朱 时 编著

数学分析札记

THE SKETCHBOOK OF

MATHEMATICAL ANALYSIS

数学分析札记

朱 时 编 著

贵州省教育出版社

数学分析扎记
朱 时 编著
责任编辑:张超美
*
贵州教育出版社出版
贵州省地矿局113队地质印刷厂印刷
(新华书店发行)
*
850×1168毫米 32开本 11.7印张 280千字
1994年2月第一版 1994年2月第一次印刷
印数:0001—2000册
ISBN7—80583—465—2/G·463
定价:6.20元

序

我们高兴地看到朱时同志所著《数学分析札记》的出版。

这是一本好书，我们愿向广大读者推荐。

首先，从书中体现出作者对工作认真踏实，彻底深入的科学态度。比如在证明有关 Dedekind 的七个定理等价时，他依次从其中任一个导出其余六个。在证明有关凸函数的七个命题等价时，亦复如比。对数学分析中的一些最基本的问题，如实数、极限、微分、积分…等，一般视为当然的问题，却能独立发现问题，提出问题，分析问题，解决问题，并应用这些问题解决其他有关方面的问题。因此，无论从治学精神，思想方法，及知识内容方面，对广大数学工作者及科学工作者都有很大的参考价值。

还可看出，书中所提出的问题，大多从教材教学中得来，说明作者深入结合教学、剖析教材，在培养学生独立工作能力提高教学质量的基础上，在科研方面亦获丰收。这种结合教学进行科研的作法，我们认为具有方向性的意义。

本书语言精简，论证严密，有法可循，层层启发，有些问题结合了数学的后继课程，有些问题来自较新的参考资料，这可看出作者探索范围的广泛和造诣的深度。

重庆师范学院　张　新

目　　录

§1 实数构造理论

上帝创造了整数，其它一切都是人造的.

Leopold kronecker

数学分析研究的方法是极限，极限的首要问题是存在性. 存在的基础是什么？极限有多种类型，但都源于数列极限. 因此，考察极限存在的基础，自然应从数列极限入手. 一个数列收敛与否，不但与它的构造有关，还与它所在的数集有关. 我们知道收敛数列必是基本数列，即是若$\{a_n\}$收敛，则

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N, \forall\ n, m > N \text{ 有 } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

这表明收敛数列必具有"凝聚"的趋势，但仅此是不足以使$\{a_n\}$收敛的，$\{a_n\}$要收敛，它还必须定义在能使每个基本数列都收敛、并能与数轴上的点保持一一对应的数集上，即应定义在具有完备性与连续性的数集上. 这样的数集只能是实数集. 否则即使是基本数列，也可能没有极限. 例如数列$\{a_n\}$：

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

在有理数集Q内就是如此，因为$\forall\ \varepsilon > 0, \varepsilon \in Q$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，$\forall\ n > N, \forall\ P$ 有

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.\end{aligned}$$

可见$\{a_n\}$是一个有理数基本数列，但显然它在Q内是没有极限的. 实数集为何可使每个基本数列都收敛？这得从实数定义谈起. 而实

数的定义，关键又在于回答什么是无理数. 在数学史上，无理数曾经长时间被认为是一个有理数列的极限. 但是，这个极限，如果是无理数，在逻辑上是不存在的，除非无理数已经有了定义. 这个逻辑上的错误，由于没有引起后继的困难，一直未被察觉. 直到1859年 *Weierstrass* 指出后，数学界才认识到有严格定义无理数进而建立实数理论的必要.

这里值得一提的是，这个在上一世纪就已承认的必要性，在今天，对于数学分析的初学者，往往还是不愿意接受的. 他们觉得，所谓实数，在中学已经解决了：无限循环小数是有理数，无限不循环小数是无理数，总之无限小数是实数，还有什么可怀疑的？应当指出，无限小数作为实数的一种表示是可以的，因为稍后我们将证明它能与实数建立一一对应关系. 但是，如果将它作为实数的定义，那就不合理了. 因为在定义无限不循环小数

$$C_0 \cdot C_1C_2\cdots C_n\cdots$$

是无理数时，其实只是一种想象，事实上是办不到的，谁也写不出一个位数无限的不循环的小数来. 这即是说，无限小数本身不能不定义就采用. 人们实际上是将它看作一个有理数列

$$C_0,\ C_0 \cdot C_1,\ C_0 \cdot C_1C_2,\ \cdots,\ C_0 \cdot C_1C_2\cdots C_n,\ \cdots$$

的极限. 但是这样，势必又要回到“无理数是一个有理数列的极限”那个逻辑错误上去. 因此严格定义无理数的工作是无论如何也不能回避的.

到十九世纪下半页，数学家已意识到，定义无理数，要想走出困境，必须设法摆脱极限的束缚. 理由很简单：是极限需要实数奠定基础，而不是相反. 经过许多人的努力，这个问题终一得到圆满的解决，其中杰出的代表是 *Dedekind* 和 *Cantor* 分别建立的实数理论.

一、*Dedekind* 实数理论

1. 有理数分划与实数定义

我们知道有理点是不能布满整个数轴的，或者说仅有有理点的直线还有很多“空隙”. 如果将此直线在某点 C 处一截为二，并假定 C 点不可再分，那么 C 点所在位置不外乎两种情形：

1) C 是左部的右端点；

2) C 不是左部的右端点，但是右部的左端点.

今考察 2) 的情形：这时若 C 是有理点，则左部无最大的有理数，但右部却有最小有理数，即 C 点所表示的数；若 C 不是有理点而是“空隙”，则不但左部无最大有理数，右部也无最小有理数.

截点 C 是否有理点导致右部有无最小有理数，这个差异正好暴露了直线具有连续性的奥秘(讨论 1) 的情形同样会得此结论). *Dedekind* 正是由此得出有理数分划概念，从而建立起他的实数理论.

定义 1　将有理数集 Q 分成两个子集 A、B 使

i)　$A \neq \Phi, B \neq \Phi$(非空)；　$A\cap B=\Phi$?

ii)　$A \cup B = Q$(不漏)；

iii)　$\forall\, a \in A, b \in B$ 有 $a < b$(不乱)；

iv)　$\forall\, a \in A$, $\exists\, a_0 \in A$ 使 $a < a_0$(A 中无最大数).

则称 $A.B$ 为有理数集 Q 的一个分划，记为 $A|B$. 称 A 为下组，B 为上组.

定义中 *iv*) 不是不可少的. 列出它，只是为了后面推理的方便. 并且这样做也是合理的，因为在作分划时，若 A 有最大数，则将此数放入 B 中，使成为 B 的最小数，这样 A 就无最大数了. 否则，设 A 还有最大数，那么根据有理数的稠密性，在 A 的最大数与 B 的最小数之间至少还有一个有理数，这个有理数便被 A、B 漏掉了，与 *ii*) 矛盾. 所以总可以将下组无最大数作为定义的一个条件.

当有理数分划 $A|B$ 作出以后，B 中是否必有最小数？请看下

面两个例子.

例 1 $\forall r \in Q$. 设

$$A = \{a \mid a < r, a \in Q\}, B = \{a \mid a \geqslant r, a \in Q\}$$

则 A、B 是 Q 的一个分划，且上组 B 有最小数 r.

此例不证自明.

例 2 设

$$A = \{a \mid a \leqslant 0, \text{或 } a > 0 \text{ 且 } a^2 < 2, a \in Q\}$$

$$B = \{a \mid a > 0 \text{ 且 } a^2 > 2, a \in Q\}$$

则 A、B 也是 Q 的一个分划，但上组 B 无最小数.

证 A、B 非空、不漏、不乱都是明显的，今证 A 无最大数：

$\forall a \in A$，不妨设 $a > 0, a^2 < 2$. 根据 *Archimedes* 原理 $\exists n \in N$ 使

$$n(2 - a^2) > 2a + 1$$

于是有

$$2 - a^2 > \frac{2a+1}{n} > \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$$

从而

$$(a + \frac{1}{n})^2 < 2$$

因而

$$a + \frac{1}{n} \in A$$

又显然

$$a < a + \frac{1}{n}$$

这表明 A 中还有比 a 更大的数 $a + \frac{1}{n}$. 所以 $A|B$ 是 Q 的一个分划.

今证 B 也无最小数. $\forall b \in B$，因为 $b > 0, b^2 > 2$，

由 *Archimedes* 原理 $\exists n \in N$ 使

$$n(b^2 - 2) > 2b$$

于是有

$$b^2 - 2 > \frac{2b}{n} > \frac{2b}{n} - \frac{1}{n^2}$$

从而

$$(b - \frac{1}{n})^2 > 2$$

因而

$$b - \frac{1}{n} \in B$$

又显然 $\qquad b-\frac{2}{n}<b$

即 B 中还有比 b 更小的有理数 $b-\frac{1}{n}$，故 B 无最小数.

上述两例告诉我们，有理数分划可分为两类，一类是上组有最小数，另一类是上组无最小数，称前者为有理分划，后者为无理分划. 二者的几何意义相当于，将直线一截为二时，截点是有理点或是“空隙”.

有理分划可与有理数建立一一对应关系. 这是因为，任一有理分划可与其上组的最小数对应；反之，任一有理数 r，必可确定如例 1 那样一个有理分划. 可见有理分划与有理数实为等价物，因而称有理分划为有理数就无不可. 这样一来，无理分划就应该而且只能是另外一种新数 —— 无理数了. 于是有

定义 2 有理数的任一分划 $A|B$ 称为实数. 记为

$\alpha=A|B$，或 $A_\alpha|B_\alpha$

实数的这个定义，极其简明并且有一义性(即不同有理数分划定义不同的实数)，它摆脱了“极限”概念的束缚，只用到有理数的性质及集合的概念. 因而不会再有前面提到的那个逻辑上的错误. 后面还将看到，用它完全可以严格地建立起实数理论，难怪此定义在历史上曾被誉为人类智慧的创造物. 不过定义简明并不意味着一定容易理解，事实上，初学者对它往往还是会感到别扭和迷惑. 究其原因，主要是多年习惯于十进制数，以为凡是提到数，就应该是那个样子，其实用什么客观事物(包括符号、实物，甚至声、光、电、磁)表示数，都是无关紧要的. 要紧的是，一旦采用后，要能反映该数的性质. 明白这一点，后面的论述，也就不奇怪了，容易理解了.

为了后面论述的需要，这里再给出几个有理数分划.

例 3 设 $\alpha=A_\alpha|B_\alpha,\beta=A_\beta|B_\beta$,

$A=\{a+b|a\in A_\alpha,b\in A_\beta\},B=Q-A$

则 $A|B$ 是一有理数分划.

证 i) 因为 A_α、A_β 非空,故 $A \neq \Phi$.

又因为 B_α,B_β 也非空,必 $\exists\, b_1 \in B_\alpha, b_2 \in B_\beta$ 使

$$b_1 + b_2 \in B$$

否则,设 $\qquad b_1 + b_2 \in A$

那么由 A 的定义,必 $\exists\, a_1 \in A_\alpha, a_2 \in A_\beta$ 使

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

但由 $A_\alpha|B_\alpha$、$A_\beta|B_\beta$,不乱应有

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2$$

从而 $\qquad a_1 + a_2 < b_1 + b_2$

这就产生矛盾,只有

$$b_1 + b_2 \in B$$

故 $\qquad B \neq \phi$

ii) 显然 $A \cup B = Q$,故 A、B 不漏.

iii) $\forall\, a \in A, b \in B$,往证 $a < b$

如若不然,设 $a > b$. 由 A 的定义,必

$$\exists\, a_1 \in A_\alpha, a_2 \in A_\beta \text{ 使 } \quad a = a_1 + a_2$$

于是有 $\qquad b < a_1 + a_2 \quad$ 或 $\quad b - a_2 < a_1 \in A_\alpha$

但已知 $a_2 \in A_\beta$,由 A 的定义知

$$b = ((b - a_2) + a_2) \in A$$

这与已知 $b \in B$ 矛盾,所以只有

$$a < b$$

故 A、B 不乱.

iv) $\forall\, a \in A$,由 A 的定义 $\exists\, a_1 \in A_\alpha, a_2 \in A_\beta$ 使

$$a = a_1 + a_2$$

因为 A_α、A_β 无最大数,$\exists\, a_1' \in A_\alpha, a_2' \in A_\beta$ 使

$$a_1 < a_1', a_2 < a_2'$$

从而 $\qquad a = a_1 + a_2 < a_1' + a_2' \in A$

这表明 A 中还有的比 a 大的数 $a_1' + a_2'$，故 A 无最大数.

到此便证明了 A、B 是一有理数分划，记为 $A_{\alpha+\beta}|B_{\alpha+\beta}$.

例 4 设 $\alpha = A_\alpha | B_\alpha$ 是任一实数

$$A_{-\alpha} = \{-b | b \in B_\alpha^0\}, B_{-\alpha} = Q - A_{-\alpha}$$

则 $A_{-\alpha}|B_{-\alpha}$ 是一有理数分划，式中 B_α^0 表示 B_α 中去掉最小数的集合.

证 $i)$ 因为 $B_\alpha^0 \neq \phi$，故 $A_{-\alpha} \neq \phi$. 今证 $B_{-\alpha} \neq \phi$

为此 $\forall\, a \in A_\alpha$，往证 $-a \in B_{-\alpha}$，如若不然，设

$$-a \in A_{-\alpha}$$

则由 $A_{-\alpha}$ 的定义，$\exists\, b \in B_\alpha^\circ$ 使 $-b = -a$.

此即 $\quad a = b$

这与 $A_\alpha|B_\alpha$ 不乱矛盾，只有 $-a \in B_{-\alpha}$. 故 $B_{-\alpha} \neq \phi$

$ii)$ 显然 $A_{-\alpha} \cup B_{-\alpha} = Q$，即 $A_{-\alpha}|B_{-\alpha}$ 不漏

$iii)$ $\forall\, -b \in A_{-\alpha}, -a \in B_{-\alpha}$ 由 $A_{-\alpha}$、$B_{-\alpha}$ 定义知

$$b \in B_\alpha^0, a \in A_\alpha$$

已知 $A_\alpha|B_\alpha$ 不乱，应有

$$a < b$$

从而 $\quad -b < -a$

故 $A_{-\alpha}|B_{-\alpha}$ 不乱

$iv)$ 因为 B_α^0 无最小数，$A_{-\alpha}$ 必无最大数. 否则，设

$\exists\, b_0 \in B_\alpha^0$ 使 $-b_0 = maxA_{-\alpha}$

即 $\forall\, b \in B_\alpha^0$ 便有

$$-b \leqslant -b_0$$

此即 $\quad b \geqslant b_0$

这表明 B_α^0 有最小数了，矛盾. 故 $A_{-\alpha}$ 无最大数.

所以 $A_{-\alpha}|B_{-\alpha}$ 是一有理数分划.

定义 3 $\quad \forall\, \alpha$、$\beta \in R$

若 $A_\alpha = A_\beta$. 则称 $\alpha = \beta$；

若 $A_\alpha \subset A_\beta$，则称 $\alpha < \beta$

特别

若 $A_\alpha \subset A_0$，则称 $\alpha < 0$；

若 $A_\alpha \supset A_0$，则称 $\alpha > 0$

式中实数 $0 = A_0|B_0$ 是负有理数集 A_0 与非负数有理数集 B_0 作成的分划.

例 5　设实数 $\alpha > 0, \beta > 0$，令

$A_{\alpha\beta} = \{r | r \in Q, r \leqslant 0$ 或 $r = a_1 \cdot a_2, 0 < a_1 \in A_\alpha, 0 < a_2 \in A_\beta\}$

$B_{\alpha\beta} = Q - A_{\alpha\beta}$

则 $A_{\alpha\beta}|B_{\alpha\beta}$ 是一有理数分划.

证 i）　因为 A_α、A_β 非空，故 $A_{\alpha\beta} \neq \Phi$，往证

$$B_{\alpha\beta} \neq \Phi$$

为此，$\forall\ b_1 \in B_\alpha, b_2 \in B_\beta$，因为 $\alpha > 0, \beta > 0$，必有

$$b_1 > 0, b_2 > 0,\text{从而 } b_1 \cdot b_2 > 0.$$

于是若 $b_1b_2 \in B_{\alpha\beta}$ 则问题得证，不然设

$$b_1b_2 \in A_{\alpha\beta}$$

则由 $A_{\alpha\beta}$ 的定义，必 $\exists\ a_1 \in A_\alpha, a_2 \in A_\beta, a_1 > 0, a_2 > 0$

使
$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

但已知 $a_1 < b_1$、$a_2 < b_2$，应有

$$a_1 \cdot a_2 < b_1 \cdot b_2$$

矛盾. 所以 $B_{\alpha\beta} \neq \phi$.

ii）显然 $A_{\alpha\beta} \cup B_{\alpha\beta} = Q$，故 $A_{\alpha\beta}$、$B_{\alpha\beta}$ 不漏.

iii）$\forall\ a \in A_{\alpha\beta}$、$b \in B_{\alpha\beta}$. 由 $B_{\alpha\beta}$ 的定义知，恒有 $b > 0$. 故若 $a \leqslant 0$，便有 $a < b$.

若 $a > 0$，往证仍有 $a < b$. 为此令

$$a = a_1 \cdot a_2,\quad 0 < a_1 \in A_\alpha,\quad 0 < a_2 \in A_\beta$$

转证
$$a_1 \cdot a_2 < b$$

如若不然，设

$$b < a_1 \cdot a_2$$

便有 $$0 < \frac{b}{a_2} \leqslant a_1 \in A_\alpha$$

从而 $$\frac{b}{a_2} \in A_\alpha$$

注意到 $a_2 \in A_\beta$，由 $A_{\alpha\beta}$ 的定义得

$$b = a_2 \cdot \frac{b}{a_2} \in A_{\alpha\beta}$$

这与所设 $b \in B_{\alpha\beta}$ 矛盾，故总有 $a < b$，因而 $A_{\alpha\beta}$、$B_{\alpha\beta}$ 不乱.

iv） $\forall a \in A_{\alpha\beta}$ 不妨设 $a > 0$，由 $A_{\alpha\beta}$ 的定义，必

$\exists\ 0 < a_1 \in A_\alpha, 0 < a_2 \in A_\beta$ 使 $a = a_1 \cdot a_2$.

因为 A_α. A_β 无最大数，又必

$\exists\ 0 < a_1' \in A_\alpha, 0 < a_2' \in A_\beta$ 使 $a_1 < a_1', a_2 < a_2'$.

从而 $$a_1 \cdot a_2 < a_1' \cdot a_2' \in A_{\alpha\beta}$$

这表明在 $A_{\alpha\beta}$ 中有比 a 还要大的数 $a_1' \cdot a_2'$，所以 $A_{\alpha\beta}$ 无最大数.

此至便证明了 $A_{\alpha\beta}|B_{\alpha\beta}$ 是一有理数分划.

例 6　$\forall \alpha \in R, \alpha > 0$ 设

$A_{\alpha^{-1}} = \{r | r \in Q, r \leqslant 0$ 或 $r = \dfrac{1}{b}, b \in B_\alpha^0\}$

$B_{\alpha^{-1}} = Q - A_{\alpha^{-1}}$

则 $A_{\alpha^{-1}}|B_{\alpha^{-1}}$ 是一有理数分划.

证 Ⅰ）　因为 B_α^0 非空，所以 $A_{\alpha^{-1}} \neq \Phi, B_{\alpha^{-1}} \neq \Phi$. 因为 $\alpha >$

必 $\exists\ 0 < a \in A_\alpha$ 使 $\dfrac{1}{a} \in B_{\alpha^{-1}}$，如若不然，设

$$\frac{1}{a} \in A_{\alpha^{-1}}$$

那么由 $A_{\alpha-1}$ 的定义，必 $\exists\ b \in B_\alpha^0$ 使

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a}$$

即 $$a = b$$

这与 $A_\alpha | B_\alpha$ 不乱矛盾，故只有 $\frac{1}{a} \in B_{\alpha-1}$ 所以

$$B_{\alpha-1} \neq \Phi$$

Ⅰ）显然 $A_{\alpha-1} \cup B_{\alpha-1} = Q$

Ⅲ） $\forall\, a \in A_{\alpha-1}, b \in B_{\alpha-1}$，由 $A_{\alpha-1}$ 及 $B_{\alpha-1}$ 的定义必

$\exists\; 0 < b_1 \in B_\alpha^0$ 及 $0 < a_1 \in A_\alpha$ 使

$$a = \frac{1}{b_1}, \quad b = \frac{1}{a_1}$$

已知 $a_1 < b_1$，可推出 $a < b$，故 $A_{\alpha-1}$、$B_{\alpha-1}$ 不乱.

Ⅳ） $\forall\, a \in A_{\alpha-1}$，因为 $\alpha > 0$ 不妨设 $a > 0$，由 $A_{\alpha-1}$ 的定义，必 $\exists\, b \in B_\alpha^0$ 使 $a = \frac{1}{b}$.

因为 B_α^0 无最小数，必 $\exists\, b' \in B_\alpha^0$ 使

$$b' < b \quad 且 \quad \frac{1}{b'} \in A_{\alpha-1}$$

但是 $$a = \frac{1}{b} < \frac{1}{b'}$$

这表明在 $A_{\alpha-1}$ 中还有比 a 还要大的数 $\frac{1}{b'}$ 故 $A_{\alpha-1}$ 无最大数.

至此便证明了 $A_{\alpha-1} | B_{\alpha-1}$ 是一有理数分划

2. **实数的性质**

我们知道有理数集 Q 是一个 *Archimedes* 有序域，扩张为实数集 Q 后，是否仍然保持这个性质，回答是肯定的.

欲知 R 也是 *Archimedes* 有序域，需证

Ⅰ　R 是域. 即在 R 定义了“+”与“.”两种运算，使得对于 $\forall\, \alpha、\beta、\gamma、\in R$ 满足：

1°　交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2°　结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$$

3° 恒等性：$\alpha+0=\alpha$，$\alpha\cdot 1=\alpha$；

4°. 可逆性：$\alpha+(-\alpha)=0$，$\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$；

5°. 分配律：$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$；

Ⅱ R 是有序域，即在 R 中定义了顺序关系 $<$、$=$、$>$，使得对于 $\forall\ \alpha$、β、γ、$\in R$，满足：

6° 全序性：即 $\alpha<\beta$，$\beta=\gamma$，$\alpha>\beta$，有且仅有一式成立；

7° 传递性：若 $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，则 $\alpha<\gamma$；

8° 保序性：若 $\alpha<\beta$ 则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$，

若 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma>0$，则 $\alpha\gamma<\beta\gamma$；

Ⅲ R 满足 *Archimedes* 原理：

设 α、$\beta\in R$，$\alpha>0$，$\beta>0$，则 $\exists\ n\in N$ 使

$$n\alpha>\beta$$

Ⅳ R 具有稠密性：

$\forall\ \alpha$、$\beta\in R$，若 $\alpha<\beta$ 则 $\exists\ C\in R$ 使

$$\alpha<C<\beta$$

在证明之前，先介绍两个引理.

引理 1 设 $\alpha\in R$. $\forall\ \varepsilon>0$，$\varepsilon\in Q$，则必 $\exists\ a\in A_\alpha$、$b\in B_\alpha$ 使

$$b-a=\varepsilon$$

证 $\forall\ a_1\in A_\alpha$、$b_1\in B_\alpha$，因为 $a_1<b_1$，$\varepsilon>0$、$\varepsilon\in Q$，根据有理数的 *Archimedes* 原理，必 $\exists\ n\in N$ 使

$$n\varepsilon>b_1-a_1 \text{ 或 } b_1<a_1+n\varepsilon$$

因为 $b_1\in B_\alpha$，必有 $a_1+n\varepsilon\in B_\alpha$

否则，设

$$a_1+n\varepsilon\in A_\alpha$$

那么由 $A_\alpha|B_\alpha$ 不乱，便有

$$a_1+n\varepsilon<b_1$$

矛盾. 从而必存唯一的自然数 $m\leqslant n$ 使得

$$a_1+(m-1)\varepsilon\in A_\alpha,a_1+m\varepsilon\in B_\alpha$$