算子方程投影解法

雷晋干　黄象鼎　著

武汉大学出版社

算子方程投影解法

雷晋干　黄象鼎　著

武　汉　大　学　出　版　社

1987

内 容 提 要

投影解法（有限元法、配置法等均可视为其特例）是求数学物理问题近似解的常用方法之一。本书试图以泛函分析为工具来研究投影解的存在性、收敛性及其误差估计的有关问题。全书共分四章，第一章介绍集合序列及算子序列的收敛性概念。二、三、四章分别介绍线性、非线性问题以及特征值问题的投影解法。

本书可以作为计算数学专业研究生或高年级大学生选修课读本，也可供计算数学工作者及有兴趣于泛函分析应用的科技人员参考。

算 子 方 程 投 影 解 法

雷晋干 黄象鼎 著

*

武汉大学出版社出版

（武昌 珞珈山）

新华书店湖北发行所发行 武汉大学印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 8.625印张 216千字

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷

印数：1—1350

ISBN 7—307—00178—0/0・18

统一书号：13279・56 定价：1.70元

序 言

数学物理中所出现的众多的微分方程、积分方程或微分积分方程的求解，可以看成无穷维函数空间中算子方程的求解问题．而为获得它们的近似解或数值解，需要采用近似方程来代替原方程并求其解．建立近似方程并设计相应的解法的手段是多种多样的，其中投影方法（如众所周知的 Галеркин 方法、配置法、最小二乘法均为其特例）是常用的方法之一．本书试图以泛函分析为工具来研究投影解的存在性、收敛性以及误差估计等有关问题．对于非线性问题，由于其解往往是不唯一的，基于此，本书对线性或非线性问题都将原问题的解与近似解看成是某些集合的元素，而把近似解的收敛性问题看成是集合序列的收敛性问题．用这种方式处理收敛性是十分自然的，同时某些点列意义下不收敛的解序列，在这种集合意义下却可能收敛．解集合序列的收敛性又直接依赖于算子方程中的算子的性质以及相应的近似算子对原算子的逼近方式．本书中，我们讨论了一类非常广泛的正规算子方程的近似解的有关问题．

本书是在我们近几年来为本校计算数学专业研究生开设的算子方程数值解讨论班中的部分题材以及数值泛函课中部分内容的基础上加工整理而成的，同时也参照了国内外有关的一些近期成果，也有参加讨论班诸同志近几年来所做的工作．

读者只需具备最基本的泛函分析以及数值分析知识就可比较顺利地阅读本书．因此它可作为计算数学专业研究生或高年级大学生的选修课教本，也可供计算数学工作者及关心泛函分析应用

的科技人员参考。

全书共分四章，第一章是预备性的，介绍集合及算子序列收敛的一些基本概念。第二、三章分别讨论了线性与非线性算子方程的投影解，第四章对特征值及歧点问题的投影解作了初步介绍。

本书虽然只限于讨论算子方程的投影解，但是讨论收敛性的方法（即所谓列紧性方法）对于更一般的近似算子方程也适合。因此在各章中，我们总是从一般性的定理入手讨论其近似解的收敛性，然后再具体到投影方程的情形。为了理解与应用这些理论分析，每一章都给出一定数量的例子。书的最后还给出三个附录，简明地（绝大部分无证明）叙述了正文中所用到的某些结论，目的是希望为读者阅读正文时提供一些方便。

本书稿虽经一再教学试用过，但由于我们水平所限，疏忽及不妥之处一定难免，敬请读者批评指正。

中山大学陈铭俊教授仔细审阅了本书初稿，提出了很多宝贵意见，本校费浦生副教授及饶传霞同志也提出了很多好建议，在此谨向他们致以衷心的感谢。

雷晋干　黄象鼎

1985年12月于武汉大学

关于记号的说明

$\in$： 属于

$\subset$： 包含

$\subsetneqq$： 严格包含

$\cup$： 并

$\cap$： 交

$\exists$： 存在量词

$\forall$： 全称量词

$\varnothing$： 空集

$\longrightarrow$： 收敛

$\xrightarrow{p}$： 点态收敛

$\xrightarrow{c}$： 连续收敛

$\xrightarrow{ac}$： 渐近列紧收敛

$\xrightarrow{cc}$： 族列紧收敛

$\xrightarrow{r}$： 正规收敛

$\longrightarrow$： 弱收敛

$\xrightarrow{p}$： D-半点态收敛

$\xrightarrow{dc}$： D-半连续收敛

$\xrightarrow{dr}$： D-半正规收敛

$\Longrightarrow$： 蕴含

$\Longleftrightarrow$： 等价（互为蕴含）

$\{S_n\}^*$： 集合 $\{S_n\}$ 的聚点集

$\Omega_\varepsilon(S)$： 集合 S 的 ε-邻域

P_nA： 关于算子 A 的投影算子

目　录

第 一 章

集合序列和算子序列的收斂

在序言中，我们已经提到求解算子方程

$$Ax=f,\ x\in X,\ f\in Y, \tag{1.1}$$

$$x=Kx+g,\ x\in X,\ g\in X \tag{1.2}$$

的解经常采用其近似方程

$$A_nx=f_n,\ x\in X,\ f_n\in Y, \tag{1.3}$$

$$x=K_nx+g_n,\ x\in X,\ g_n\in X \tag{1.4}$$

来代替以求其近似解，这里 X、Y 均为抽象空间，A 为 X 到 Y 的算子，K 为 X 到 X 的算子，A_n、K_n 分别为算子 A、K 的近似算子. 在考虑求近似解的过程中，自然要考虑近似方程(1.3),(1.4)的解集合与原方程(1.1),(1.2)的解集合的关系，算子 A_n、K_n 是否分别收斂于 A、K 以及以什么方式收斂于 A、K 的问题. 为此，本章将介绍集合序列与算子序列收斂性的一些基本概念.

这里给出的概念虽然对距离空间一般也适用，但为实用与叙述方便起见，仍然设 X、Y 均为 Banach 空间，并记 $L(X,Y)$ 为映 X 于 Y 的有界线性算子的全体，按定义它也是 Banach 空间. 若 $X\equiv Y$，则记 $L(X,X)$ 为 $L(X)$. 往后，如果没有特殊声明，所有抽象空间都是实的.

1.1 列紧算子与正规算子

本书我们要讨论算子方程(1.1)，(1.2)，其中算子 A、K 分别限定为正规或列紧的。

记 $N=\{1,2,3,\cdots\}$为自然数集合，N 的无穷子集用 N'，N''等表示。

如果空间 X 的集合 D 的每一个开覆盖有有限的子覆盖，则称 D 为**列紧集**。如果 $\overline{D}$ 是列紧的，则称 D 为**相对列紧集**。如果 D 中每一个序列都有于 X 内收敛的子序列存在，则称 D为**序列列紧集**。如果对每个 $\varepsilon>0$，D 有有限 ε-网 $D_\varepsilon\subset X$，即对应于每一个 $x\in D$，存在一个 $x_\varepsilon\in D_\varepsilon$，使得 $\|x-x_\varepsilon\|<\varepsilon$，则称 D 为**全有界集**。若 D为列紧的，则 D 是闭的。又，下列说法是等价的：

D 是相对列紧的；

D 是序列列紧的；

D 是全有界的。

一般，全有界性将更多地用于理论证明中，但是，在我们的下文中，一种与序列列紧类同的概念——离散列紧，起着相当重要的作用。如果对于点列$\{x_n\}\subset X$ 的每一个子序列均有收敛的子序列，则称之为**离散列紧的**。以下简称离散列紧为 ***d*-列紧**。因此，如果任何属于 D 的无穷序列均是 d-列紧，则D称为相对列紧的，有时也简称相对紧。

下述 Arzelà 定理对判断连续函数空间中的集合是否列紧是非常有用的。

定理（Arzelà） 使得定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数族成为 $C[a,b]$中的相对列紧集的必要且充分条件是这族函数一致有界且等度连续。

对于空间 $L^p(0,1)$上的函数族，一个类似的结果成立。

定理（Колмогоров） 设 M 为 $L^p(0,1)$（$p>1$）中的集合，则集合 M 在 $L^p(0,1)$中相对列紧的充要条件是

1. 存在常数 k，使得

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant k, \quad \forall\ x(t)\in M;$$

2. 对任一 $\varepsilon>0$，能找到 $\delta>0$，使得当 $|h|<\delta$时

$$\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt < \varepsilon^p, \forall x(t)\in M.$$

当 $t\ \overline{\in}[0,1]$时，定义 $x(t)\equiv 0$。

K：$X\to Y$，如果集 S 有界$\Rightarrow\overline{K(S)}$ 是列紧集，则称 K 为**列紧算子**（线性或非线性）。 (1.5)

显然，如果 K 有界且是有限秩算子（即值域属于有限维空间），则 K 是列紧的。

例1.1 考虑由积分

$$Kx(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

所定义的算子 K：$L^2[a,b]\to L^2[a,b]$，其中 $k(s,t)\in L^2([a,b]\times[a,b])$。不难验证，$K$ 是 $L^2[a,b]$上的列紧算子。

例1.2 假定 $k(s,t,u)$ 关于变量 $(s,t)\in[a,b]\times[a,b]$，$|u|\leqslant r$ 是连续的，则由积分

$$Au(s)=\int_a^b k(s,t,u(t))dt$$

所定义的算子 A 在连续函数空间中的半径为 r 的球 U 上是列紧的。

事实上，直接应用 Arzelà 定理则知结论成立。

例1.3 设 X 为 Соболев 空间 $W_2^1(0,1)$，$f(x,u)$为$[0,1]\times R$ 上的连续函数，且关于 u 满足李普希兹条件。因而 $f(x,u)\in L^2(0,1)$，$\forall u\in W_2^1(0,1)$，从而积分

$$\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)dx,\ \forall \varphi、u\in W_2^1(0,1)$$

存在，于是对每一固定的 $u\in W_2^1(0,1)$，上述积分是 $W_2^1(0,1)$ 上的有界线性泛函，由 Riesz 表现定理*)，对每一个 $u\in W_2^1(0,1)$，存在 $v\in W_2^1(0,1)$，使

$$(v,\varphi)=\int_0^1 f(x,u)\varphi(x)dx,\quad \forall \varphi\in W_2^1(0,1),$$

其中(v,φ)为 $W_2^1(0,1)$上的内积，从而可定义算子 F：$W_2^1(0,1)\to W_2^1(0,1)$：

$$v=Fu\Longleftrightarrow (v,\varphi)=\int_0^1 f(x,u)\varphi dx,\ \forall \varphi\in W_2^1(0,1).$$

可以证明，算子 F 是 $W_2^1(0,1)\to W_2^1(0,1)$ 的连续列紧算子。事实上，设按 W_2^1 范数 $u_n\to u_0$，因

$$(Fu_n-Fu_0,\ Fu_n-Fu_0)=\int_0^1(f(x,u_n)-f(x,u_0))$$

$$\times(Fu_n-Fu_0)dx,$$

故有
$$\|Fu_n-Fu_0\|_{W_2^1}\leqslant c\|u_n-u_0\|_{W_2^1},$$

从而 F 为连续算子。又设$\{u_l\}\in W_2^1(0,1)$为有界集，由嵌入定理（见附录二），它在 $L^2(0,1)$中为相对紧，根据同样的算法，有

---

*) 对 Hilbert 空间 H 上的任一有界线性泛函 f，有唯一的元 $u\in H$，使 $f(x)=(u,x),x\in H$.

$$\|Fu_l - Fu_m\|_{W_2^1} \leqslant \|f(x, u_l) - f(x, u_m)\|_{L^2}$$

$$\leqslant c\|u_l - u_m\|_{L^2} .$$

从而$\{Fu_l\}$为相对紧，即 F 为连续列紧算子.

这个例子的证明思路将在讨论微分方程广义解中被采用.

算子 A: $X \to Y$，如果$\{x_n\}$有界，$\{Ax_n\}$ d-列紧$\Longrightarrow\{x_n\}$ d-列紧，则称 A 为**正规的**(regular)(线性或非线性). (1.6)

从定义得知，可以直观地认为正规算子是具有逆列紧性的算子.

不难证明，在集 $L(X, Y)$中的正规算子有闭值域. 事实上，若用 $N(A)$表示 A 的零点集，$R(A)$表示值域，并记 $B=\{x: \|x\|=1\}$，$S=B\cap N(A)$. 如果 A 为正规算子，因 S 有界且 $\overline{AS}=\{0\}$，从而$\overline{S}$列紧，并由此推得 $\dim N(A)<+\infty$，即 $N(A)$为有限维子空间，于是存在闭集$F\subset X$使$X=N(A)\oplus F$. 记 A_F 为 A 在集合 F 上的限制，显然 $N(A_F)=\{0\}$，即 A_F 是一一对应映射，从而 A_F^{-1} 存在. 又因 $A\in L(X, Y)$是正规的，从而 A_F 也连续且正规，由此推得$\|A_Fx\|\geqslant\alpha\|x\|(\alpha>0)$，$x\in F$. 因若不然，存在序列$\{x_n\}$，$\|x_n\|=1$，$A_Fx_n\to0$，利用正规性条件$\{x_n\}d$-列紧，不失一般性，设 $x_n\to x$，从而 $A_Fx=0$，$\|x\|=1$，此与 $N(A_F)=\{0\}$矛盾，从而 A_F^{-1} 有界且 $R(A_F)$是闭的，因为 $R(A_F)=R(A)$，故 A 有闭值域.

有的文献也称正规算子为固有算子(proper operator).

例1.4 如果 $A\in L(X, Y)$，而且

$$\|Ax\|\geqslant\alpha\|x\|, \ \forall x\in X, \ \alpha>0,$$

则 A 是正规算子，因为此时存在连续的逆算子 A^{-1}，且因 $R(A)$ 闭的. 由正规性定义得知 A 正规.

例1.5 设 A: $X\to X$为压缩算子

$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \alpha\|x_1 - x_2\|$， $\forall x_1, x_2 \in X$， $\alpha<1$ 而 I 为恒等算子，则 $T \equiv I - A$ 为正规算子。事实上，假定$\{x_n\} \subset X$ 是有界序列且$\{x_n - Ax_n\}$是d-列紧集，则由于 A 的压缩性得知 T^{-1} 存在而且连续，根据假定$\{g_n\} = \{Tx_n\}$是 d-列紧的，从而$\{x_n\}$也是 d-列紧的。

例1.6 设 K：$X \to X$ 是列紧算子，则 $I - K$ 是正规算子。事实上，设$\{x_n\}$有界，$n \in N$，则$\{Kx_n\}d$-列紧，即存在 $y \in X$，$Kx_n \to y$，$n \in N' \subset N$。又设$\{x_n - Kx_n\}d$-列紧，$n \in N$，从而当 $n \in N'$ 时$\{x_n - Kx_n\}$也是 d-列紧的。设 $y_0 \in X$ 使 $x_n - Kx_n \to y_0$，$n \in N'' \subset N' \subset N$，从而 $x_n \to y_0 + y$，$n \in N''$。此即表明$\{x_n\}$也是 d-列紧的。类似地，$\lambda I - K$ 也是正规算子，其中 $\lambda \neq 0$ 为实数。

最后指出，在 Banach 空间中，列紧算子的任何有限线性组合仍然是列紧算子；对于正规算子，这个一般性结论虽不成立，但有很多实用场合仍然具有这一性质。

1.2 集合序列的收敛性

集合序列的收敛性概念与近似解的收敛性有着直接关系。

集合 S 的 **ε-邻域**表示为

$$\Omega_\varepsilon(S) = \bigcup_{x \in S} \{y \in X;\ \|x - y\| < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0.$$

类似于空间 X 的点的收敛性，定义集合的收敛性如下：

设 S，$S_n \subset X$，$n \in N$。如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 n_ε，使当$n \geqslant n_\varepsilon$ 时，$S_n \subset \Omega_\varepsilon(S)$，则称 **$S_n$ 收敛于 S**，并记 $S_n \to S$。简言之为

$$S_n \to S,\ \text{如果}\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n\ \text{充分大},\ S_n \subset \Omega_\varepsilon(S). \tag{1.7}$$

例1.7 设 X 为实数空间，$S = \{0\}$，$S_n = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$n \in N$，则 $S_n \to S$，$n \to \infty$。

例1.8 设 $S=[0,1]$，$S_{2m}=\left\{1+\frac{1}{2m}\right\}$，

$S_{2m+1}=\left\{-\frac{1}{2m+1}\right\}$，$m\in N$，则当$n\to\infty$ 时有 $S_n\to S$。

例1.9 设 $S=\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x:\ 2\leqslant x\leqslant 3\}$

$$S_n=\left\{x:\ 2-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 3\right\},\ n\in N,$$

则 $S_n\to S$。

例1.10 设 X_n 为 Banach 空间 X 的有限维子空间，而且 $X_n\subset X_{n+1}$，$n\in N$，$\overline{\cup X_n}=X$。今记

$$S=\{y:\ \|y\|\leqslant 1\},\ S_n=\{y:\ y\in S\cap X_n\},$$

显然 $S_n\to S$。

在例1.9中，如果设 $S=\{x:\ 2\leqslant x\leqslant 3\}$，显然 $S_n\to S$ 也成立。因此，上述极限并非唯一，而且一般有

$$S_n\to S\subset S'\Rightarrow S_n\to S'. \tag{1.8}$$

对于空集合 $\varnothing$，$\Omega_\varepsilon(\varnothing)=\varnothing$，而且有

$$S_n\to\varnothing\Rightarrow S_n=\varnothing,\ \forall n\ \text{充分大}; \tag{1.9}$$

$$S_n=\varnothing,\ \forall n\ \text{充分大}\Rightarrow S_n\to S,\ \forall S\subset X. \tag{1.10}$$

集合$\{x_n\}$，$\{S_n\}$的**聚点集**分别定义为

$$\{x_n\}^*=\{x\in X:\ x_n\to x,\ n\in N'\}, \tag{1.11}$$

$$\{S_n\}^*=\{x\in X:\ x_n\to x,\ x_n\in S_n,\ n\in N'\}. \tag{1.12}$$

所有聚点集合均为闭集合。

类似于点列的 d-列紧，可定义集合列的 d-列紧。

如果每一个序列$\{x_n:\ x_n\in S_n,\ n\in N'\}$均有收敛子序列，则集合列$\{S_n\}$称为 ***d*-列紧**。显然

$$\{S_n\}\,d\text{-列紧},\ \{S_n\}^*=\phi\Rightarrow S_n=\phi,\ \forall n\ \text{充分大}, \tag{1.13}$$

$$\{\overline{S_n}\}^*=\{S_n\}^*. \tag{1.14}$$

例1.11 若 $S_n=\left\{\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right\}$，则 $\{S_n\}^*=\{0,1\}$，$S_n\to\{S_n\}^*$，而且 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的。

下面的定理刻划了 d-列紧集合列一个重要性质，它在讨论近似解的收敛性时起着基本作用。

定理1.1 a) $\{S_n\}$ 是 d-列紧的充要条件为 $\{S_n\}^*$ 列紧，$S_n\to\{S_n\}^*$。

b) 设 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，$\{S_n\}^*\subset S$，则 $S_n\to S$。

证 很明显，若 a)成立，则 b)也成立。现证明 a)。

假定 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，令 $x_i\in\{S_n\}^*$，$i\in N$，于是存在 $n_i<n_{i+1}$ 及 $x_{n_i}\in S_{n_i}$ 使得 $\|x_{n_i}-x_i\|\to 0$。又因为 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，故存在 N' 及 $x\in X$ 使得 $x_{n_i}\to x$，$i\in N'$。因此 $x_i\to x$，$i\in N'$，即 $\{S_n\}^*$ 是列紧集合。

假定 $S_n\to\{S_n\}^*$ 不成立，则存在 $\varepsilon>0$，N' 及 $x_n\in S_n$，$n\in N'$ 使得对一切 $n\in N'$ 及 $x\in\{S_n\}^*$ 有 $\|x_n-x\|>\varepsilon$，因此，$\{x_n:n\in N'\}^*=\varnothing$，并由此得知 $\{S_n\}$ 不是一个 d-列紧集，这一矛盾推得 $\{S_n\}$ 是 d-列紧时必有 $S_n\to\{S_n\}^*$，至此必要性得证。

反之，假定 $\{S_n\}^*$ 列紧以及 $S_n\to\{S_n\}^*$，证明 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的。取 $x_n\in S_n$，$n\in N'$，因 $S_n\to\{S_n\}^*$，故存在 $N''\subset N'$，及 $x^m\in\{S_n\}^*$，$m\in N''$，$\|x_{n(m)}-x^m\|\to 0$，$n(m)\in N''$，$n(m)\to\infty$。又因为 $\{x^m\}$ 是 d-列紧的，故存在 $N'''\subset N''$，使 $m\in N'''$，$x^m\to x\in X$。从而 $x_{n(m)}\to x$，$n\in N'''$，$x_{n(m)}\in S_{n(m)}$，即 $\{S_n\}$ d-列紧。

1.3 算子序列的点态收敛与一致收敛

算子序列的收敛性概念与算子的近似表示法有着直接的联系。

设 T、T_n：$X\to Y$，$n\in N$。如果