

数学概念和 程序的获得

理查德·莱什 玛莎·兰多 著
孙昌识 苗丹民等译 刘凡 校



山东教育出版社

数学概念和程序的获得

理查德·莱什 著
玛莎·兰多

孙昌识 等译
苗丹民

刘 凡 校

山东教育出版社

1990年·济南

鲁新登字2号

数学概念和程序的获得

理查德·莱什 著
玛莎·兰多

孙昌识 苗丹民 等译

刘 凡 校

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东人民印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本 14.5印张 316千字

1991年11月第1版 1991年11月第1次印刷

印数 1—1,000

ISBN7—5328—1092—5/G·922

定价 5.05 元

前 言

本书是哈里·贝林(Harry Beilin)主编的发展心理学丛书《赫伯特·金斯伯格(Herbert Ginsburg)所著《数学思维的发展》》一书的姊妹篇。这两本书都是介绍当前数学学习和问题解决领域中一些大有前途并且成果卓著的研究。作者是各个研究领域的学科带头人。他们介绍了各自专业领域目前的学术发展水平和特征,说明了他们的研究在哪些地方反映了这些特征。同时,他们还例举了一项研究或课题来作为当前研究的范例,并且指出未来研究的某些重要方向。

由于在心理学的几个分支和数学以及数学教育的交界处一个研究群体已脱颖而出,作者相信及时出版一套丛书能够进一步推动数学教育研究的开展。丛书的每一卷都是从心理学研究和数学教育的研究这两方面的需要来为读者设计的。金斯伯格的书中介绍的那些研究工作,主要是着眼于以心理学的观点探讨数学学习和问题解决,而本书则立意表达数学教育的观点。

心理学观点和数学教育观点之间的差别将在第一章绪论中进行论述。本书中所介绍的数学教育研究,一个特点是强调数学是个具有高度结构性的知识领域;另一个特点是指出了教学的重要作用。这两个特征既是研究目的也是研究所依赖的方法论工具。

卡朋特(Carpenter)和莫瑟(Moser)在第二章回顾了儿童整数计算发展的研究历史,并且介绍了他们自己关于儿童解

答加减法题时所用程序的那些实验研究。下面的三章介绍了儿童有理数概念的发展，分别提供了三种不同的但在许多方面又是相互补充的研究途径。卡普鲁斯(Karplus)，普洛斯(Pulos)和斯特奇(Stage)研究了青少年比例推理模式的发展，搜集了儿童在比例推理作业中的个别差异、性别差异、年级水平差异，以及态度与成绩间的相关等数据(第三章)。贝尔(Behr)、莱什(Lesh)、波斯特(Post)和西尔弗(Silver)进行的有理数研究(第四章)，包括大规模调查、小组教学及针对有理数理解所进行的理论教学效果的细致观察。在第五章，维格诺德(Vergnaud)介绍了三类乘法结构(度量的同构、量度的积、复合比例)，并且报告了七年级课堂教学实验的结果。

第六章和第七章是关于空间和几何的研究。在第六章中，毕晓普(Bishop)评述了这个领域中的两个主要突破：*(a)* 儿童对空间和几何概念的理解；*(b)* 空间能力和视觉加工。第七章是霍弗(Hoffer)的一个综述，他介绍了在苏联和美国进行的一项研究和课程发展计划，这项计划完全建立在范·海勒(Van Hiele)的几何学习阶段和思维发展水平的基础上。

最后的三章集中在数学问题解决上。莱斯特(Lester)在第八章详述了数学问题解决的复杂性，并且回顾了数学教育研究者们企图建立一个知识获得的固定框架时取得的缓慢进展。接着他介绍了过去和最近在印地安那大学进行的一些研究，并且为今后的研究提出几个关键问题，其中包括提倡在各个不同风格的研究者之间展开更广泛的对话。

莱什(Lesh)、兰多(Landau)和汉密尔顿(Hamilton)在第九章中定义并解释了一个理论建构——概念模式，这个模式主要是涉及当前应用性数学问题解决的那些研究项目。

在第十章，舍恩菲尔德（Schoenfeld）描述了大学生中专家和生手问题解决行为的“控制”特征，并且说明了控制或“执行”动作对解题成败的影响。

本书中所涉及的数学内容包括从小学生的早期数概念到大学水平的复杂问题解决。因此，本书将会使数学教师以及K—B级数学教师的培训人员感兴趣，同样，数学教育研究者以及数学教育专业的研究生也会对本书产生兴趣。

对克里斯廷·达菲（Christine Duffy）谨表谢意，她在本书手稿的整理工作中给予了很大帮助。

（孙昌识译，刘凡校）

目 录

第一章 绪论	1
第二章 加法和减法概念的获得	8
引言	8
问题难度的研究	9
皮亚杰的研究	13
当代研究	16
问题结构的分类	17
解答过程	21
问题结构和解答过程	27
加减法程序的发展	34
发展维度间的关系	40
解决应用题的模式	42
讨论	44
第三章 儿童的比例推理	47
背景	47
皮亚杰的研究	48
比例推理的研究概观	49
问题研究	55
柠檬汁测验——个别谈话	56
方法	57
结果和讨论	61

认知与态度的相互关系	69
过去的研究	69
变量	70
方法	73
结果和讨论	73
结论	81
与前人研究的关系	81
比例推理的理论	84
教学应用	89
过去的研究	89
新的方向	91
附录	95
第四章 有理数概念	100
有理数概念的数学分析和课程分析	102
整体与部分和度量量子结构	102
作为比的有理数	105
有理数作为表示除法运算及作为商域中的元素	105
作为算子的有理数	106
总结	108
有理数课程方案	109
理论基础	110
方案的主要成分	116
知觉线索和儿童的思维品质——一项课题研究	120
定义	122
知觉分散物作业导致的结果	125
讨论	135
未来研究的方向	135

理论模型的改进	135
口头语言在促进数学学习中的作用	136
操作材料在建立问题模型中的作用	137
分数单位方法在有理数学习中的重要性	138
有理数研究中其它一些重要结果	139
第五章 乘法结构	141
初步分析	143
度量的同构	143
度量的积	149
复合比例	155
实验	157
同构、乘积与复合比例	158
按比例计算题的各种程序	160
程序	164
体积——一个复杂的概念	169
教学实验	175
进一步的分析和实验	184
分数、比例和有理数	184
维度分析：线性函数和 n 维线性函数	196
向量空间	198
小结	199
第六章 空间与几何	201
意义和理解	203
能力和过程	210
巴布亚——新几内亚儿童的空间理解及其过程	217
结果分析	226

未来研究的方针	231
意义理解	231
能力	233
小结	234
第七章 建立在范·海勒思想基础上的研究	235
引言	235
洞察力	235
思维水平	236
学习的阶段	236
范·海勒夫妇的工作	237
苏联的研究	240
美国早期的研究	241
美国当代的研究	244
俄勒冈州的课题：对儿童几何能力发展的评估	244
布鲁克林区的课题：因奈尔市学校青少年的几何思维	245
芝加哥的课题：在中学几何课上认知的发展和成就	246
观察报告	247
语言	247
知觉	248
推理	249
教材和教学环境	251
联系的水平	252
范·海勒模型的其它方面	253
思维水平的范畴	253
作为函子的学习阶段	255
射：关系	256
未来的工作	258

第八章 问题解决研究的现状和趋势.....	262
引言.....	262
数学问题解决的性质及其研究.....	265
数学问题解决研究的总貌.....	267
印地安那大学的研究.....	277
在解决问题过程中学会解决问题.....	280
其他研究.....	285
今后研究的问题.....	288
对理论的需求.....	288
作业的多样性.....	289
最佳行为模型与普通行为模型.....	291
问题解决的教学.....	293
教师的作用.....	294
问题解决研究的特性.....	294
回顾.....	295
第九章 概念模式与问题解决.....	299
概念模式.....	300
应用性问题解决研究的背景.....	302
概念的内在网络.....	306
概念体系.....	307
表征系统.....	308
模式加工机制.....	309
关于有理数作业的个别交谈.....	310
被试.....	310
个别交谈.....	311
问题.....	311
结果与讨论.....	318

加法应用题	320
形象(馅饼)加法题	323
“真实的”(蛋糕)加法题	328
巧克力糖豆加法题	331
奎森耐尔棒加法题	333
面积题	334
乘法题	334
乘法计算题	335
乘法应用题	335
形象的乘法题	336
对上述讨论的总结	338
有理数书面测验的结果	341
技术数据	343
结果讨论	344
表征形式转化的难度序列	344
最容易的题和最难的题	346
从一个年级到另一个年级的飞跃	348
作业变量的可加性	349
在书面测验中的概念模式加工	350
总结	353
附录有理数概念的评估(CA)	356
第十章 数学问题解决中的阶段性和统筹性决策	391
引言	391
策略	391
问题解决技能的特性	392
导论	394
两份口语报告的非正式分析	398
问题解决口语报告框架的宏观分析	403

阶段及相关问题.....	408
一篇口语报告的完整性分析	412
某些实验结果	417
讨论.....	423
附录A: 口语报告 1	425
附录B: 口语报告 2	430
附录C: 调查记录 3	436
附录D: 调查记录 4	445
附录E: 调查记录 5	449

第一章 绪 论

理查德·莱什

玛莎·兰多

本书从心理学和数学教学的一致性出发,按照“数学教育”的观点,为读者提供当今数学学习和数学问题解决领域中一些大有前途的研究成果。一个有特色的数学教育框架是怎样构建的呢?答案是既强调数学本身的内容,又强调教育过程(如数学教材的改进)。这二者之所以重要,在于它们制约着研究问题的提出,基本假设的构建,研究程序的制定以及对结论的表述。

过去,数学教育的研究者们从别的领域,主要是从心理学研究领域借用理论观点和研究方法论(如发展心理学和信息加工心理学)。但在本书的部分章节中介绍的数学教育研究方法已经日趋成熟,使得“学说构建”取代了“学说借用”。例如,莱斯特在第八章中强调了对问题解决过程进行基础理论研究的动向。借用方法的做法在以前是有益的,但往往与建立在新的理论观点之上的目的和构思不相协调。本书中讨论的那些主要的数学教育研究计划,其研究的方法论以及注意知识与提高数学教学的关系都已处于一个新的阶段上。

许多用颇有前途的方法与某些教学干预形式相结合的研

究，已经进入了累积资料的过程。例如，贝尔、莱什、波斯特和西尔弗的有理数研究就广泛采用了苏联风格的教学实验法（kantowski, 1978）。毕晓普（第六章）和霍弗（第七章）的几何研究表明，学生的几何成绩与有无早期教学和教学质量有关。在卡朋特和莫瑟的早期数概念研究中（第二章），在卡普勒斯、普洛斯和斯特奇的比例推理研究中（第三章），在维格诺德的乘法结构的研究中（第五章）都提出了明确的假设，即作业行为是内部模式和外部刺激的函数，那些内部模式（如数学概念）在很大程度上又是直接教学的产物。

运用教学性研究方法时须小心谨慎，因为研究想要描述的被试者往往会发生很大变化，这就要分别修改研究情境以适应不同的被试个体。因此提出了关于标准化的问题。另一方面，如果研究所依赖的理论是假设两个学生在解释同一问题时经常采用截然不同的方式（经过选择并用于处理问题的某些内部模式），那么整个标准化的想法都可能是一种不合适的构思。在数学教育研究中，通常假设不同的学生在解释一个简单明了的问题时不仅可能采用完全不同的方式，而且也可能采用表面上似乎相同但却出自截然不同的解答思路。

为了获得儿童数学概念理解和解题程序如何发展的全貌，临床谈话技术的使用反映了对标准化关注程度的降低。研究者们发现，预先制定出与被试者的交谈是一种有益的方法，这种交谈或是采用比较自由的形式，或是从一系列标准问题开始，然后根据交谈对象的反应随时改进问题。这种随机提问的方式可以利用一套或一系列问题来辨析产生答案的加工过程，确认根据概念作出判断时采用的有关运算系统。

本书中介绍的研究多利用正规数学体系的特征设计作业，

用以探索概念模式的结构特征、数学理解，或学生用于解释和处理问题情境的内部“程序”。例如，莱什，兰多和汉密尔顿（第九章）设计的作业组出自对同型结构的特征分析，同时对所有作业的共同变异源都作了研究。维格诺德（第五章）强调在研究相互关联的概念获得时，要注意规范数学结构的重要性。他对乘法结构的分析和分类形成了他对法国七年级学生乘积和比例的研究。卡朋特和莫瑟（第二章）代表了另一类研究的风格，他们研究的是程序运用和内容理解之间的关系。在早期的数概念研究中，相应的加工过程包括计数或表象能力，以及各种计算过程或问题解决程序。

本书中报告的多数研究的目标是：(a) 确认学生在各种数学概念和程序（如有理数、比例、基本数概念、空间和几何概念等）上的初始概念形成过程；(b) 研究学生头脑中这些概念联结而成的概念结构和正规数学概念结构之间的异同；(c) 描述这些概念化过程怎样逐步演变直至成熟；(d) 辨别影响发展过程的种种因素。这些“概念分析”与一般的（即非教材性的）心理学研究惯常采用的“作业分析”和“儿童认知特征分析”完全不同，但这三种分析方法之间又存在着明显的联系。研究程序的适用性和概括化程度往往取决于选择哪一种分析作为主要的研究手段。

对儿童发展的研究主要集中在：(a) 认知能力，它在学习各种教材时都是（或假定是）共同的；(b) 在主要的认知改组阶段（约2岁，6~7岁和青春前期）前后，一般认知能力的变化；(c) 多数学生“自发地”而不是通过教学形成的概念。

相比之下，追踪某一概念发展的数学教育研究很可能着眼

于下列中的一个方面：(a) 在思维的具体阶段和形式阶段间的中间水平上形成的概念，以及运算能力中有关概念的变化；(b) 促使某一概念从一种理解水平向另一水平转化或产生转化的因素和过程；(c) 与内容理解有关的程序和能力；(d) 非自然产生的概念，这里的自然指概念不是靠人为的(如，教学的)经验帮助而获得的。因此，强调分析学生认知特征的研究往往要产生出一套术语(如前运算、冲动、场依存性等等)，这些术语标志着不同儿童的认知特征，而且这些研究所注意的认知特征，又往往被认为是通过教学也难以改变的或根本不可能改变的。概念间(或反映同一概念的作业间)的差异往往被作为没意义的“水平差异”而忽视。

概念分析强调儿童“概念”(即某一概念的特定概念化过程中儿童的可预期行为)的概括化特征，而不是强调儿童本身。此外，研究作业间的差异对于概念分析是很重要的。对于那些最终目的是为学生设计出更好的教学过程的研究人员来说(在不常能获得实验证据的情况下)，通过理论分析提出恰当的概念序列，作业序列以及教学模式是十分必要的。在存在两个概念(或一个概念的两种概念化过程或一个概念的两种模式)时，要是能够预测哪个概念更简单、更具体、更容易或更直观一些，是非常重要的。例如，霍弗在他的研究(以范·海勒夫妇的研究为基础)综述中，明确地强调各种空间几何概念发展的中间阶段，强调影响同构作业间变异产生的因素，以及促使学生从概念理解的一个阶段向另一阶段发展的机制(第七章)。

对于本书中介绍的许多研究来说(上述的)，一个目的是探索学生对各种数学概念和程序初始理解的性质。这些概念中有许多都不是“自然”形成的。关于这一点，有理数概念可