

高等学校财经类专业核心课程
《经济数学基础》教学参考丛书

第二分册

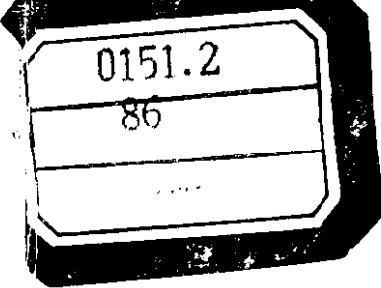
线性代数学习指导

主 编 胡显佑

副主编 王新民



南开大学出版社



1737652

高等学校财经类专业核心课程
《经济数学基础》教学参考丛书

第二分册

线性代数学习指导

主编 胡显佑
副主编 王新民

丁卯/己卯/13



南开大学出版社



北师大图 B1353905

内 容 提 要

本书是受国家教委委托编写的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学参考丛书之一,按照全国统一教学大纲和指定教材编写。内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型共六章。每章又包括内容提要、典型例题分析、教材习题选解或提示、自我检测题和自检题答案。全书选材针对性较强,能起到指导学生学习《经济数学基础》的作用。

本书可供高等院校财经类专业本、专科师生、自学考试考生使用。

线性代数学习指导

胡显佑 主编

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学校内)

邮编 300071 电话 23508542

新华书店天津发行所发行

天津宝坻第四印刷厂印刷

1997年8月第1版 1997年8月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:7.75

字数:192千 印数:1—5000

ISBN 7-310-00995-9

F·185 定价:9.80元

《经济数学基础》教学参考丛书编委会

主编 龚德恩

副主编 范培华 胡显佑

周概容 朱幼文

编 委(以姓氏笔画为序)

朱幼文 刘序球 张广梵

单立波 范培华 周概容

胡显佑 龚德恩 彭勇行

熊 烈

出版说明

受国家教委委托,中国人民大学和北京大学曾共同承担“高等学校财经类专业核心课程”之一的《经济数学基础》的“教学大纲”和“教材”的编写工作。经国家教委高等教育司审定后,“教学大纲”和“教材”分别于1990年和1992年由四川人民出版社正式出版。为了保证“教学大纲”的顺利实施和有利于“教材”的教与学,为了提高《经济数学基础》这门核心课程的教学质量,国家教委继续委托中国人民大学和北京大学,组织全国部分财经院校的数学教师,编写《经济数学基础》教学参考丛书(以下简称《丛书》)。经两校与部分财经院校协商,并经国家教委高等教育司批准,成立了以龚德恩为主编,范培华、胡显佑、周概容、朱幼文为副主编的《丛书》编委会。编委会于1992年底提出了编写《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率统计学习指导》、《经济数学基础习题课讲义》、《经济数学基础习题集》和《经济数学基础教学参考文选》等六本参考书的《丛书》编写计划,并将编写任务分配给全国二十余所院校。经过承担《丛书》编写任务的各院校数学教师的共同努力,“学习指导”三本书已经顺利完稿,即将由南开大学出版社出版。“习题课讲义”和“习题集”的书稿已基本完成,正在统稿过程之中,而“教学参考文选”则因各种原因,未能编写,只好有待将来再行补救了。

参加编写《微积分学习指导》的教师是:刘祖佑(第一、二章),郑万伏、周长菊(第三、四章),周道林(第五、六章),罗先照、王稳遐(第七章),童丽珍(第八章),周继高(第九、十章)。由龚德恩任主编,刘序球、张广梵任副主编。书稿收齐后,由龚德恩进行初审、初

纂,再由刘序球、周道林进行二审、三纂,最后由张广梵、龚德恩进行三审、三纂,并定稿.

参加编写《线性代数学习指导》的教师是:刘文龙(第一、二章),王隽(第三章),王新民(第四章),胡显佑(第五章),徐智政(第六章).由胡显佑任主编、王新民任副主编.书稿由胡显佑、王新民总纂、定稿.

参加编写《概率统计学习指导》的教师是:王好民(第一章),单立波(第二章),张建华和周概容(第三—七章).周概容任主编,单立波任副主编,负责书稿的总纂和定稿.

三本《学习指导》均按“教学大纲”的要求和“教材”的体例进行编写.为了使“学习指导”真正起到指导学生学习《经济数学基础》的作用,收到应有的效果,各参编教师均作了很大努力.他们在编写过程中除参阅了部分国内有关书籍外,主要是总结个人和其他教师在教学过程中的实践经验,针对性比较强.我们希望这三本“学习指导”的先行出版,对提高《经济数学基础》这门核心课程的教学质量,能起到应有的作用.

由于我们缺乏组织编写教学参考丛书的经验,也由于参编教师人数较多,又分散在全国各地,给统稿、定稿带来不少困难.各书主编和副主编在总纂、定稿时,尽了最大努力,但书中出现不当或错误之处,仍然在所难免,热忱欢迎广大读者不吝指正.

《经济数学基础》教学参考丛书编委会

目 录

第一章 行列式	(1)
一 内容提要	(1)
1. 排列和逆序	(1)
2. n 阶行列式的定义	(1)
3. 行列式的性质	(2)
4. 行列式按某一行(列)展开	(2)
5. 拉普拉斯定理	(3)
6. 克莱姆法则	(3)
二 典型例题分析	(4)
1. 排列与逆序	(4)
2. 行列式的计算	(5)
3. 克莱姆法则	(17)
三 教材习题选解或提示(习题一)	(24)
四 自我检测题	(29)
五 自检题答案或提示	(32)
第二章 线性方程组	(34)
一 内容提要	(34)
1. 线性方程组的初等变换	(34)
2. 矩阵及其初等变换	(34)
3. 一般的线性方程组的解法	(35)
4. n 维向量及其线性运算	(36)

5. 向量间的线性关系	(37)
6. 向量组的秩	(37)
7. 关于向量间线性关系的一些重要结论	(37)
8. 矩阵的秩	(39)
9. 线性方程组解的判别	(39)
10. 齐次线性方程组解的结构	(40)
11. 非齐次线性方程组解的结构	(40)
二 典型例题分析	(40)
1. 用消元法解线性方程组	(40)
2. 向量间的线性关系和向量组的秩	(44)
3. 线性方程组解的结构	(55)
三 教材习题选解或提示(习题二)	(59)
四 自我检测题	(72)
五 自检题答案或提示	(75)

第三章 矩阵 (77)

一 内容提要	(77)
1. 矩阵的基本运算及性质	(77)
2. 几种特殊的矩阵	(79)
3. 分块矩阵	(79)
4. 可逆矩阵	(80)
5. 初等矩阵	(81)
6. 关于矩阵秩的重要结论	(82)
二 典型例题分析	(83)
1. 矩阵的基本运算,特殊矩阵	(83)
2. 可逆矩阵	(86)
3. 矩阵的秩	(93)
三 教材习题选解或提示(习题三)	(98)
四 自我检测题	(105)
五 自检题答案或提示	(109)

第四章 向量空间	(112)
一 内容提要	(112)
1. 向量空间和线性空间及其子空间	(112)
2. 基与坐标, 基变换与坐标变换	(113)
3. 向量的内积	(114)
4. 标准正交基, 正交矩阵	(115)
二 典型例题分析	(116)
1. 线性空间及其子空间	(116)
2. 基与坐标	(121)
3. 基变换与坐标变换	(130)
4. 标准正交基, 正交矩阵	(138)
三 教材习题选解或提示(习题四)	(149)
四 自我检测题	(153)
五 自检题答案或提示	(155)

第五章 矩阵的特征值和特征向量	(158)
一 内容提要	(158)
1. 矩阵的特征值和特征向量的概念	(158)
2. 矩阵的特征值和特征向量的性质	(158)
3. 相似矩阵	(159)
4. n 阶矩阵与对角矩阵相似的条件	(159)
5. 实对称矩阵的特征值	(159)
6. 非负矩阵	(159)
7. 非负矩阵特征值的性质	(160)
8. 对角优势矩阵	(160)
9. 矩阵级数	(161)
二 典型例题分析	(162)
1. 矩阵的特征值和特征向量	(162)
2. 相似矩阵与矩阵对角化	(169)

3. 实对称矩阵的特征值	(178)
4. 非负矩阵与对角优势矩阵	(181)
三 教材习题选解或提示(习题五)	(186)
四 自我检测题	(189)
五 自检题答案或提示	(192)
第六章 二次型	(194)
一 内容提要	(194)
1. 二次型及其矩阵	(194)
2. 线性替换	(196)
3. 矩阵的合同关系	(197)
4. 化二次型为标准形和规范形	(197)
5. 正定矩阵	(199)
二 典型例题分析	(201)
1. 二次型及其矩阵	(201)
2. 矩阵的合同关系	(204)
3. 二次型的标准形和规范形	(207)
4. 正定二次型与正定矩阵	(220)
三 教材习题选解或提示(习题六)	(230)
四 自我检测题	(235)
五 自检题答案或提示	(236)

第一章 行列式

一 内容提要

1. 排列和逆序

由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \dots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数为 $n!$ 个.

在一个排列 $i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$ 中, 若 $i_t > i_s$, 则称这一对数 i_t, i_s 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数. 记作 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$. 若 τ 为奇数, 则称 $i_1 i_2 \dots i_n$ 为奇排列; 若 τ 为偶数, 则称此排列为偶排列.

在排列 $i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$ 中, 交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置, 称为一次对换, 记为 $(i_t i_s)$. 对换改变排列的奇偶性.

在所有的 n 级排列中, 奇排列个数 = 偶排列个数 = $\frac{n!}{2}$

2. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和. 故行列式等于取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素列下标(行下标按自然顺序排列时)的逆序数, 即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时, 取正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时取负号.

3. 行列式的性质

- (1) 行列式的行列互换, 行列式的值不变.
- (2) 互换行列式的两行(列), 行列式的值反号.
- (3) 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k , 等于 k 乘此行列式.

由此可得:

行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面;
如果行列式中有一行(列)的元素全为零, 则此行列式的值为零.

如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例, 则此行列式的值为零.

(4) 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素之和, 则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个相加元素之一, 其余各行(列)的元素与原行列式相同.

(5) 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上, 行列式的值不变.

4. 行列式按某一行(列)展开

n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是把第 i 行和第 j 列的元素划去, 而得到的 $n-1$ 阶行列式. 记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, A_{ij} 称

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于其某一行(列)的所有元素与它的代数余子式的乘积之和. 一般, 有

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = \begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i \neq s \end{cases} \quad (i, s = 1, 2, \dots, n)$$

或

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = \begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j \neq t \end{cases} \quad (j, t = 1, 2, \dots, n)$$

5. 拉普拉斯定理

在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行 ($1 \leq k \leq n$), 由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D . 即

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t \quad \left(t = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

其中 A_i 是子式 M_i ($i = 1, 2, \dots, t$) 对应的代数余子式.

6. 克莱姆法则

(1) 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则这个方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是把 D 中第 i 列元素换为常数项 b_1, b_2, \dots, b_n 后所得到的行列式.

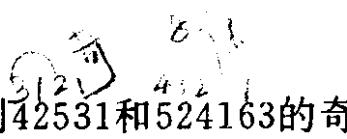
(2) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则这个方程组只有零解.

二 典型例题分析

1. 排列与逆序

 例1.1 试确定排列42531和524163的奇偶性.

解 从一个排列的左边第二个数算起, 与其左边的各数比较, 可求出排列中各元素对应的逆序个数. 如下表:

排列	4 2 5 3 1	排列	5 2 4 1 6 3
逆序数	1 0 2 4	逆序数	1 1 3 0 3

因此排列42531的逆序数 $\tau(42531) = 1 + 0 + 2 + 4 = 7$. 故该排列为奇排列.

而 $\tau(5241637) = 1 + 1 + 3 + 0 + 3 = 8$, 因此排列5241637为偶排列.

例1.2 选择 k, l , 使 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{5l}a_{3k}$ 成为五阶行列式中取“-”号的项.

解 先将此乘积中各因数的行标(第一下标)按自然顺序排列得到 $a_{14}a_{23}a_{3k}a_{45}a_{5l}$. 则各因数的列标(第二下标)组成排列43k5l. 若它为奇排列, 则这一项应取负号. 显然, k, l 只能取1, 或2. 设 $k=1, l=2$, 则 $\tau(43152)=6$ 为偶数. 经一次对换, 即设 $k=2, l=1$, 则 $\tau(43251)=7$; 此时 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{51}a_{32}$ 是五阶行列式中取负号的项.

例1.3 写出四阶行列式中所有带负号并且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的

项.

解 在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中, 含 $a_{11}a_{23}$ 的一般项 $(-1)^{r(13ps)}a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4s}$, 这里的 p, s 是 2、4 的所有排列, 即 24 或 42. 因此含 $a_{11}a_{23}$ 的项有两项, 即 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 和 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$. 显然, 带负号的项只有 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

本章的重点是行列式的计算, 下面各例说明行列式的各种计算方法.

2. 行列式的计算

例1.4 试用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x^5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 3 & \\ x & 1 & 2 & \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

解 由于行列式的展开式中的一般项为

$$(-1)^{r(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

要出现 x^4 的项, 则 a_{ij} 均需取到含 x 的元素. 因此含 x^4 的项为

$$(-1)^{r(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 10x^4$$

该项的系数为 10.

类似的分析可知, 含 x^3 的项为

$$(-1)^{r(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -2x^3$$

和 $(-1)^{r(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = -3x^3$

故含 x^3 项的系数为 $(-2) + (-3) = -5$.

例1.5 试用定义计算下列行列式

$$(1) \quad D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad (2) \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 根据行列式定义, D_n 的展开式的一般项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中, 仅当 $j_1 = n-1, j_2 = n-2 \cdots, j_{n-1} = 1, j_n = n$ 时, 对应的项不等于零. 因此

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n)} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

(2) 类似于(1)的分析, 求出 D_4 中不为零的项, 即

$$\begin{aligned} D_4 &= (-1)^{\tau(1423)} a_{11} a_{24} a_{32} a_{43} + (-1)^{\tau(3124)} a_{12} a_{21} a_{32} a_{44} \\ &= (-1)^2 \times 1 \times (-1) \times 1 \times 1 + (-1)^2 a \times 2 \times 1 \times 2 \\ &= 4a - 1 \end{aligned}$$

例1.6 计算下列行列式

$$(1) \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \quad D_n = \begin{vmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$

解 (1) 注意到每行元素之和均为3, 将第2列到第4列均加到第一列上. 得

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

(2) 类似于(1)的方法,各列均加至第一列,并提出公因子,得

$$D_n = (na-x) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a-x & \cdots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & \cdots & a-x \end{vmatrix} \times (-1)$$

$$= (na-x) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (na-x)x^{n-1}$$

小结:当行列式每行(列)元素的和均相等时,可把行列式的各列(行)都加到第一列(行)上,提出公因子后再化简计算.

例1.7 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

解法一 令方程左边的行列式为 $f(x)$. 由 n 阶行列式的定义可知, $f(x)$ 是关于 x 的 $n-1$ 次多项式. 所以 $f(x)$ 的根最多有 $n-1$ 个. 根据行列式的性质易知

$$f(i) = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$