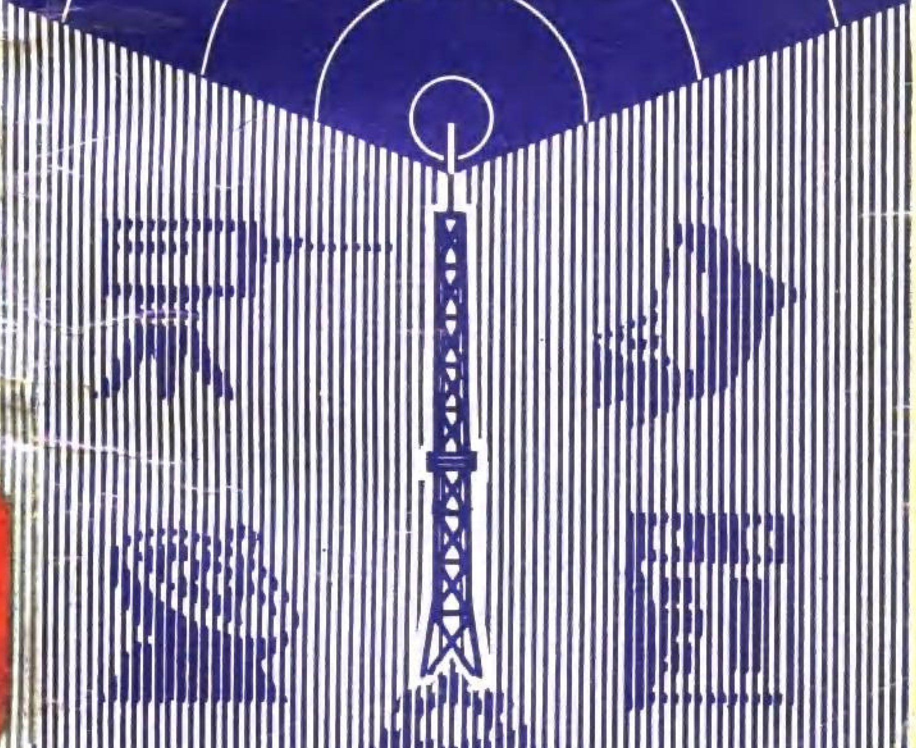
高等学校教材

电磁理论解题指导



北京理工大学出版社

电磁理论解题指导

楼仁海　傅君眉　刘鹏程　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书为电子部工科电子类专业教材“七五”编审出版规划的选题。本书204道题目按电磁场基本方程，平面波，辅助函数，重要定理、原理，电磁波的辐射、散射和衍射，导行电磁波，电磁振荡，电磁场的解析近似法，运动系统的电磁场等九章选编。每题从指出解题思路入手，启发思考线索，培养读者领会题意，抓住要点，并通过全解，使读者运用数学物理方法求解较复杂电磁场问题有了示例。本书理论分析严谨，思路清晰，采用数学方法恰当，推导计算结果准确。

本书可供高等院校电子学与通信类有关专业研究生、高年级本科生学习之用，也可供有关教师及科技人员参考。

电磁理论解题指导

楼仁海　傅君眉　刘鹏程　编

北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　13.5印张　290千字
1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷
ISBN7-81013-073-0/TN·6
印数：1—5500册　定价：2.85元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业的教材质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　言

本书系按电子工业部制定的工科电子类专业教材1986～1990年编审出版规划，由电磁场与微波技术编审委员会电磁场理论编审小组组织征稿、审定、推荐出版，责任编委饶克谨。

本书由北京理工大学楼仁海担任主编，成都电子科技大学饶克谨担任主审。

为了巩固与深化电磁理论的学习，解题是重要环节之一。它能培养学生理论联系实际，建立清晰概念，熟练数学物理方法，讲究计算技巧与分析计算结果等，多年来，求解研究生电磁理论习题，读者普遍反映台阶较高，难于下手与计算，希望出版一本解题指导，配合理论教学进行学习，作为开阔思路，掌握方法之用，藉以提高分析和解决较复杂电磁场问题的能力。本书是基于上述目的与要求而编写的。

本书根据工科电子类研究生电磁理论教学大纲的范围，结合编者从事研究生电磁理论教学及科研的实践，选编了204道题。每题皆指出解题思路，开阔思考线索，培养读者领会题意，抓住要点；每题的全解，可使得读者对如何运用电磁理论及数学物理方法求解较复杂电磁场问题，有了示例。在编写中，编者力图做到理论分析严谨，思路清晰，采用数学方法恰当，推导计算结果准确。本书可供高等院校电子学与通信类有关专业研究生、高年级本科生学习之用，也可供有关教师及科技人员参考。

全书共分九章。第一章应用电磁场基本方程，分析、计

算、论证电磁场问题。第二章分析、计算不同媒质中波动方程的平面波解及其特性与有关参数，为读者处理其它模式电磁场 题打下基础。第三章给出了电磁场问题中的各种辅助函数的求解，并指出如何应用波函数的正交性和波的变换，简化解题过程。第四章应用重要定理和原理，求解电磁场边值问题，使得过程概念清晰、步骤简捷、结论明确。第五章应用辅助位函数结合辐射条件求解非齐次矢量波动方程，求出无界或半无界空间的辐射场；分析、计算波遇到导电柱体、劈或导电、介质球的散射与孔的衍射等。第六、七章应用亥姆霍兹方程、麦克斯韦方程组、边界条件以及波型函数的完备性、正交性与归一化，求解常用均匀或加载柱形波导和谐振腔中的波型、场分布、传播或振荡特性及有关参数；应用微扰法分析并计算受扰控的参数变化等。第八章应用解析近似法求解导波中的不连续性问题，并藉以指点在分析、计算中，如何进行理论及数学方法上的近似处理。第九章应用狭义相对论的基本原理及变换与运动媒质的边界条件，分析、计算运动系统的电磁场。

本书由西安电子科技大学刘鹏程编写第一、三、九章，西安交通大学傅君眉编写第二、四、五章，第六、七、八章由北京理工大学肖书君、刘世勇供稿，楼仁海统编全稿。饶克谨对全书进行细致、认真的审阅，提出了不少宝贵的意见，编者所在院校对本书的编写给予了很大的帮助和支持，这里表示诚挚的感谢。刘世勇整理并抄写全稿。书中矢量用黑斜体表示，张量用黑正体表示。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　电磁场基本方程……………………………………（1）

第二章　平面波……………………………………………（50）

第三章　电磁场的辅助函数………………………………（90）

第四章　重要定理和原理…………………………………（146）

第五章　电磁波的辐射、散射和衍射……………………（188）

第六章　导行电磁波………………………………………（233）

第七章　电磁振荡…………………………………………（279）

第八章　电磁场的解析近似法……………………………（320）

第九章　运动系统的电磁场………………………………（383）

第一章　电磁场基本方程

本章将从电磁场的基本方程(麦克斯韦方程、本构方程、边界条件、波动方程和坡印廷定理等)出发，培养读者分析、计算和论证电磁场问题的能力，从而达到明确解题思路，掌握解题方法及步骤，加深对电磁场基本方程的理解与应用。

1.1　在均匀媒质中，如时谐场各场矢量（$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{B}$）表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \text{①}$$

式中$\boldsymbol{A}_0$和$\boldsymbol{k}$为常矢量，试证各场矢量满足下列方程(式中$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$)：

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{E}/\omega$$

$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{H}/\omega$$

思路

(1)将平面波解的形式$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$代入麦克斯韦方程，并利用矢量分析公式

$$\nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

(2)在所得式子的两边同时叉乘$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$。

［解］　$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$

$$=\nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{E}_0+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

---

① 本书$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$中$\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{r}$为矢量。

$$=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}_0$$
$$=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

同理可得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}$$

将此二式代入麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$$

即得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D}$$

在上二式的两边分别叉乘$\boldsymbol{S}$，得

$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{D}$$

即

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{D}$$

由于$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，有

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}=0$$

故得

$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{E}/\omega$$
$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{H}/\omega$$

1.2 设在不均匀媒质中时谐场矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\psi}$$
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\psi}$$

式中$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$和ψ均是位置的函数，试证：

（1）在$f\to\infty$的情况下，场矢量满足的方程可近似成为

$$\nabla\psi\times\boldsymbol{H}_0+c\varepsilon\boldsymbol{E}_0=0$$
$$\nabla\psi\times\boldsymbol{E}_0-c\mu\boldsymbol{H}_0=0$$
$$\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\psi=0$$
$$\boldsymbol{H}_0\cdot\nabla\psi=0$$

（2） $$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{c}{n^2}\langle w\rangle\nabla\psi$$

式中$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$为时间平均坡印廷矢量，$\langle w\rangle$为时间平均能量密度，$c$为光速，$n$为媒质的折射率。

思路 将场矢量代入麦克斯韦方程，并令$f\to\infty$，然后将所得结果代入$\langle\boldsymbol{S}\rangle$和$\langle w\rangle$的定义式。

［解］ （1）在麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$
$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H})=0$$
$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=0$$

中，代入

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\psi}$$
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\psi} \qquad (1.2\text{-}1)$$

可得

$$\nabla\psi\times\boldsymbol{H}_0+c\varepsilon\boldsymbol{E}_0=-\frac{1}{\mathrm{j}k}(\nabla\times\boldsymbol{H}_0)$$
$$\nabla\psi\times\boldsymbol{E}_0-c\mu\boldsymbol{H}_0=\frac{1}{\mathrm{j}k}(\nabla\times\boldsymbol{E}_0)$$
$$\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\psi=\frac{1}{\mathrm{j}k}\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}_0+\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0\right)$$
$$\boldsymbol{H}_0\cdot\nabla\psi=\frac{1}{\mathrm{j}k}\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\cdot\boldsymbol{H}_0+\nabla\cdot\boldsymbol{H}_0\right)$$

当$f\to\infty$时，$k=2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}\to\infty$，即得

$$\nabla\psi\times\boldsymbol{H}_0+c\varepsilon\boldsymbol{E}_0=0 \tag{1.2-2}$$

$$\nabla\psi\times\boldsymbol{E}_0-c\mu\boldsymbol{H}_0=0 \tag{1.2-3}$$

$$\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{1.2-4}$$

$$\boldsymbol{H}_0\cdot\nabla\psi=0 \tag{1.2-5}$$

（2）由式(1.2-1)，有

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*) \tag{1.2-6}$$

$$\langle w_e\rangle=\frac{\varepsilon}{4}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*=\frac{\varepsilon}{4}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^* \tag{1.2-7}$$

$$\langle w_m\rangle=\frac{\mu}{4}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*=\frac{\mu}{4}\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}^*$$

由式(1.2-3)和(1.2-4)，式(1.2-6)可化为

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_0\times\left(\frac{1}{c\mu}\nabla\psi\times\boldsymbol{E}_0^*\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2c\mu}(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*)\nabla\psi$$

将式(1.2-7)代入上式，并考虑到$\langle w_e\rangle=\langle w_m\rangle=\frac{1}{2}\langle w\rangle$，

可得

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{2}{c\mu\varepsilon}\langle w_e\rangle\nabla\psi$$

$$=\frac{c}{n^2}\langle w\rangle\nabla\psi$$

式中$n^2=c^2\mu\varepsilon=\mu_r\varepsilon_r$。

1.3 在均匀有耗各向同性媒质中，设电场矢量函数

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中$\boldsymbol{E}_0$为常矢量，$\boldsymbol{k}$为复常矢量，$\boldsymbol{r}$为矢径，试求：

（1）此矢量函数满足波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon \boldsymbol{E}-\mathrm{j}\omega\mu\sigma \boldsymbol{E}=0$$

的条件。

（2）该矢量在什么条件下才是电磁场的解？

（3）在满足上述条件下的磁场矢量函数。

（4）当媒质为无耗时，又如何？

思路

（1）将$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$代入波动方程中，求出使波动方程成立的$k$值。

（2）由$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$可得电磁场解的条件。

（3）利用麦克斯韦方程，由$\boldsymbol{E}$求$\boldsymbol{H}$。

（4）用相似步骤求无耗媒质中的解。

［解］（1）利用矢量分析公式可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\nabla^2(e^{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=k^2\boldsymbol{E}$$

将上式代入波动方程可得

$$k^2=\mathrm{j}\omega\mu\sigma-\omega^2\varepsilon\mu$$

令$\boldsymbol{k}=(\alpha+\mathrm{j}\beta)\hat{k}$，式中$\alpha$和$\beta$为实数，可得

$$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{\sqrt{1+(\sigma/\omega\varepsilon)^2}-1}{2}\right]^{1/2}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{\sqrt{1+(\sigma/\omega\varepsilon)^2}+1}{2}\right]^{1/2}$$

也就是$\boldsymbol{E}$满足波动方程的条件。

（2）电磁场的解除了满足上面的波动方程以外，还应满足麦克斯韦方程$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，即

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k} e^{-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} = 0$$

故必须

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0 \text{或} \boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{k}$$

（3）
$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu} \nabla \times \boldsymbol{E}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu} \boldsymbol{E}_0 \times \nabla (e^{-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

（4）当媒质无耗时，将$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}$代入

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} = 0$$

可得满足波动方程的条件为$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$，即

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

由$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$可得

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{k}$$

又
$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu} \nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{k} \times \boldsymbol{E}$$

1.4　试证在横截面为S的柱形区域中场矢量

$$\boldsymbol{E} = \int_S [-\mathrm{j}\omega\mu(\hat{n} \times \boldsymbol{H}) G_0 + (\hat{n} \times \boldsymbol{E}) \times \nabla_0 G_0 + (\hat{n} \cdot \boldsymbol{E}) \nabla_0 G_0] \mathrm{d}S_0 - \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \oint_l (\hat{l} \cdot \boldsymbol{H}) \nabla_0 G_0 \mathrm{d}l_0$$

$$\boldsymbol{H} = \int_S [\mathrm{j}\omega\varepsilon (\hat{n} \times \boldsymbol{E}) G_0 + (\hat{n} \times \boldsymbol{H}) \times \nabla_0 G_0$$

$$+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla_0 G_0]\mathrm{d}S_0+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\oint_l(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E})\nabla_0 G_0\mathrm{d}l_0$$

式中

$$G_0=\frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR},\quad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$$

l为S的边界，满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

思路

(1)将$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的积分表达式代入麦克斯韦方程，根据矢量分析公式进行简化

(2)注意∇是对场点坐标$\boldsymbol{r}$的微分运算，而积分号内的微分∇_0及积分变量是对源点坐标$\boldsymbol{r}_0$的运算。

[解] 对$\boldsymbol{H}$的表达式取旋度有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\int_S\{\mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\times[(\hat{n}\times\boldsymbol{E})G_0]+\nabla\times[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla_0 G_0]$$
$$+\nabla\times[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla_0 G_0]\}\mathrm{d}S_0+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\oint_l\nabla\times[(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E})\nabla_0 G_0]\mathrm{d}l_0 \tag{1.4-1}$$

考虑到

$$\nabla G_0=-\nabla_0 G_0$$
$$\nabla^2 G_0+k^2 G_0=0$$
$$\nabla\times[(\hat{n}\times\boldsymbol{E})G_0]=-(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla G_0$$
$$\nabla\times[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla_0 G_0]=-(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla\times\nabla G_0=0$$

$$\nabla\times[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla G_0]=(\hat{n}\times\boldsymbol{H})k^2G_0$$
$$+[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\cdot\nabla_0]\nabla_0G_0$$

式(1.4－1)可写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\int_S\{\mathrm{j}\omega\varepsilon(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla_0G_0+k^2(\hat{n}\times\boldsymbol{H})G_0$$
$$+[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\cdot\nabla_0]\nabla_0G_0\}\mathrm{d}S_0 \tag{1.4-2}$$

而

$$[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\cdot\nabla_0]\nabla_0G_0=\nabla_0G_0(\hat{n}\cdot\nabla_0\times\boldsymbol{H})-[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}]\nabla_0G_0$$
$$=\mathrm{j}\omega\varepsilon(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla_0G_0-[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}]\nabla_0G_0 \tag{1.4-3}$$

将式(1.4-3)代入式(1.4-2)得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\int_S[(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\nabla_0G_0+k^2(\hat{n}\times\boldsymbol{H})G_0+\mathrm{j}\omega\varepsilon(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})$$
$$\nabla_0G_0]\,\mathrm{d}S_0-\int_S[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}]\nabla_0G_0\mathrm{d}S_0 \tag{1.4-4}$$

令$\boldsymbol{a}$为任意常矢量，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\oint_l(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H})\nabla_0G_0\mathrm{d}l_0=\oint_l(\boldsymbol{a}\cdot\nabla_0G_0)\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{l}\mathrm{d}l_0$$
$$=\int_S\nabla_0\times[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla_0G_0)\boldsymbol{H}]\cdot\hat{n}\mathrm{d}S_0$$
$$=\int_S[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}](\boldsymbol{a}\cdot\nabla_0G_0)\mathrm{d}S_0$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\int_S[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}]\nabla_0G_0\mathrm{d}S_0$$

所以 $$\int_S[(\hat{n}\times\nabla_0)\cdot\boldsymbol{H}]\nabla_0G_0\mathrm{d}S_0=\oint_l(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H})\nabla_0G_0\mathrm{d}l_0 \tag{1.4-5}$$

将式(1.4-5)代入式(1.4-4)得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\left\{\iint_S[(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\nabla_0G_0-\mathrm{j}\omega\mu(\hat{n}\times\boldsymbol{H})G_0\right.$$

$$\left.+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla_0G_0]\mathrm{d}S_0-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\oint_l(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H})\nabla_0G_0\mathrm{d}l_0\right\}$$

(1.4-6)

考虑到本题中$\boldsymbol{E}$的表达式，故有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

同理可证本题中的$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$满足

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H},\quad\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\quad\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

1.5 试证分布于有限区域V内的电流源$\boldsymbol{J}$产生的电磁场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\int_V\{\mathrm{j}\omega\mu G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)$$

$$+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla_0]\nabla_0G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\}\mathrm{d}V_0$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\times\nabla_0G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V_0$$

满足电磁场的辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\hat{r}\times\boldsymbol{H}+\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\boldsymbol{E}\right)=0$$

$$\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{E}=\text{有限值}$$

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\hat{r}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H}\right)=0$$

$$\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{H}=\text{有限值}$$

式中$\boldsymbol{r}$为场点位置矢量，$\boldsymbol{r}_0$为源点位置矢量；

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R},\quad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$$

思路 先算出格林函数$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$的梯度，并利用$r\to\infty$时的远区条件对$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的表达式进行简化，再将所得结果代入辐射条件。

〔解〕 $$\nabla_0\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=\left(jk+\frac{1}{R}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}\hat{R}$$

式中$\hat{R}$为$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$方向上的单位矢量，(不是常矢量)，于是

$$[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla_0]\nabla_0\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)$$

$$=[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla_0]\left[jk\frac{e^{-jkR}}{R}\hat{R}\right]+[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla_0]\left[\frac{e^{-jkR}}{R^2}\hat{R}\right]$$

$$=\frac{e^{-jkR}}{R}\left\{-k^2[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\hat{R}]\hat{R}+\frac{3}{R}\left(jk+\frac{1}{R}\right)[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\hat{R}]\hat{R}-\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)}{R}\left(jk+\frac{1}{R}\right)\right\}$$

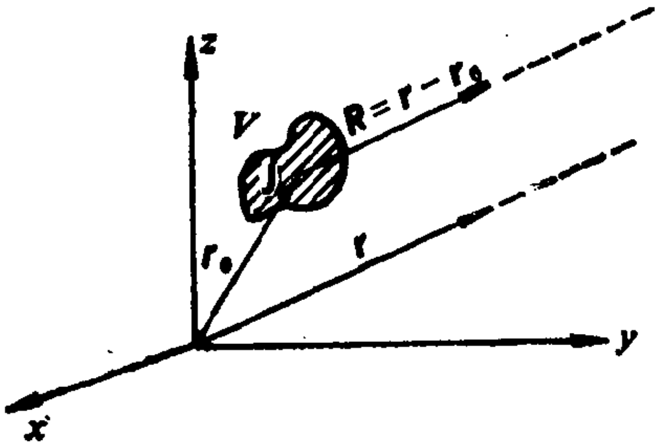


图1.1

当$r\to\infty$时，$r\gg r_0$，$kr\gg1$，可认为$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{r}$是平行的，如图1.1所示，即

$$\hat{R}=\hat{r}$$

由于R很大，在场的幅值中可只考虑R^{-1}项，略去高次项，并取

$$R\approx r$$

而在场的相位中取

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\approx r-\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}_0$$

所以当$r\to\infty$时

$$\frac{e^{-jkR}}{R}\approx\frac{1}{r}e^{-jk(r-\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}_0)}$$

$$\nabla_0\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\approx\frac{jk}{r}e^{-jk(r-\hat{r}\cdot\boldsymbol{r}_0)}$$