高等学校财经类专业核心课程
《经济数学基础》教学参考丛书

第二分册

线性代数学习指导

主　编　胡显佑
副主编　王新民

南开大学出版社

高等学校财经类专业核心课程

《经济数学基础》教学参考丛书

第二分册

线性代数学习指导

主 编 胡显佑

副主编 王新民

南开大学出版社

内 容 提 要

本书是受国家教委委托编写的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学参考丛书之一，按照全国统一教学大纲和指定教材编写．内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型共六章．每章又包括内容提要、典型例题分析、教材习题选解或提示、自我检测题和自检题答案．全书选材针对性较强，能起到指导学生学习《经济数学基础》的作用．

本书可供高等院校财经类专业本、专科师生、自学考试考生使用．

线性代数学习指导
胡显佑　主编

南开大学出版社出版
（天津八里台南开大学校内）
邮编 300071 电话 23508542
新华书店天津发行所发行
天津宝坻第四印刷厂印刷

1997年8月第1版　1997年8月第1次印刷
开本：850×1168　1/32　印张：7.75
字数：192千　印数：1－5000

ISBN 7-310-00995-9

F·185　定价：9.80元

《经济数学基础》教学参考丛书编委会

出版说明

受国家教委委托，中国人民大学和北京大学曾共同承担“高等学校财经类专业核心课程”之一的《经济数学基础》的“教学大纲”和“教材”的编写工作.经国家教委高等教育司审定后，“教学大纲”和“教材”分别于1990年和1992年由四川人民出版社正式出版.为了保证“教学大纲”的顺利实施和有利于“教材”的教与学，为了提高《经济数学基础》这门核心课程的教学质量，国家教委继续委托中国人民大学和北京大学，组织全国部分财经院校的数学教师，编写《经济数学基础》教学参考丛书(以下简称《丛书》).经两校与部分财经院校协商，并经国家教委高等教育司批准，成立了以龚德恩为主编，范培华、胡显佑、周概容、朱幼文为副主编的《丛书》编委会.编委会于1992年底提出了编写《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率统计学习指导》、《经济数学基础习题课讲义》、《经济数学基础习题集》和《经济数学基础教学参考文选》等六本参考书的《丛书》编写计划，并将编写任务分配给全国二十余所院校.经过承担《丛书》编写任务的各院校数学教师的共同努力，“学习指导”三本书已经顺利完稿，即将由南开大学出版社出版.“习题课讲义”和“习题集”的书稿已基本完成，正在统稿过程之中，而“教学参考文选”则因各种原因，未能编写，只好有待将来再行补救了.

参加编写《微积分学习指导》的教师是：刘祖佑(第一、二章)，郑万伏、周长菊(第三、四章)，周道林(第五、六章)，罗先照、王稳遐(第七章)，童丽珍(第八章)，周继高(第九、十章).由龚德恩任主编，刘序球、张广梵任副主编.书稿收齐后，由龚德恩进行初审、初

纂，再由刘序球、周道林进行二审、三纂，最后由张广梵、龚德恩进行三审、三纂，并定稿.

参加编写《线性代数学习指导》的教师是：刘文龙（第一、二章），王隽（第三章），王新民（第四章），胡显佑（第五章），徐智政（第六章）. 由胡显佑任主编、王新民任副主编. 书稿由胡显佑、王新民总纂、定稿.

参加编写《概率统计学习指导》的教师是：王好民（第一章），单立波（第二章），张建华和周概容（第三—七章）. 周概容任主编，单立波任副主编，负责书稿的总纂和定稿.

三本《学习指导》均按"教学大纲"的要求和"教材"的体例进行编写. 为了使"学习指导"真正起到指导学生学习《经济数学基础》的作用，收到应有的效果，各参编教师均作了很大努力. 他们在编写过程中除参阅了部分国内有关书籍外，主要是总结个人和其他教师在教学过程中的实践经验，针对性比较强. 我们希望这三本"学习指导"的先行出版，对提高《经济数学基础》这门核心课程的教学质量，能起到应有的作用.

由于我们缺乏组织编写教学参考丛书的经验，也由于参编教师人数较多，又分散在全国各地，给统稿、定稿带来不少困难. 各书主编和副主编在总纂、定稿时，尽了最大努力，但书中出现不当或错误之处，仍然在所难免，热忱欢迎广大读者不吝指正.

《经济数学基础》教学参考丛书编委会

目　录

第一章　行列式

一　内容提要

1. 排列和逆序

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数为 $n!$ 个.

在一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若 $i_t>i_s$，则称这一对数 i_ti_s 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数. 记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 若 τ 为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列.

在排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换，记为 $(i_t\ i_s)$. 对换改变排列的奇偶性.

在所有的 n 级排列中，奇排列个数＝偶排列个数＝$\dfrac{n!}{2}$

2. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和. 故行列式等于取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素列下标(行下标按自然顺序排列时)的逆序数，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号.

3. 行列式的性质

(1)行列式的行列互换，行列式的值不变.

(2)互换行列式的两行(列)，行列式的值反号.

(3)行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于 k 乘此行列式.

由此可得：

行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面；

如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零.

如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

(4)如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素之和，则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个相加元素之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同.

(5)把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变.

4. 行列式按某一行(列)展开

n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是把第 i 行和第 j 列的元素划去，而得到的 $n-1$ 阶行列式. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 称

为元素 a_{ij}的代数余子式.

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$等于其某一行(列)的所有元素与它的代数余子式的乘积之和.一般,有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D, & i=s\\ 0, & i\neq s\end{cases}\quad(i,s=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D, & j=t\\ 0, & j\neq t\end{cases}\quad(j,t=1,2,\cdots,n)$$

5. 拉普拉斯定理

在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n$),由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D. 即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\qquad\left(t=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

其中 A_i 是子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$对应的代数余子式.

6. 克莱姆法则

(1)若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则这个方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 i 列元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后所得到的行列式.

(2)若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则这个方程组只有零解.

二　典型例题分析

1. 排列与逆序

例1.1　试确定排列42531和524163的奇偶性.

解　从一个排列的左边第二个数算起，与其左边的各数比较，可求出排列中各元素对应的逆序个数. 如下表：

排列	4 2 5 3 1
逆序数	1 0 2 4

；

排　列	5 2 4 1 6 3
逆序数	1 1 3 0 3

因此排列42531的逆序数 $\tau(42531)=1+0+2+4=7$. 故该排列为奇排列.

而 $\tau(5241637)=1+1+3+0+3=8$，因此排列5241637为偶排列.

例1.2　选择 k,l，使 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{5l}a_{3k}$ 成为五阶行列式中取"－"号的项.

解　先将此乘积中各因数的行标（第一下标）按自然顺序排列得到 $a_{14}a_{23}a_{3k}a_{45}a_{5l}$. 则各因数的列标（第二下标）组成排列 $43k5l$. 若它为奇排列，则这一项应取负号. 显然，k、l 只能取1，或2. 设 $k=1$，$l=2$，则 $\tau(43152)=6$ 为偶数. 经一次对换，即设 $k=2,l=1$，则 $\tau(43251)=7$；此时 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{51}a_{32}$ 是五阶行列式中取负号的项.

例1.3　写出四阶行列式中所有带负号并且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的

项.

解 在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，含 $a_{11}a_{23}$的一般项$(-1)^{\tau(13ps)}a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4s}$，这里的 p,s 是2、4的所有排列，即24或42. 因此含 $a_{11}a_{23}$的项有两项. 即 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$和$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$. 显然，带负号的项只有$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

本章的重点是行列式的计算，下面各例说明行列式的各种计算方法.

2. 行列的计算

例1.4 试用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4与 x^3项的系数.

解 由于行列式的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

要出现 x^4的项，则 a_{ij_i}均需取到含 x 的元素. 因此含 x^4的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$$

该项的系数为10.

类似的分析可知，含 x^3的项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$$

和 $$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$$

故含 x^3 项的系数为$(-2)+(-3)=-5$.

例1.5 试用定义计算下列行列式

(1)
$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix},$$
(2)
$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式定义,D_n 的展开式的一般项$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$中,仅当 $j_1=n-1,j_2=n-2\cdots,j_{n-1}=1,j_n=n$ 时,对应的项不等于零.因此

$$D_n=(-1)^{\tau[(n-1)(n-2)\cdots 1n]}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$$
$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

(2)类似于(1)的分析,求出 D_4中不为零的项,即

$$D_4=(-1)^{\tau(1423)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+(-1)^{\tau(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$$
$$=(-1)^2\times1\times(-1)\times1\times1+(-1)^2a\times2\times1\times2$$
$$=4a-1$$

例1.6 计算下列行列式

(1)
$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
(2)
$$D_n=\begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$

解 (1)注意到每行元素之和均为3,将第2列到第4列均加到第一列上.得

$$D_4=\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&0&1\\3&0&1&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\ \times(-1)$$

$$=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-3$$

(2)类似于(1)的方法，各列均加至第一列，并提出公因子，得

$$D_n=(na-x)\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\1&a-x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&\cdots&a-x\end{vmatrix}\ \times(-1)$$

$$=(na-x)\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\0&-x&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&-x\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(na-x)x^{n-1}$$

小结：当行列式每行(列)元素的和均相等时，可把行列式的各列(行)都加到第一列(行)上，提出公因子后再化简计算.

例1.7 解方程

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1-x&1&\cdots&1\\1&1&2-x&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&(n-1)-x\end{vmatrix}=0$$

解法一 令方程左边的行列式为 $f(x)$. 由 n 阶行列式的定义可知，$f(x)$是关于 x 的 $n-1$次多项式. 所以 $f(x)$的根最多有 $n-1$ 个. 根据行列式的性质易知

$$f(i)=0 \qquad i=0,1,2,\cdots,n-2$$