

运筹学

教程

李书波 ☐ 主编
李晓斌 ☐ 副主编

YUNCHOUXUEJIAOCHENG

中国建筑工业出版社

运筹学教程

李书波 主编

李晓喆 李春生 李晓斌 副主编

江苏工业学院图书馆
藏书章

中国建筑工业出版社

(京) 新登字 035 号

图书在版编目 (CIP) 数据

运筹学教程/李书波主编. -北京: 中国建筑工业出版社, 1998

ISBN 7-112-03420-5

I. 运… II. 李… III. 运筹学-教材 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 22450 号

全书共分十章, 内容包括: 线性规划、目标规划、运输问题、整数规划、动态规划、存贮论、排队论、图与网络分析等。本书在阐述有关内容的同时, 重点介绍基本原理和方法, 并通过较多的例子分析了各类实际问题建模的规律性, 有助于读者开扩思路, 提高解决实际问题的技巧和能力。每章末附有复习思考题和习题, 书后有答案或提示。全书语言简明、通俗易懂、便于自学。

本书可供高等院校管理、经贸、交通及其他工科类专业的本科生作教材, 也可供管理干部、研究与设计人员, 以及工程技术人员学习参考。

运 筹 学 教 程

李书波 主编

李晓喆 李春生 李晓斌 副主编

*

中国建筑工业出版社出版 (北京西郊百万庄)

新华书店总店科技发行所发行

北京市社科印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 20½ 字数: 499 千字

1998 年 6 月第一版 1998 年 6 月第一次印刷

印数: 1—2200 册 定价: 25.00 元

ISBN 7-112-03420-5

F·271 (8587)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

前 言

本书是为了适应高等学校的管理、财经、交通及工科类专业的教学需要而编写的，是在作者 1994 年出版的《建筑业实用运筹学》和 1995 年出版的《系统·运筹·应用》的基础上修订而成的。全书共分十章，内容包括：线性规划、目标规划、运输问题、整数规划、动态规划、存贮论、排队论、图与网络分析等。

本书从加强对学生实际应用能力的培养出发，着重介绍运筹学的原理与方法，并通过较多的例子分析了各类实际问题建模的规律性。力求开拓思路，启迪智慧，提高管理者的素质和解决实际问题的技巧和能力。介绍概念注重简明直观，阐述原理力求通俗易懂，尽量减少或避免难度较大的数学论证，并不失损其严谨性。每章末都附有复习思考题和习题，书后有答案或提示。全书语言简明，通俗易懂，便于自学。

本书由李书波（哈尔滨建筑大学管理系）担任主编，李晓喆、李春生、李晓斌担任副主编，江旭光、翟凤勇、杨晓杰、王龙章参加了本书第三章、第五章和第九章部分内容的编写工作。

由于作者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，敬请广大读者批评指正。

目 录

第一章 线性规划及单纯形法	1
§ 1 线性规划问题及其数学模型	1
§ 2 含两个决策变量的 LP 的图解法	5
§ 3 单纯形法的预备知识	9
§ 4 单纯形法的几个关键问题	16
§ 5 单纯形法的计算步骤	26
§ 6 单纯形法的进一步讨论	33
§ 7 单纯形法小结	42
§ 8 应用举例	44
复习思考题	49
习题	49
第二章 对偶问题和灵敏度分析	55
§ 1 单纯形法的矩阵描述	55
§ 2 对偶问题的提出	56
§ 3 原始问题与其对偶问题的数学模型	58
§ 4 原始问题与其对偶问题的相关性质	63
§ 5 对偶变量的经济解释——影子价格	70
§ 6 对偶单纯形法	73
§ 7 灵敏度分析	76
§ 8 参数线性规划	85
§ 9 改进单纯形法	89
§ 10 有界变量处理技术	96
复习思考题	99
习题	100
第三章 目标规划	106
§ 1 基本概念与数学模型	106
§ 2 含两个决策变量 GP 的图解法	110
§ 3 求 GP 满意解的单纯形法	112
§ 4 GP 的灵敏度分析	113
§ 5 应用举例	116
复习思考题	119
习题	120
第四章 运输问题	123
§ 1 运输问题的数学模型	123
§ 2 表上作业法	125
§ 3 产销不平衡的运输问题	133

§ 4 应用问题举例	136
§ 5 灵敏度分析	144
复习思考题	146
习题	146
第五章 整数规划	151
§ 1 引言	151
§ 2 分枝定界法	152
§ 3 割平面法	155
§ 4 0—1 规划与隐枚举法	158
§ 5 分配问题与匈牙利法	163
复习思考题	169
习题	169
第六章 动态规划的基本原理与方法	173
§ 1 多阶段决策问题	173
§ 2 动态规划解题的思路	175
§ 3 动态规划的关键元素和基本方程	178
§ 4 连续确定性 DP 及其解析法	182
§ 5 离散确定性 DP 及其数值法	187
复习思考题	189
习题	190
第七章 动态规划应用举例	192
§ 1 资源分配问题	192
§ 2 生产与存贮问题	197
§ 3 复合系统工作可靠性问题	200
§ 4 设备更新问题	202
§ 5 排序问题	205
§ 6 离散随机型动态规划	209
§ 7 动态规划小结	211
复习思考题	212
习题	212
第八章 存贮论	216
§ 1 存贮问题的基本概念	216
§ 2 确定性存贮模型	218
§ 3 随机性存贮模型	225
§ 4 (s, S) 型存贮模型	231
§ 5 一些其它类型的存贮问题	236
复习思考题	240
习题	240
第九章 排队论	242
§ 1 随机服务系统的基本概念	242
§ 2 几种常用的分布函数	246
§ 3 经验分布	250

§ 4	M/M/1 型的马氏排队系统	254
§ 5	有限制的马氏系统	258
§ 6	多服务台的马氏系统	262
§ 7	一般服务时间 M/G/1 系统	265
§ 8	特殊规定的排队系统	268
§ 9	排队系统优化问题	271
	复习思考题	273
	习题	273
第十章	图与网络分析	276
§ 1	基本概念	277
§ 2	树	280
§ 3	最短路问题	285
§ 4	网络最大流问题	290
§ 5	中国邮递员问题	296
§ 6	应用举例	298
§ 7	关于若干问题的注记	307
	复习思考题	307
	习题	308
	习题答案	311
	参考文献	322

第一章 线性规划及单纯形法

线性规划 (Linear Programming 以下简记为“LP”) 是当代应用最广泛的运筹学方法之一。例如在组织生产的过程中常常要考虑：如何合理利用现有资源（如人、财、物、时间等等）来安排生产，方可使产值最大或利润最高；在研究如何完成给定任务时，则要考虑怎样统筹安排，方可使完成给定任务消耗资源的数量最少等等。线性规划就是研究和解决这种在一定条件限制之下，使某一目标达到最大或最小问题的一种有效工具。早在本世纪 30 年代初期，苏联数学家康托洛维奇（Л·В·Канторович）就成功地研究了生产组织问题、物资调运问题并于 1939 年出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书。1947 年美国数学家丹捷格（G·B·Dantzig）在发表美国空军军事规划的研究成果时提出了求解线性规划的单纯形法，为 LP 奠定了理论基础。近年来，随着电子计算技术的发展和普及，它已广泛应用于工农业生产、军事、交通运输、经济管理等各个领域，并已取得了显著效果。线性规划及其应用正为越来越多的人所重视。

学习本章应注意以下几个问题：

(1) 建模是解决实际问题的关键，LP 问题建模实际上就是用数学式子描述属于 LP 的实际问题。§ 1 和 § 8 将通过实例介绍建模的方法。读者应注意从中寻找建模的规律性和技巧。

(2) 单纯形法是个难点，概念多，用到的基础知识也多。应注意深入领会每个概念的内涵和实质。需及时复习的基础知识包括：矩阵的概念与计算、行列式的计算、微分中有关极值的问题等。

(3) 应及时、认真地多做练习。

§ 1 线性规划问题及其数学模型

本节将通过对一些简单实例的分析来说明什么是 LP 问题，怎样建立线性规划问题的数学模型，应注意分析和掌握 LP 模型的特征。

一、LP 问题及建模示例

【例 1】（产品产量计划问题）某工厂生产 I、II 两种畅销产品，已知生产这两种产品需用的设备台时，消耗原材料 A、B 的数量以及这些资源的供应限量如表 1-1 所示。又知每生产一件产品 I 可获利 5 元，生产一件产品 II 可获利 3 元。问应如何安排这两种产品的日产量可使该厂获利最多？试建立该问题的数学模型。

表 1-1

	单件 I 消耗	单件 II 消耗	日供应量
原材料 A	1	0	5
原材料 B	0	2	8
设备台时	2	3	16

分析建模

所谓建立实际问题的数学模型,就是用数学式子来描述这个问题。为此,我们设 x_1 和 x_2 分别为 I、II 两种产品的日产量,根据资源供应条件和消耗资源的情况, x_1 、 x_2 取值所受的限制可描述为

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leq 5$$

$$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 8$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 16$$

此外,产品的日产量不可能取负值,故还应有

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

该工厂希望在上述条件下获利最多,用 z 表示每天所得利润,则工厂的希望可描述为

$$\max\{z = 5x_1 + 3x_2\}$$

综上,这个问题可描述为

$$(M_1) \quad \begin{cases} \max z = 5x_1 + 3x_2 & (1.1) \\ \text{s. t.} \begin{cases} x_1 \leq 5 & (1.2) \\ 2x_2 \leq 8 & (1.3) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 & (1.4) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (1.5) \end{cases} \end{cases}$$

这里 x_1, x_2 称为决策变量; (1.1) 式表达了工厂的希望,称线性函数 $z = 5x_1 + 3x_2$ 为目标函数; 不等式 (1.2)——(1.4) 描述了产品产量必须受到的限制,称为约束条件; (1.5) 称为非负条件,也把 (1.2)——(1.5) 统称为约束条件。符号“s. t.”读作“受约束于”。

(M_1) 的涵意是:在每种资源的消耗量均不超过其供应量的前提下,寻求使目标函数达到最大值的变量 x_1, x_2 的一组非负值。总之, (M_1) 用一组数学式子简单明确地表达了原来的实际问题,故称 (M_1) 为原问题的数学模型。

如果模型中的目标函数是决策变量的线性函数,约束条件是关于决策变量的一组线性等式或线性不等式,而且问题的决策方案都可以用决策变量的一组值来表达,那么,这个模型就称为线性规划模型。可用 LP 模型描述的问题称为 LP 问题。LP 模型也称为 LP 问题。总之,LP 问题是:在一组线性等式或线性不等式约束之下,寻求使某一线性函数达到最大值(或最小值)的决策方案的问题。

建立实际问题的 LP 模型时,首先应明确以下三要素:

① 决策变量。研究一个实际问题,都是为了要找出解决这个问题的决策方案。为此,选用决策变量时,应考虑到实际问题的决策方案都可用这些变量的数值组来表示,此外,也应适当考虑所建模型的简易性以及求解模型的方便性。有些问题的决策变量容易选定,也有不少问题需对问题进行一番分析之后才能选定。

②约束条件。一般每一问题的决策方案都要受到一些条件的约束。因此，建模时应考虑如何将这些约束分别用决策变量的线性等式或线性不等式表达出来。

③目标要求。每个问题都有一个要追求的目标。建模时需明确这个目标，把它表示成决策变量的线性函数，并且用目标函数的最大化（或最小化）来表达决策者的愿望。

【例 2】（合理利用线材问题）某建筑工地拟作 100 套钢筋架，每套用长为 2.9m、2.1m、1.5m 的钢筋各一根。现有长为 7.3m 的钢筋充分多。问应怎样截料才能使原材料消耗的总根数最少？试建立该问题的数学模型。

分析建模

最简单的办法是：每根原材料都截取长为 2.9m、2.1m、1.5m 的钢筋各一根，从而组成一套钢筋架，同时剩料头 0.8m。为作 100 套钢筋架，需消耗原材料 100 根，剩料头 80m。这显然不是好的截料方案。若改用合理套裁可节省原材料，而且用 LP 方法还可找出用料最省的套裁方案。为此，先建立其 LP 模型，方法如下：

先将剩料头不超过 0.8m 的全部截料方案列于表 1-2 中，观察可知，混合使用表 1-2 所列各种方案可以得到 100 套钢筋架。

表 1-2

截料方案号 元 件 种 类	I	II	III	IV	V
2.9 (m)	2	0	1	0	1
2.1 (m)	0	2	2	1	1
1.5 (m)	1	2	0	3	1
剩料头长 (m)	0	0.1	0.2	0.7	0.8

设 x_j ($j=1, 2, \dots, 5$) 为用方案 j 截料的根数，各种方案搭配的结果应满足：每种长度的元件数目应恰好等于 100；目标是在完成 100 套钢筋架的前提下，使原材料消耗的总根数最少。据此可列出 LP 模型如下：

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 100 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 100 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

经计算（具体方法后面介绍）可得最优套裁方案为：用方案 I 截料 40 根，方案 II 截料 30 根，方案 III 截料 20 根，共用 90 根原材料即可做成 100 套钢筋架。

【例 3】（物资调运问题）某公司下属两个工厂，生产同一种产品。产品均可运往三个中心仓库去销售。已知每个工厂的产量，各仓库的销量及各工厂到每个仓库的运输单价如表 1-3 所示。又知工厂 A 生产单件产品的费用为 1.50 元，工厂 B 生产单件产品的费用为 2.00 元。问如何组织调运可使生产与运输的总费用最少？试建立其数学模型。

分析建模

设 x_{ij} 为从工厂 i 运往仓库 j 的产品数量, 这里 $i=1, 2$ 为工厂编号; $j=1, 2, 3$ 为仓库编号。如 x_{23} 为从工厂 B 运往仓库 3 的产品件数等等。由题给条件可建立模型如下:

目标要求是使生产和运输产品的总费用 (用 z 表示) 最小, 故可表达为

$$\begin{aligned} \min z = & (1.5 + 0.3)x_{11} + (1.5 + 0.6)x_{12} + (1.5 + 0.8)x_{13} \\ & + (2.0 + 0.5)x_{21} + (2.0 + 0.2)x_{22} + (2.0 + 0.4)x_{23} \end{aligned}$$

表 1-3

工 厂 \ 销售仓库	1	2	3	产量 (件)
A	0.30	0.60	0.80	2000
B	0.50	0.20	0.40	1400
销量 (件)	500	2000	900	

注: 表中每格右上角小格内的数字为相应运输单价

运量 x_{ij} 应满足的条件:

$$\text{各厂产量: } x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1400$$

$$\text{各库销量: } x_{11} + x_{21} = 500$$

$$x_{12} + x_{22} = 2000$$

$$x_{13} + x_{23} = 900$$

$$\text{运量非负: } x_{ij} \geq 0 \quad i=1, 2; j=1, 2, 3.$$

【例 4】(合理配料问题) 某工地需要尺寸分别为 d_1, d_2, d_3, d_4 的四种级配骨料, 其需量分别为 b_1, b_2, b_3, b_4 ; 当前各料场 (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) 均只有混合骨料 (足够多), 已知各料场的混合骨料含各尺寸骨料的百分比如表 1-4 所示。表中 P_{ij} 为 A_j 料场的混合骨料含 d_i 尺寸骨料的百分比, c_j 为 A_j 料场混合骨料的单价。试制订既能满足工地需要, 又花钱最少的购买计划。

表 1-4

百 分 比 \ 料 场	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	工地需量 (m^3)
骨 料 尺 寸						
d_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	b_1
d_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	P_{25}	b_2
d_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_{34}	P_{35}	b_3
d_4	P_{41}	P_{42}	P_{43}	P_{44}	P_{45}	b_4
单价 (元/ m^3)	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	

建模

设 x_j ($j=1, 2, \dots, 5$) 为从 A_j 料场购买混合骨料的数量。为满足工地需求, 这些变

一、LP 问题的解

考虑一般 LP 问题

$$(M_2) \begin{cases} \max(\text{或 min}) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & (2.1) \\ \text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\text{或} = \text{或} \geq) b_i, i = 1, 2, \dots, m & (2.2) \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n & (2.3) \end{cases} \end{cases}$$

可行解：满足约束条件 (2.2) 和 (2.3) 的决策向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 称为相应 LP 问题 (M_2) 的可行解；由 (M_2) 的所有可行解组成的集合称为 (M_2) 的可行域。

最优解：使目标函数 $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ 达到最优（最大或最小）值的可行解称为相应 LP 问题的最优解。

所谓求解 LP 问题 (M_2) ，就是在 (M_2) 的可行域中找出其最优解的过程。

二、只含两个变量的 LP 的图解法

如果一个 LP 问题只含两个决策变量，则它的可行域可以在平面上具体画出，因而可用图解法来求解。图解法只适于解两个变量的 LP 问题。但它简单、直观，有助于初学者理解 LP 问题求解的基本原理，因此方法应掌握。下面举例说明图解法的步骤。

【例 1】 用图解法求解下列 LP 问题

$$\max z = 5x_1 + 3x_2 \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 & (2.5) \end{cases}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_2 \leq 8 & (2.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 16 & (2.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 & (2.8) \end{cases}$$

【解】 需注意：(1) 在平面 x_1Ox_2 上，线性等式的图形是一条直线；线性不等式的图形是一个半平面。(2) 可行域是由所有约束条件和非负条件所限定区域的公共部分。

第一步：在坐标平面 x_1Ox_2 上找出可行域。

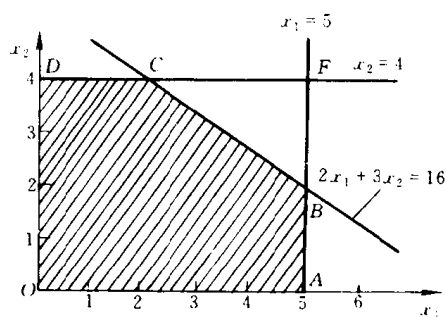


图 1-1

如图 1-1，在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系中，第 I 象限（包括坐标轴本身）就是满足非负条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 的所有点的集合；约束条件 $x_1 \leq 5$ 和 $2x_2 \leq 8$ ，进一步把可行域限制在矩形 $OAFD$ 中（包括边界）；为画出满足约束条件 $2x_1 + 3x_2 \leq 16$ 的区域，先画出直线 $2x_1 + 3x_2 = 16$ ，该直线就是约束条件 (2.7) 所限定区域的边界线。为找出满足 (2.7) 的半平面，任取不在边界线 $2x_1 + 3x_2 = 16$ 上的一个点，如 $(0, 0)$ 点，将该点坐标代入 (2.7)，显然满足： $2 \times 0 + 3 \times 0 < 16$ 。这表明点 $(0, 0)$

位于 (2.7) 所限定的半平面之中。

综上所述即可确定问题的可行域是包括边界在内的五边形 $OABCD$ 。可行域中的每一点都

满足全部约束条件；满足全部约束条件的点也都在可行域之中。

第二步：利用目标函数等值线找出问题的最优解。

目标函数 $z = 5x_1 + 3x_2$ 在 x_1Ox_2 坐标平面上的图形是以 z 为参数的一族平行直线。将直线方程写成 $x_2 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{z}{3}$ ，容易看出这族直线的斜率均为 “ $-\frac{5}{3}$ ”。

令 $z_0 = 9$ ，画出直线 $5x_1 + 3x_2 = 9$ （图 1-2 中的虚线），由于该直线上每一点对应的 z 值都等于 9，故称这种直线为目标函数等值线。再画出 $z_1 = 15$ 的目标函数等值线，从图中可以看出，随着目标函数等值线向右上方平行移动，目标函数值 z 逐渐增大（使 z 值增大的目标等值线的移动方向，就是价值向量 $(c_1, c_2) = (5, 3)$ 的指向）。我们希望找到一条 z 值尽可能大，且至少有一点留在可行域中的等值线，并称其为最优位置的目标等值线。由图 1-2 可知，过 B 点的等值线即为所求。 B 点是直线 $2x_1 + 3x_2 = 16$ 与 $x_1 = 5$ 的交点，解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 16 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

得 B 点的坐标 $(x_1, x_2) = (5, 2)$ ，这就是本问题的最优解。即

$$X^* = (5, 2)^T$$

代入目标函数式得： $z^* = 31$ 。就是说工厂每天生产 I 产品 5 件，II 产品 2 件获利最多，为每天 31 元。

从以上求解过程不难看到：

①二变量 LP 问题的可行域是有限个半平面和有限条直线的交集，因此，若非空它就必定是一个有界或无界的凸多边形。

②在可行域确定的前提下，LP 问题的最优解完全由目标函数表达式所确定。事实上，设 $z = c_1x_1 + c_2x_2 + f$ ，则目标等值线的斜率 $k = -\frac{c_1}{c_2}$ ，目标等值线沿向量 (c_1, c_2) 的指向平行移动时 z 值增大。由图解法可知：可行域确定之后，最优解是由斜率为 “ $-\frac{c_1}{c_2}$ ” 的目标等值线，沿方向 (c_1, c_2) 平行移动找到的。

③LP 问题只要有最优解，就一定可以从其可行域的顶点中找到。明确这一点是很有意义的，它表明：研究从整个可行域中寻求最优解的问题，只考虑从可行域的有限个顶点中找出最优解就可以了。这种思路对一般 LP 问题求解也是适用的。

三、最优解的类型

LP 的最优解有两种类型：

①唯一最优解。

若最优位置的目标等值线只含可行域中的一个点（这个点必是可行域的某个顶点），这个点就是 LP 问题的唯一最优解。如：例 1 中的 B 点就是问题的唯一最优解。

②无穷多最优解（也称多重解）。

例如：若将例 1 中的目标函数改为

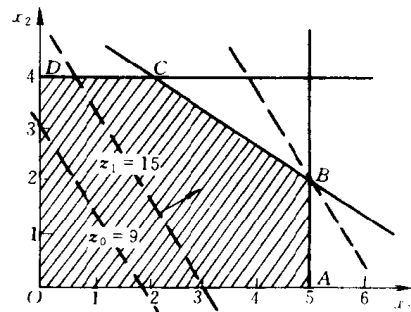


图 1-2

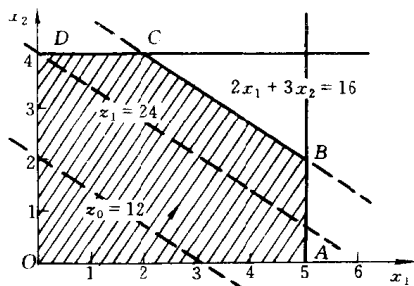


图 1-3

$$\max z = 4x_1 + 6x_2$$

其余条件不变,此时目标等值线与直线 $2x_1 + 3x_2 = 16$ 平行,故最优位置的目标等值线包含可行域的 BC 边(参见图 1-3)。于是可行域的顶点 B 和 C ,以及 BC 边上的每一点都是问题的最优解。出现这种情况我们就说 LP 问题有无穷多最优解。

我们称可行域顶点(即相应多边形的顶点)对应的最优解为**基本最优解**。本例的 B 点和 C 点都是基本最优解。一般地,若 X_1^* 和 X_2^* 都是 LP 问题的最优解,则其

连线上的每一点

$$X^* = \alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^* \quad \text{其中 } \alpha \in [0,1]$$

也都是问题的最优解。对图 1-3 所示的例子, $B(5, 2)$ 和 $C(2, 4)$ 都是最优解,该例的全部最优解即可表示为

$$\alpha(5, 2) + (1 - \alpha)(2, 4) = (2 + 3\alpha, 4 - 2\alpha), \alpha \in [0, 1]$$

四、几种情况的裁定与处理

1. 无界解的情况

若问题有可行解,但可行域无界且目标函数等值线($\max z$ 型)沿着使 z 值增大的方向可以无限制地移动而不离开可行域。

出现这种情况表明相应的 LP 问题虽有可行解,但却找不到最优解。此时称原问题为**无界解问题**。

【例 2】 分析以下 LP 问题的最优解。

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 用图解法确定该问题的可行域为图 1-4 中斜线标出的部分,它是可以向右无限延伸的无界域。目标函数等值线(虚线)可沿方向 $C = (5, 3)$ 无休止地移动,相应目标值也随之无限制地增大。由此即可判定该 LP 问题是一无界解问题。

对照实际问题分析出现这种情况的原因。一般实际问题本身是有最优解的。出现无界解的情况多是在建模过程中因忽略了某些不该忽略的约束条件而造成的。因此,一旦出现这种情况,应首先对照实际问题检查并找出丢掉的约束条件,修正模型、再求解,直到求出满意的最优解为止。

2. 无可行解的情况

此时可行域为空集,是由矛盾约束造成的。在研究实际问题时,需对照原问题检查模型中的约束条件。发现某些约束过强时,应适当放松这些约束;若问题本身就自然地存在着矛盾约束(这样的实际问题并不少见,如领导意图与实际条件的差距等等),这就要参照

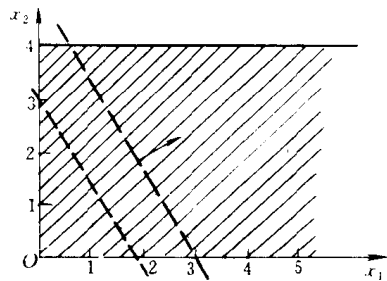


图 1-4

(M) 用矩阵描述时为:

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s. t. } \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (M'')$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [p_1, p_2, \cdots, p_n]; \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

C, X, b 的意义同 (M') 。

二、一般模型化为标准型的方法

单纯形法是以标准型为对象的。因此,用单纯形法求解 LP 问题时,需先将模型化为标准形式。化为标准型常用的四种变换如下:

①将 $\min z$ 化为 $\max z'$ 。

$$\text{对模型中的 } \min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

只需令 $z' = -z$, 并用 $\max \{z' = -\sum_{j=1}^n c_j x_j\}$ 代换 $\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, 其他条件不变。所得新模型与原模型有相同的最优解。求最优目标值时,只需把最优解代入原目标函数式即可。

②将不等式约束化为等式约束。

如果约束条件为“ $\leq$ ”型不等式,则在“ $\leq$ ”号的左端加一非负变量(称为松弛变量);如果约束条件为“ $\geq$ ”型不等式,则在“ $\geq$ ”号左端减去一非负变量(称为剩余变量,也可称为松弛变量)。这样即可把不等式约束化成等式约束。在目标函数式中松弛变量和剩余变量的系数均为零。

【例 1】 将下列模型化为标准型

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t. } \begin{cases} x_1 & \leq 5 \\ 2x_2 & \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 16 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

【解】 在各不等式约束左端分别加上松弛变量 x_3, x_4, x_5 , 使不等式变为等式, 即得标准型:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_3 & = 5 \\ 2x_2 + x_4 & = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 & = 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

对照 §1 例 1 可知: 松弛变量 x_3, x_4, x_5 表示未被利用的资源, 因此没有效益, 故在目标函数式中松弛变量的系数应为零。

③当 $b_i < 0$ 时, 用“ -1 ”乘等式两边, 使右端常数变为非负。