本》思想方法的特点	(5)
三、《几何原本》思想方法的深远意义	(7)
第三节 中国的《九章算术》.....	(8)
一、内容简介	(8)
二、《九章算术》思想方法的特点	(9)
三、《九章算术》思想方法的重大影响	(13)
第二章 数学思想方法与数学创造	(15)
第一节 公理化方法对数学的巨大贡献	(15)
一、从《几何原本》到《几何基础》	(15)
二、公理化方法的意义和作用	(18)
第二节 坐标方法与解析几何	(20)
一、笛卡儿的坐标方法与几何算术化	(20)
二、解析几何的划时代意义	(24)
第三节 流数法与微积分学	(28)
一、用流数法创立微积分	(28)
二、微积分思想对数学发展的影响	(30)
第四节 群论方法与代数结构研究	(32)
一、群论与高次方程根式解	(32)

二、群论思想对数学发展的意义	(34)
第五节 抽象化方法与拓扑学	(37)
一、七桥问题	(37)
二、抽象化方法与拓扑学	(40)
第三章 数学思想方法与人类文化发展	(43)
第一节 演绎方法的社会功能	(43)
一、理性旗帜的高扬	(43)
二、维新变法的思想武器	(46)
第二节 非欧几何与思想解放	(48)
一、对第五公设的思索	(48)
二、非欧几何的创立	(49)
三、绝对真理的动摇	(51)
第三节 用统计观点看世界	(53)
一、数理统计学的兴起	(53)
二、用统计观点看世界	(57)
第四节 模糊数学不模糊	(59)
一、模糊现象无处不在	(59)
二、模糊数学拓广了人类认识领域	(60)
第五节 计算机与信息时代	(64)
一、数学对现代文明的最大贡献	(64)
二、计算机应用举例	(66)
第四章 数学思想方法与素质教育	(74)
第一节 数学教育效益刍议	(74)
一、我国数学教育的成绩	(74)
二、对数学教育效益的思考	(76)
第二节 数学思想方法与素质教育	(80)
一、数学知识与数学思想方法	(80)
二、数学素质教育	(82)

三、加强数学思想方法教学	(88)
第五章 数学思想方法教学	(98)
第一节 数学思想方法频数分布的启示	(98)
一、全国统编教材数学思想方法的频数分布	(98)
二、上海新编教材数学思想方法的频数分布	(100)
第二节 数学思想方法训练序研究	(102)
一、数学思想方法训练序	(102)
二、数学思想方法形成期设计	(109)
第三节 数学思想方法教学的原则及注意事项	(113)
一、数学思想方法教学的原则	(113)
二、数学思想方法教学的注意事项	(122)
第六章 数学思想方法训练序设计	(129)
第一节 抽象概括方法训练序	(130)
第二节 化归方法训练序	(146)
第三节 数形结合方法训练序	(146)
第四节 数学模型方法训练序	(157)
第五节 归纳猜想方法训练序	(174)
第六节 演绎法训练序	(184)
第七节 分类方法训练序	(196)
第八节 类比方法训练序	(203)
第九节 特殊化方法训练序	(210)
第十节 换元法训练序	(220)
第十一节 待定系数法训练序	(230)
第十二节 配方法训练序	(239)
 附录 A 待定系数法	
——一节数学思想方法形成课实录	(248)
附录 B 若干数学思想方法简介	(255)

一、抽象概括方法	(255)
二、化归方法	(258)
三、数形结合方法	(262)
四、数学模型方法	(265)
五、归纳猜想方法	(270)
六、演绎方法	(275)
七、分类方法	(277)
八、类比方法	(279)
九、特殊化方法	(284)
十、完全归纳法	(288)

第一章 数学思想方法的两个源头

第一节 方法与数学思想方法

方法是一个元概念,它和点、线、面、体、运动、集合等概念一样,不能逻辑地定义,只能概略地加以描述。

汉语中“方法”一词的起源可追溯到《墨子》一书,原意是量度方形之法。《墨子·天志中》说:“中我矩者谓之方,不中我矩者谓之不方。是以方与不方皆可得而知之。此其故何?则方法明也。”这里“法”的含意是指一种“标准”和“规则”。后来,人们用“方法”这个词来翻译英语词“method”,才出现了我们现代使用“方法”的意义。

在英语等西方语言中,“方法”一词都源于希腊语,其本意是指“沿着某条道路行进”。现代人所理解的方法基本上并未离开这个意义。我们通常将人们在认识世界和改造世界的活动中所采取的方式、手段、途径等称为方法。这里的“方式”、“手段”、“途径”,与“方法”几乎是同义反复,算不上严格的定义。

尽管如此,人们对“方法”的含义却所见相同,并未发生什么大的争论。传说中有个神仙能够点石成金,他把点成了金子的石头赐给求助于他的穷人。但是,有一个求助于他的人,总是摇头,表示不要金子,原来他想要神仙的手指头。我们所说的方法就相当于那个能点石成金的手指头。

我们将学习数学、研究数学、讲授数学和应用数学的活动统称为“数学活动”。所谓数学方法,顾名思义,就是人们从事数学活动时所使用的方法。随着数学方法的丰富发展,又产生了专门研究数

学方法的学问。数学方法论就是对古往今来的各种数学方法进行概括、分类、评价以及如何运用加以研究的学问。

最后,再简述一下数学思想和数学方法之间的关系。人们常用数学思想来指称某些具有重要意义、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果。例如坐标思想、极限思想、概率统计思想等,可是对这些例子来说,将思想换成方法同样适用。一般地说,数学思想是人们对数学内容的本质认识,是对数学知识和数学方法的进一步抽象和概括,属于对数学规律的理性认识的范畴。而数学方法则是解决数学问题的手段,具有“行为规则”的意义和一定的可操作性。同一个数学成果,当用它去解决别的问题时,就称之为方法;当论及它在数学体系中的价值和意义时,则称之为思想。例如“极限”,当用它去求导数,求积分时,人们就说是极限方法。当我们讨论它的价值,即使无限向有限转化时,将变化过程的趋势用一个数值加以表示时,就讲极限思想了。为了将这两重意思合在一起,于是也就有了“极限思想方法”之说。M. 克莱因(M. Klein)的巨著《古今数学思想》,其实说的都是“古今数学方法”,只不过从数学史角度看,作者更加注重那些数学大师们的思想贡献、文化价值,因而才称之为数学思想。

欲将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的,因此,人们常常对这两者不加区分,而统称为数学思想方法,这样会显得更为方便。

第二节 古希腊的《几何原本》

一、内容简介

《几何原本》是古希腊学者欧几里得(Euclid,约公元前 330—275 年)的代表著作。欧几里得生于雅典,是柏拉图的学生,后来被

托勒密一世请到亚历山大里亚城主持数学学派的工作。《几何原本》是对古希腊数学的整理和系统化的总结,是古希腊数学思想的杰出代表,堪称古希腊数学的百科全书。传说托勒密王有一次问欧几里得,是否有比钻研《几何原本》更简捷的学习几何的途径,他断然回答:“几何中没有王者之路。”

《几何原本》共 13 篇,第一篇用 23 个定义提出了点、线、面、圆和平行线等概念。接着是五个公设:

- (1) 从任意一点到任意一点可作直线。
- (2) 有限直线可以继续延长。
- (3) 以任意一点为中心及任意的距离(为半径)可以画圆。
- (4) 所有直角都相等。

(5) 同一平面内一条直线和另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角的和小于两直角,则这两直线经无限延长后在这一侧相交。

在五个公设中,第五个公设不像前四个那样显而易见,这就是后来引起许多纠纷的所谓“欧几里得平行公设”,或简称第五公设。大家很快就认为,欧几里得把这一命题列为公设,不是因为它不能证明,而是找不到证明。这实在是《几何原本》这部不朽巨著的白璧微瑕。从《几何原本》的问世到 19 世纪初,许多学者投入无穷无尽的精力,力图洗刷这唯一的“污点”,最后导致非欧几何的创立。

公设之后是五个公理。近代数学不区分公设和公理,凡是基本假定都是公理。《几何原本》后面各篇不再列出其它公理。这一篇在公理之后,用 48 个命题讨论了关于直线和由直线构成的平面图形的几何学,其中第 47 命题就是著名的勾股定理:“在直角三角形斜边上的正方形(以斜边为边的正方形)等于直角边上的两个正方形。”

第二篇包括 14 个命题,主要是用几何的语言叙述代数的恒等式。如第 4 命题“将一线段任意分为两部分,在整个线段上的正方

形等于在部分线段上的两个正方形加上以这两个部分线段为边的矩形的二倍”，就相当于代数恒等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。第11命题是分线段为中末比，后来被称为黄金分割；第12、13命题相当于余弦定理。

第三篇有37个命题，讨论圆、弦、切线、圆周角、内接四边形及与圆有关的图形。

第四篇有16个命题，包括圆内接与外切三角形、正方形的研究，圆内接正多边形(5边、10边、15边)的作图。

第五篇是比例论，给出25个命题。

第六篇讨论比例理论的几何应用，共有33个命题。

第七、八、九三篇是数论，共有102个命题，也完全用几何的方式叙述。第九篇第20命题是数论中的欧几里得定理：素数的个数无穷多。

第十篇是篇幅最大的一篇，包括115个命题，占全书 $\frac{1}{4}$ ，主要讨论无理量(与给定的量不可通约的量)，但是只涉及相当于 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 之类的无理量。

第十一篇讨论空间的直线与平面的各种关系，共有39个命题。

第十二篇利用穷竭法证明了“圆面积的比等于直径平方的比”，还证明了棱锥之间、圆锥之间、圆柱之间和球体之间的体积之比。值得指出的是，欧几里得在任何地方都没有给出圆面积、球体积等的计算。这并非他不知道早已存在的近似计算方法，而是在他看来，这种计算属于实际测量而不属于理论几何。本篇包括18个命题。

第十三篇共有18个命题，主要研究五种正多面体，并且证明了(凸的)正多面体不能多于五种。

二、《几何原本》思想方法的特点

1. 封闭的演绎体系

《几何原本》是最早形成的演绎体系。在形式上,它是由少数不定义概念,如点、线、面(虽然《几何原本》中“定义”了这三个概念,但后来的推演中却没有利用这些定义,而且这些定义只是几何形象的直观描述,严格地说并不能算作定义。因此一般仍将这三个概念看作《几何原本》中的不定义概念)等等,和少量不证明的命题(公理和公设)出发,按一定的逻辑规则,定义出该体系中的所有其它概念,推演出所有其它的命题(定理)。

在《几何原本》中,公理是最一般的命题,它们是其后的全部演绎推理的前提。《几何原本》中的所有其它命题都是由公理推导出来的。除了推导时所需要的逻辑规则外,《几何原本》的由一系列公理、定义、定理等构成的数学理论体系,原则上不再依赖其它东西。因此,从理论发展形式看,《几何原本》是一个封闭的体系。当然,《几何原本》在证明某些命题时确实运用了除公理和逻辑之外的“直观”。但是那只是个别地方,并不影响整个体系;而且那正是作为《几何原本》的“缺陷”而受到人们的批评,后来人们不断地在该体系中剔除直观,从而建立起更严格的数学理论体系,其指导思想正是源于《几何原本》。

另外,从《几何原本》与当时的社会生产、生活的关系看,它的理论体系回避任何与社会生产现实生活有关的应用问题,因此对于社会生活的各个领域来说,它也是封闭的。

所以,从本质上说,《几何原本》是一个比较完整的、相对封闭的演绎体系。

2. 抽象化的内容

《几何原本》中研究的都是一般的、抽象的概念和命题,它所探讨的是这些概念和命题之间的逻辑关系,从一些给定的概念和命