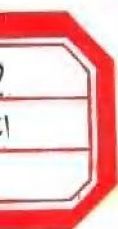


中等专业学校

工科专业试用教材数学第一册

教学参考书

上海市中等专业学校数学教学参考书编写组编



人民教育出版社

中等专业学校
工科专业试用教材数学第一册
教学参考书

上海市中等专业学校数学教学参考书编写组编

人民教育出版社出版

数学书上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 3 12/16 字数 77,000

1980年6月第1版 1980年10月第1次印刷

印数 00,001—27,000

书号 13012·0472 定价 0.30 元

编 者 的 话

中专工科专业数学教学参考书是根据一九七九年教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲，工科专业通用(试行草案)》和《中等专业学校试用教材(工科专业通用)数学》第一、二、三、四册编写的，共分四册。第一、二册教学参考书由上海市中等专业学校数学教学参考书编写组编写，第三册教学参考书由辽宁省中等专业学校数学教学参考书编写组编写，第四册教学参考书由北京市中等专业学校数学教学参考书编写组编写。

第一、二册教学参考书主要包括教材第一、二册各章的目的要求、重点和难点的分析、教学时数的具体分配、教学方法的建议以及部分习题的提示或解答等，可供招收初中毕业生的工科类中专数学教学参考。

第一、二册教学参考书是由上海市教育局组织的工科中专数学教学参考书编写组集体编写的。由上海机器制造学校任必同志和上海纺织工业专科学校秦柏前同志担任主编。参加编写的有上海科技大学分部周桐孙、上海电机制造学校江爱滋、上海港湾学校傅秀清等同志。由上海师范大学余元希同志审稿。在编写和对初稿审定过程中，曾得到上海轻工业专科学校金一鸥、上海建筑材料工业专科学校程守义、上海航空工业学校史震彝、上海港湾学校袁时中等同志的大力支持和帮助，提出了许多宝贵意见。此外，在征求意见过程中，山东省和上海市部分中等专业学校数学教师提出了许多宝贵意

见,在此一并表示感谢.

由于编者的水平所限,加以编写时间仓促,本书在内容和文字上都来不及过细推敲,难免有缺点和错误,希望大家批评指正,以便今后进一步修改提高.

一九八〇年四月

目 录

第一章	集合与函数·····	1
第二章	幂函数 指数函数 对数函数·····	21
第三章	任意角的三角函数·····	36
第四章	三角函数的简化公式 三角函数的图象·····	49
第五章	加法定理及其推论 正弦型曲线·····	58
第六章	反三角函数与简单的三角方程·····	77
第七章	复数·····	94

第一章 集合与函数

一 目的要求

1 使学生理解集合、子集、交集、并集、差集、全集、补集等概念，并能正确使用有关的术语和符号 ($\in$ 、 $\notin$ 、 $\subseteq$ 、 $\subset$ 、 $=$ 、 $\cap$ 、 $\cup$ 、 $\setminus$ 、 Ω 、 $\overline{A}$)。

2 使学生掌握并能正确使用集合的两种表示法(列举法和描述法)。

3 使学生理解函数及其定义域、值域的概念，会求简单的函数的定义域和用描点法作出函数的图象。

4 使学生理解反函数的概念以及互为反函数的函数图象间的关系。

二 教材说明

本章教材分成四节。第一、二节讲述集合的简单知识，第三、四节讲述函数和反函数的基本知识。

集合是现代数学最基础的概念之一。中专学生学习一些集合的简单知识，对学习近代数学、现代科学技术和直接参加生产建设都是必要的。学生在初中对集合的思想已有所了解，课本中出现过数、式、点、形的集合的例子，但未出现集合的名称。大纲指出：“把集合等现代数学术语和符号适当地运用到教材中去，以利于加深对有关教材内容的理解，同时也为进一步学习作准备”。中专数学教材把“集合与函数”列为第一

章,目的就在于此. 集合的概念比较抽象,教材一开始,列举了学生熟悉的事例,引进了集合的概念,介绍了集合的两种表示法. 在这个基础上,说明了集合与集合之间的包含与相等的关系,从而介绍了交、并、差、补等集合的概念和运算. 关于集合的各种运算律,教材中没有这方面内容,也不要求学生掌握.

函数是数学中的一个极其重要的基本概念. 考虑到学生的接受能力,教材采用的函数定义指的是单值函数(即对于 x 的每一个可能取的值, y 都有唯一确定的对应值). 通过集合间元素的单值对应关系建立了函数的定义域、值域的概念,并说明了函数图象的意义,从而使学生加深对函数概念的理解. 区间是数学中常用的概念和符号,教材采用集合来描述区间. 引进了区间以后,函数的定义域就可用不等式、集合和区间等三种方法来表示,教学中可通过例题和习题使学生逐步地掌握它们. 反函数的概念也是在单值对应的基础上提出的,教材通过实例引入反函数的概念,并讨论了互为反函数的函数图象之间的关系.

本章是学习以后各章的基础. 集合的思想、术语、符号和函数的概念贯穿于整个教材.

本章教材的重点: 集合、函数及反函数等概念.

本章教材的难点: (1) 集合以及集合间的各种关系; (2) 用集合的观点来理解函数; (3) 函数定义域的求法.

本章概念较多,又比较抽象,所以要注意从学生的实际出发进行教学. 要多举例题示范,从感性认识提高到理性认识;要注意运用对比的方法;要注意结合图形来说明有关的概念.

本章教学约需 12 课时,具体分配如下(仅供参考):

§ 1-1	集合的概念	约 2 课时
§ 1-2	集合与集合的关系	约 4 课时
	集合内容小结	约 1 课时
§ 1-3	函数	约 3 课时
§ 1-4	反函数	约 2 课时

三 教学建议

1 集合概念是最原始的概念之一,在数学中我们不能用其他更基本的概念给它下定义,只能对它作描述性的说明.集合的概念比较抽象,教学一开始,可从学生熟悉的事例出发引出集合的概念.除教材所举例题外,还可举下面的一些例题:“学校的全体师生”,“金工车间的全部机床”,“有理数的全体”,“整式的全体”,“矩形的全体”,“平面上与两定点的距离相等的点的全体”等等.通过这些例题,说明集合中的元素可以是任何对象.本教材着重讨论数集,如无特殊说明,都是指实数集合.

集合与其元素之间的关系是“属于”或“不属于”的关系.要使学生明确一个给定的集合,就是指这个集合中的元素是确定的,能根据集合的元素所具有的共同性质来判断哪些事物是集合的元素,哪些不是.例如,对于由所有直角三角形组成的集合,显然,边长分别是 3、4、5 的三角形是直角三角形,所以属于这个集合,而边长分别是 4、4、5 的三角形不是直角三角形,所以就不属于这个集合.教材规定了实数集、正实数集、负实数集、有理数集、整数集、自然数集等的记号,这些记

号在以后各章中常要用到,应使学生牢记.为此,可给学生作以下的练习:

在____处填上符号 $\in$ 或 $\notin$:

(1) 1 ____ N , 0 ____ N , -2 ____ N , $\sqrt{3}$ ____ N ;

(2) 1 ____ Z , 0 ____ Z , -2 ____ Z , $\sqrt{3}$ ____ Z ;

(3) 1 ____ Q , 0 ____ Q , -2 ____ Q , $\sqrt{3}$ ____ Q ;

(4) 1 ____ R , 0 ____ R , -2 ____ R , $\sqrt{3}$ ____ R .

在讲集合的表示法时,要指出集合中元素的三个特征,即元素的确定性(不能模棱两可),元素的互异性(不能重复出现)和元素的无序性(不管顺序).

列举法和描述法是表示集合的两种不同方法,究竟选用那种表示法,要看具体问题而定.有些集合,两种表示法都可选用,但有些集合只能用其中一种.例如,集合 $\{-2, 0, 3, 5\}$ 中的元素不易看出它们的共性,所以不宜用描述法表示;集合 $\{x|x^2-5x+6>0\}$ 中的元素是无限的,所以不能用列举法表示;集合 $\{x|x^2-4<0, x\in Z\}$ 也可用列举法表示,即 $\{-1, 0, 1\}$. 为了使学生熟悉和掌握这两种表示法,并借以复习和加深初中学过的知识,教师可多举例题,作明确、具体的讲解示范,并给学生多作练习.除教材习题 1-1 中的有关习题外,还可选用以下的习题:

(1) 用适当的方法表示下列集合:

(i) 10 以内的奇数;

(ii) 5 的倍数;

(iii) 适合不等式 $x^2-2x-8<0$ 的所有整数;

(iv) 平面上以原点为圆心, R 为半径的圆上及圆内所有

的点.

(2) 把下面的集合用适当的方法表示:

(i) $A = \{\text{绝对值小于 } 4 \text{ 的整数}\};$

(ii) $B = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20\};$

(iii) $C = \{x | x^2 - 8x + 15 < 0, x \in Z\};$

(iv) $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, y = x^2\}.$

集合可分为有限集合与无限集合. 当集合的元素的个数很多或是无限时, 用描述法来表示较好. 如 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ 可写为 $\{\text{小于 } 100 \text{ 的自然数}\}$, $\{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$ 可写为 $\{5 \text{ 的正倍数}\}$. 单元素集合 $\{a\}$ 与单个元素 a 是两个不同的概念, a 表示元素, 而 $\{a\}$ 表示由这个元素 a 构成的集合. 集合 $\{0\}$ 与空集 $\emptyset$ 这两个概念, 学生容易混淆. 学生对空集的理解较为困难, 往往把 $\{0\}$ 错误地认为是空集. 应该指出“0”本身就是一个元素, 它的数值是 0, 因而 $\{0\}$ 不是空集, 而是以 0 为元素的单元素集. 有的学生不懂得没有元素也能成为集合. 教师可指出: “有时, 我们把具有某种性质的一切对象看成一个集合, 但是还不知道这种对象是否存在, 后来发现这种对象并不存在, 则这个集合就成为空集.” 譬如, 教师说: “明天上午缺课的同学下午进行补课”. 这时, “明天上午缺课的同学”是一个集合, 但是第二天上午并没有同学缺课, 于是这个集合就成了空集.

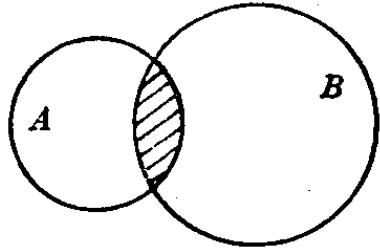
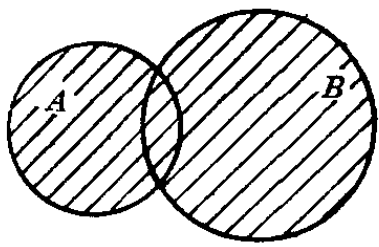
2 在讲子集时, 先讲清楚两个集合之间的包含关系, 然后给出子集的定义. 设两个集合 A 和 B , 如果 A 中的每一个元素都在 B 中, 我们就说集合 B 包含集合 A , 或说集合 A 包含于集合 B 内, 并记为“ $A \subseteq B$ ”或“ $B \supseteq A$ ”. 用元素与集合的

关系来说, 就是: 如果 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 就说 $A \subseteq B$. 这时我们也说 A 是 B 的子集. 容易推得, 对于集合 A 、 B 、 C , 如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 那末 $A \subseteq C$. 例如, 整数集 Z 是有理数集 Q 的子集, 而有理数集 Q 又是实数集 R 的子集, 所以整数集 Z 是实数集 R 的子集, 即 $Z \subseteq Q \subseteq R$. 从子集的定义出发, 可推得一个集合 B 的本身和空集 $\emptyset$ 都是 B 的子集, 从而给出真子集的定义和记号: 如果 A 为 B 的真子集, 则 $A \subset B$ 或 $B \supset A$; 也就是 A 真正包含于 B 内. 例如, 有理数集是实数集的一个真子集. 有些书上也用 “ $A \subset B$ ” 表示 A 是 B 的子集, 用 “ $A \subset B$, 但 $A \neq B$ ” 表示 A 是 B 的真子集.

教材是用 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 来定义 $A = B$ 的. 因为 $A \subseteq B$, 所以 A 的元素都是 B 的元素; 又因为 $B \subseteq A$, 所以 B 的元素都是 A 的元素, 这就是说, 集合 A 与集合 B 的元素完全相同, 然后给出 $A = B$ 的定义, 这样讲解有助于学生理解. 注意 “ $\in$ ” 与 “ $\subseteq$ (或 $\subset$)” 这两种符号的区别. “ $\in$ ” 用在元素与集合之间, 表示从属关系; “ $\subseteq$ (或 $\subset$)” 用在集合与集合之间, 表示包含 (或真包含) 关系.

为了直观、形象地说明集合与集合之间的关系, 常用圆 (或任何封闭曲线围成的图形) 表示一个集合, 而用圆中的点表示该集合的元素. 教材中图 1-2 表示了集合 A 是集合 B 的子集, 更恰当地说, 它表示了集合 A 是集合 B 的真子集.

3 讲述两个集合的交集和并集时, 可先举例说明, 再下一般的定义. 要讲清这两个定义中的 “且” 与 “或” 这两个字的意义, 并使学生能正确运用这两个字. 交集与并集这两个概念容易混淆, 教师可在讲完之后进行对比如下:

集合名称	元素	符号	示意图
A 与 B 的交集	$x \in A$ 且 $x \in B$	$A \cap B$	
A 与 B 的并集	$x \in A$ 或 $x \in B$	$A \cup B$	

讲交集时,指出教材 § 1-2 例 3 中由于 x 表示实数,所以

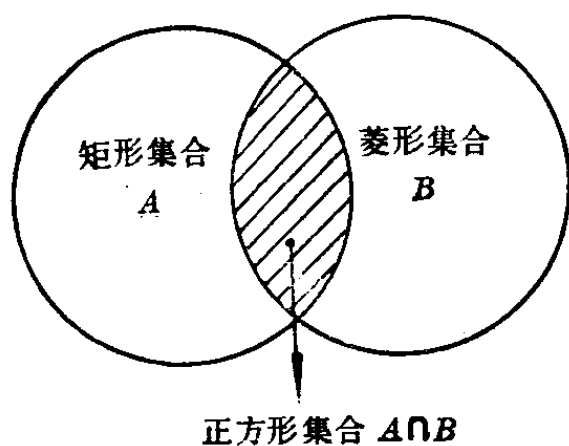


图 1-1

$A \cap B$ 可用数轴上的点集合 (即线段) 表示; 例 4 中的 $A \cap B$ 表示矩形集合与菱形集合的交, 就是正方形集合, 如图 1-1 所示; 例 5 中的 A 表示偶数集合, B 表示奇数集合, $A \cap B$ 表示空集 $\emptyset$, 如图 1-2 所示, 它们是相离的两个圆, 表示这两个集合没有公共元素.

讲并集时, 对于教材上的例 8 (写出不等式 $|x-2| < 1$ 的解集), 可复习初中解绝对值不等式的知识, 这样有助于学生用交集和并集的概念来理解这个例题的解法.

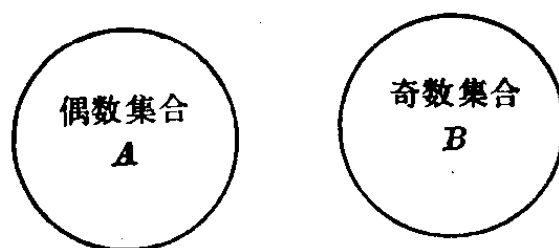


图 1-2

4 讲差集时, 指出 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 的区别, 并用图说明. $A \setminus B$ 是在 A 中挖去 B 的部分, $A \setminus B$ 的元素在 A 中, 但不在 B 中(图 1-3); $B \setminus A$ 是在 B 中挖去 A 的部分, $B \setminus A$ 的元素在 B 中, 但不在 A 中(图 1-4). 注意, 教材例 12 中的 $M_1 - M_2$ 应表示教材图 1-13(e) 不包含圆周在内的阴影部分.

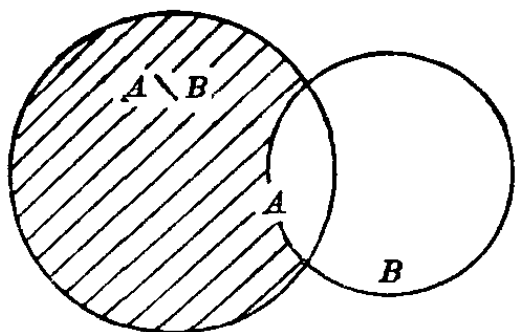


图 1-3

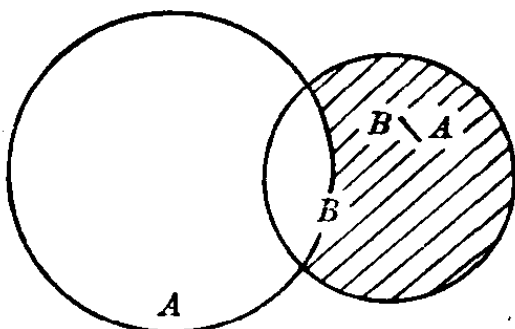


图 1-4

讲全集和补集时, 指出补集是对全集而言的, 即使是同一个集合, 由于所取的全集 Ω 的不同, 它们的补集是不同的. 除了教材上的例子以外, 还可举以下的例子:

(1) 设 $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$, 求 $\bar{A}$;

(2) 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$.

5 讲完集合之后, 可用 1 个课时对所讲主要内容, 结合学生在学习中的存在的问题进行复习小结, 并作复习题一中的有关习题. 复习小结内容如下:

(1) 集合及其表示法:

集合 $A = \{x | x \text{ 所具有的共同性质}\}$,

元素 $x \in A$.

(2) 包含与相等的关系:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \text{ (包含关系)} \\ A = B \text{ (相等关系)} \end{array} \right\} A \subseteq B.$$

(3) 子集与真子集:

若 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的子集 (若 $x \in A$, 必有 $x \in B$);

若 $A \subset B$, 则 A 是 B 的真子集 (B 中至少有一个元素 y , $y \notin A$).

(4) 交集、并集、差集:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B;$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B, \\ A \cap B \subseteq A \cup B;$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}, \quad A \setminus B \subseteq A, \quad A \setminus B \subseteq A \cup B.$$

(5) 全集与补集:

$$\bar{A} = \{x | x \in \Omega, x \notin A\}, \quad \Omega \setminus A = \bar{A}.$$

(6) 几个等式关系:

$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

6 讲解函数的定义时要讲清以下几点:

(1) 在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , y 依赖于 x 而变化;

(2) y 与 x 之间的依赖关系通过 y 与 x 之间的对应关系表示出来;

(3) 这个对应关系是单值对应, 就是对于变量 x 的每一个可能取的值, 变量 y 都有唯一确定的对应值;

(4) 我们把具有以上关系的 y 叫做 x 的函数 (单值函

数). x 叫做自变量, y 又叫做因变量.

虽然教材只讲单值对应, 不讲一对多、多对一、多对多的对应关系, 但应使学生理解在定义域里对于 x 的每一个值通过对应关系 f 都有唯一确定的一个 y 的值和它对应, 这时 y 是 x 的函数. 但是对于 x 的几个不同的值可能对应着同一个 y 值, 这时 y 也是 x 的函数. 例如, $y=x^2$, 当 $x=\pm 1$ 时, $y=1$. 这样讲了以后, 对后面讲反函数时可以方便一些.

讲解函数时要突出“函数的定义域”和“变量间的对应关系”, 这是函数的两个要素. 通过教学要使学生明了每一个函数都有定义域和值域, 离开了函数的定义域来讨论函数是没有意义的. 我们所研究的函数都是在给定的一个数集里来研究的, 它的值域也是一个数集. 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如果函数是用数学式子表示, 在没有附加说明时, 函数的定义域就是指使这个式子有意义的所有实数 x 的集合. 学生对于求函数的定义域有一定困难, 教学中可多举例示范, 指出思路 and 求法. 要求学生能正确地求出简单函数的定义域, 关于函数的值域, 有时先要将函数变形后才能求出, 对学生暂不作要求.

7 关于函数记号 $y=f(x)$, 学生初次接触, 接受有一定困难. 要指出: “ y 是 x 的函数”用记号 $y=f(x)$ 写出, 它表示 x 是自变量, y 是自变量的函数, 它们之间的对应关系是 f , $f(x)$ 不是 f 与 x 的乘积. 要使学生弄清楚函数值 $f(x_0)$ 的意义, 以及它与 $f(x)$ 的区别和联系. 函数的对应关系 f 不一定都能用一个解析式表示. 教材举了分段函数的例子 (不提分段函数的名称), 要使学生理解每一个解析式中变量 x 的取值

范围,从而能正确求出 $f(x_0)$ 和画出图象.

8 教材介绍了区间的概念,要求学生能用区间表示函数的定义域,同时也能用集合、不等式的方法来表示函数的定义域. 应该指出:两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,它们才是相同的. 如果对应关系相同而定义域不同,这两个函数仍然是不同的. 教材举了函数 $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$ 的例子. 学生往往会把 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$ 错误地认为就是 $\varphi(x)=x$, 因而得出 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内表示同一个函数. 事实上,

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x< 0) \end{cases},$$

所以只有当 $x\geq 0$ 时 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 才相同. 又如, 函数 $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 与 $\varphi(x)=|x|$ 是不同的函数, 而函数 $f(x)=1$ 与 $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 是相同的函数.

9 教材用集合的观点说明了函数的图象的意义. 通过教材 § 1-3 例 4, 可以知道函数的图象不一定是一条直线或曲线, 也可以是一些离散的点或线段. 教材的例 5 所画函数的图象中, 当 $x\in[0, 2)$ 时, $y=x$ 的图象应是不包括 B 点的线段 OB ; 当 $x\in[2, 4)$ 时, $y=-x+4$ 的图象应是不包括 C 点的线段 BC ; 当 $x\in[4, 6]$ 时, $y=x-4$ 的图象是线段 CD , 所以函数 $y=f(x)$ 的图象是一条折线 $OBCD$.

10 讲反函数时, 教材先通过例题说明在实际问题中, 哪个是自变量, 哪个是自变量的函数, 并不是绝对的, 要根据所研究的具体问题来决定, 从而引入反函数的概念. 例如, 教材所举的引例中, 如果已知时间 t 要求水量 V , 则以 t 为自变

量, V 为 t 的函数(图 1-5), 即

$$V = 2t + 4. \quad (1)$$

如果已知水量 V , 要求时间 t , 则以 V 为自变量, t 为 V 的函数(图 1-6), 即

$$t = \frac{V - 4}{2}. \quad (2)$$

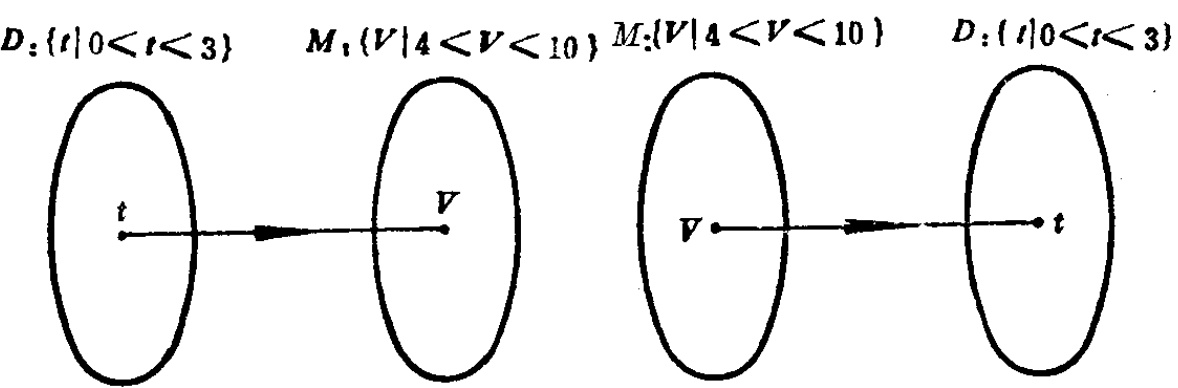


图 1-5

图 1-6

如果把函数(1)中的由 $t \rightarrow V$ 叫做对应关系, 那末函数(2)中的由 $V \rightarrow t$ 就叫做反对应关系。函数(1)的定义域与值域分别是函数(2)的值域与定义域。给出一般的反函数的定义后, 可用下图说明它们的对应关系和反对应关系(图 1-7)。

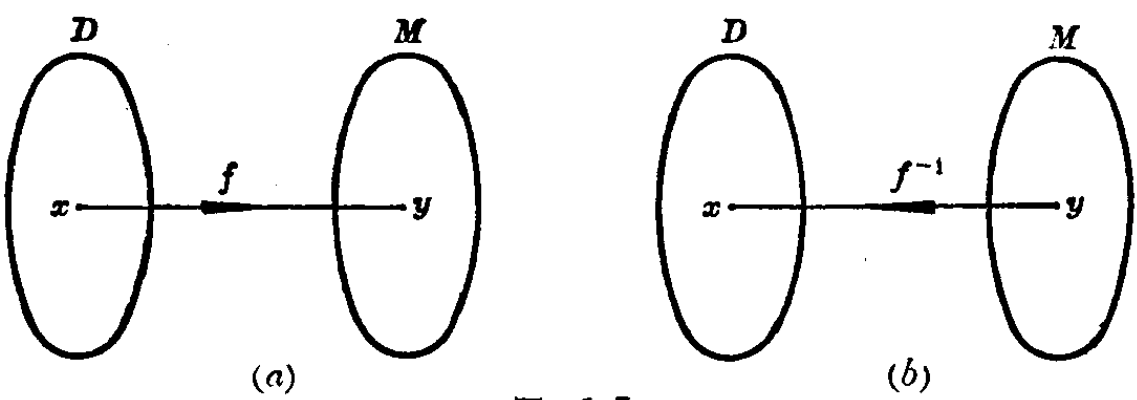


图 1-7

讲解函数 $y = f(x)$ 的反函数时, 还可用下面的方式来说明它们之间的关系;