

光学薄膜原理

林永昌 卢维强 编著



光学薄膜原理

林永昌 卢维强 编著

J41/201/20

国防工业出版社

内 容 简 介

光学薄膜是现代光学的重要组成部分，本书论述光学薄膜的四个主要问题：一、薄膜光学理论。内容包括光学薄膜电磁理论基础，膜系计算方法，金属薄膜光学，膜系基本定理，非均匀膜和厚膜。二、膜系设计方法。叙述膜系解析设计技术、网络设计理论和自动设计。三、膜系进展。对各类具体光学膜给出设计、性能和应用等方面的进展。四、监控技术和误差理论。为薄膜元件的工业化生产提供技术理论。

本书对象为从事光学薄膜研究、生产、应用等方面的科研人员和工程技术人员，本书亦可作为高等学校光学专业师生的教学用书或教学参考书。

光 学 薄 膜 原 理

林永昌 卢维强 编著

国防工业出版社出版、发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/16 印张23¹/₂ 542千字

1990年5月第一版 1990年5月第一次印刷 印数：0,001—1,065册

ISBN 7-118-00543-6/O·40 定价：12.00元

序

经过了最近二百年来人类的努力，光学薄膜已经成为现代光学的重要组成部份。现在，人们都认识到，没有光学薄膜，就没有现代的光学仪器。

在这二百年的发展过程中，光学薄膜已经建立了一整套完整的光学理论——薄膜光学，发展了自成体系的膜系设计方法，设计并制造了各类光学薄膜，如增透膜，分光膜，反射膜，截止滤光片和带通滤光片等，并且开始形成自己的产业。

回顾历史，薄膜光学最早的萌芽是 17 世纪“牛顿环”的发现，但用干涉原理对牛顿环作出科学解释要晚 150 年，即 1801 年杨 (Young) 在世界上第一次阐述光的干涉原理之后这种现象才得到圆满的解释。薄膜光学真正的起步应该从 1817 年夫琅和斐 (Fraunhofer) 用酸蚀法在世界上制得第一批增透膜和 1899 年出现的法布里-珀洛 (Fabry-Perot) 标准具算起，法布里-珀洛标准具现在是带通滤光片的基本结构形式。

1873 年，麦克斯韦的巨著“论电与磁”出版，该书从理论上和本质上证明了光波是电磁波，为波动光学的发展，亦为薄膜光学的发展奠定了理论基础。

但是，直到 19 世纪末，人们没有找到实际解决制造各种薄膜的工艺方法和膜系计算分析手段，因此在 20 世纪以前是薄膜光学的早期发展阶段。

1930 年油扩散泵发明了，使得工业制造各种薄膜成为实际可能，接着在实验室制造出单层反射膜，增透膜，分光膜和金属的法布里-珀洛干涉滤光片。

在上述实际工作的推动下，从 40 年代开始，薄膜光学进入全面发展时期，相继提出了各种薄膜光学理论和膜系计算方法，1956 年瓦施切克 (Vašiček) 发表第一本薄膜光学专著：“薄膜光学” (Optics of Thin Films)。到了 60 年代，由于激光、空间技术和光谱技术的飞速发展和电子计算机的推广应用，推动了光学薄膜的飞速发展，1969 年麦克劳德 (Macleod) 用干涉矩阵解释和计算光学薄膜，出版了他的专著“薄膜光学滤光器” (Thin-Film Optical Filters)，接着，在 1976 年尼特尔 (Knittle) 发表了她的专著“薄膜光学” (Optics of Thin Films)，在理论上全面的讨论了薄膜光学的一些问题。

薄膜光学本身的发展主要是解决光学薄膜的理论和计算问题，接着提出的是各类光学薄膜的设计问题。

膜系设计与光学设计不同，这是因为光学设计的基础是几何光学，而膜系设计的基础是物理光学，是光的干涉原理，最早的膜系设计是试凑法、图解法，但这只能解决一些简单膜系的设计问题，随着优化技术和电子计算机的推广应用，除了发展基于薄膜光学理论的解析设计，杨和西利 (Seely) 根据电路网络设计理论的进步，在膜系设计理论中引入网络设计理论。到 70 年代，膜系设计有更大发展的是用计算机辅助的各种设计方法，特别是膜系自动设计。1981 年利德尔 (Liddell) 出版了膜系设计专著“多层膜设计中的计算机辅助技术” (Computer-aided Techniques for The Design of Multilayer Filters)。

在70年代以前,虽然薄膜光学和膜系设计已发展到很高水平,在实验室亦已经制造成功各类薄膜元件,但是薄膜元件的成品率不高,为了薄膜元件大规模的工业化生产,在70年代着重发展了膜系误差理论和监控技术。据此,我们构思了全书的内容:第一篇,薄膜光学理论;第二篇,膜系设计方法;第三篇,膜系进展;第四篇,监控技术和误差分析。全书由林永昌主编,其中第一篇,第二篇和第四篇的最后一章由林永昌编写,第三篇和第四篇的其余各章由卢维强编写。虽然我们想努力使本书反映光学薄膜的基本理论、设计方法、进展和工业生产理论,但限于我们的水平,缺点和不足一定很多,敬请读者指正。

编者

1988年9月

目 录

第一篇 薄膜光学理论	1
第一章 薄膜光学的电磁理论基础	1
第一节 薄膜干涉的特点和关于薄膜的基本假定	1
第二节 麦克斯韦方程	4
第三节 在各向同性均匀介质中的波动方程	6
第四节 平面电磁波	7
第五节 电磁波的能量	12
第六节 麦克斯韦方程的边界条件	14
第七节 反射定律和折射定律	16
第八节 菲涅耳公式	17
第九节 单一界面的反射率与透射率	21
第二章 光学薄膜的光学特性计算方法	23
第一节 递推法	23
第二节 菲涅耳系数矩阵法	28
第三节 导纳矩阵和位相矩阵	32
第四节 膜系传递矩阵	34
第五节 干涉矩阵	35
第六节 本征值与反射率	40
第七节 单层介质膜的主要光学特性	44
第八节 膜系的透射率与吸收率	47
第九节 光学薄膜的驻波场计算方法	49
第十节 矢量作图法	51
第十一节 吸收膜系的图解法	53
第三章 金属薄膜光学	56
第一节 在金属中的折射定律、非均匀波	56
第二节 不变式	61
第三节 在介质金属界面上的菲涅耳公式	63
第四节 折射后矢量 E 和 H 的取向	65
第五节 折射波的坡印廷矢量	67
第六节 单层金属膜	69
第七节 全反射	83
第八节 受抑全反射 (FTR)	88
第九节 一般膜层系统	90
第十节 弱损耗介质情况一般膜层系统的吸收分布	98
第四章 膜系的基本定理	101
第一节 膜系的透射定理	101

第二节	普遍的等效定理	102
第三节	对称膜系的等效定理	103
第四节	一般周期结构膜系概述	121
第五节	偶数型周期结构膜系的带宽理论	122
第六节	对称性原理	127
第七节	透增透射膜系前扩张定理	130
第八节	关于最大透射率定理	131
第五章	非均匀膜	139
第一节	在非均匀介质中的波动方程	139
第二节	WKBJ (几何光学) 近似	144
第三节	某些精确解	146
第四节	作为膜系一部分的非均匀膜	149
第五节	单层非均匀膜的反射系数和透射系数	153
第六节	用数值积分直接解波动方程的通用方法	157
第七节	单次反射的近似, 双曲剖面	162
第八节	数值计算举例	165
第九节	非均匀膜制备中的几个问题	171
第六章	厚膜	175
第一节	镀膜的平行平板玻璃	175
第二节	平板玻璃堆	178
第三节	胶合平板	178
第四节	立方棱镜	180
第二篇	膜系设计方法	185
第七章	解析法设计	185
第一节	导纳匹配技术	185
第二节	双有效界面法	188
第三节	等效折射率法	190
第四节	消色设计技术	192
第五节	起偏设计技术	194
第六节	消偏振设计技术	196
第八章	多层膜的网络设计理论	209
第一节	公式变换	209
第二节	能量关系式	211
第三节	a_r 和 b_r 的求解方法	213
第四节	$N_{kr}^{(a)}$ 和 $N_{kr}^{(b)}$ 的逆运算	214
第五节	设计中的一些说明	216
第九章	膜系自动设计	217
第一节	问题的提出	217
第二节	评价函数	218
第三节	最小二乘法	221

第四节	最速下降法	224
第五节	共轭斜量法	225
第六节	变尺度法	228
第七节	单纯形法	231
第八节	统计试验法	235
第九节	求总极值的方法	237
第三篇 膜系进展		239
第十章	减反射膜	239
第一节	可见光区的减反射膜	240
第二节	多波段减反射膜	245
第三节	单波长减反射膜和斜入射时的减反射膜	248
第四节	红外减反射膜	251
第五节	光学塑料镀膜减反射膜	253
第十一章	反射膜	254
第一节	金属反射膜	254
第二节	全介质高反射膜	257
第三节	宽带介质高反射膜	261
第四节	负滤光片	262
第十二章	分光膜	266
第一节	金属分光镜	266
第二节	介质分光镜	268
第三节	偏振分光镜	269
第四节	消偏振分光镜	271
第十三章	截止滤光片	276
第一节	干涉截止滤光片	276
第二节	彩色分光元件	279
第三节	反热镜和冷光镜	283
第十四章	带通滤光片	287
第一节	宽带滤光片	288
第二节	法布里-珀洛干涉滤光片	289
第三节	矩形多半波带通滤光片	293
第四节	云母石英干涉滤光片	297
第五节	诱导透射滤光片	308
第六节	波长渐变滤光片	302
第七节	紫外滤光片	304
第八节	红外带通滤光片	307
第九节	软X光滤光片	310
第四篇 监控技术和误差分析		313
第十五章	光学监控技术	313
第一节	导纳图	313

第二节	极值法监控技术	315
第三节	定值法监控技术	323
第四节	光度值法监控技术	327
第五节	变波长极值法监控技术	329
第六节	宽光谱监控技术	329
第七节	波长调制法监控技术	331
第十六章	石英振荡法监控技术	332
第一节	原理和精度	332
第二节	薄膜的自动控制技术	335
第十七章	光学薄膜的误差分析和监控决策	336
第一节	膜系误差灵敏度分析	336
第二节	膜系的允差分析	339
第十八章	薄膜误差成因	348
第一节	电介质的色散	348
第二节	伪吸收	354
第三节	表面粗糙度	356
第四节	累积色效应	358
第五节	斜入射效应	360
第六节	制造误差	363

第一篇 薄膜光学理论

薄膜光学是研究光在分层介质中传布规律的一门科学，它主要研究光在分层介质中传布时的分光透射特性，分光反射特性，分光吸收特性，以及光的偏振状态和相位变化等现象。

我们知道，光波是一种电磁波，光波在分层介质中的传布是电磁波的传布，我们从麦克斯韦电磁理论出发，首先说明什么是薄膜，讨论薄膜干涉的特点和关于薄膜的基本假定，深入讨论光波在薄膜中传布时的基本性质和定理，总结现有光学薄膜光学特性的计算方法，同时亦用整个一章的篇幅讨论厚膜现象，给出厚膜对薄膜各种光学量影响的计算方法；限于目前的发展水平，讨论只限于一些特定厚膜。

对于分层介质，我们除讨论全介质光学薄膜外，还着重讨论了金属薄膜和金属介质组合膜系统，并应用在金属膜中建立起来的非均匀波概念，讨论全反射和一种特殊的介质膜——受抑全反射膜。

另外，在讨论了上述各种均匀膜理论之后，本篇还对正在发展中的非均匀薄膜，在理论上作了较深入的讨论。

第一章 薄膜光学的电磁理论基础

第一节 薄膜干涉的特点和关于薄膜的基本假定

目前薄膜光学研究和应用的光的波段范围是：可见光，红外的近红外、中红外和波长小于 $25\mu\text{m}$ 的远红外，以及紫外的近紫外和真空紫外，最近若干年， x 光波段亦正在受到世界各国越来越多的重视。

我们知道光波是电磁波，因此光波在分层介质中传布时就应该具有波动的基本特征——干涉现象。我们讨论的薄膜的干涉具有如下特点：

一、薄膜干涉的时间相干性特点

二束光波相遇产生干涉现象的必要条件是：

- (一) 两束光波的频率相同
- (二) 两束光波的振动方向相同
- (三) 两束光波的周期差保持恒定

但是考虑到光源发光的实际情况，只满足此必要条件的两束光波还不一定能产生干涉现象。我们知道，原子发光过程是不连续的，每个原子一次发光只能持续一定时间 τ ，并发射一个长为 l_0 的波列，如光速为 c ，则

$$l_0 = c\tau \quad (1-1)$$

因为光源上单个原子发光是自发的和不规则的，前后两次发射的波列之间无固定的位相关系，所以只有同一波列的光波分光后再相遇才能叠加产生强度分布稳定的干涉现象。不同波列的光波叠加所得到的均匀强度分布，没有干涉条纹。可见，两束光波的光程差不能超过波列长度 l_0 ，所以 l_0 又叫相干长度，相应的持续时间 τ 又叫相干时间。

我们称光源能产生干涉的最大光程差为光源的相干光程，用符号 L_M 表示，即

$$L_M = m\lambda \quad (1-2)$$

式中， m 是两束光波能够产生干涉条纹的最高干涉级，或者说 m 是能够分辨条纹的最高干涉级； λ 是光源波段中的最小波长。因为我们能够分辨的最高干涉级 m 为：

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (1-3)$$

所以，

$$L_M = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (1-4)$$

式中 $\Delta\lambda$ 为光源波段宽度。上式表明，能够发生干涉的最大光程差或相干长度与光源的波长宽度成反比。光源的波长宽度越小，就能够在更大的光程差下观察到干涉条纹。例如，用白光作光源时，人眼不能分辨波长相差小于 100 \AA 的两种光波的颜色，如果我们把可见光的平均波长算作 5000 \AA ，则相干光程 $L_M = 25 \mu\text{m} = 0.025 \text{ mm}$ 。

从发光机构看，相干光程 L_M 就是相干长度 l_0 ，即 $L_M = l_0$ ，所以 $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau$ ，于是：

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c\tau} \quad (1-5)$$

由上式可知，光源非单色性对干涉条纹对比的影响乃是光源时间相干性的反映。所以表示光源的时间相干性可以用相干光程、单色性、相干长度、相干时间或谱线宽度，这些说法都是等效的。

由于一般的光学零件，它的几何厚度都在毫米数量级，它远远超过相干光程，因此，光学零件的上下二个表面不会产生干涉现象。但是，在光学零件上镀的薄膜，由于薄膜的光学厚度小于相干光程，在薄膜的上下两界面上将产生光的干涉现象。

我们定义：当介质的厚度很薄，以至于光束通过它产生的程差小于相干光程时，我们称这样薄的介质为薄膜；当介质较厚，光束通过它产生的程差大于相干光程时，对这样的介质我们称为厚膜。当然，薄膜和厚膜是相对光源的单色性而言的，对单色性非常好的激光光源，则不论多厚的玻璃，都可看成是薄膜。例如对氦氖激光器来说， $\Delta\lambda \leq 10^{-7} \text{ \AA}$ ，所以 $L_M \geq 36 \text{ km}$ ，因此一切实际的光学零件都可按薄膜现象解释。

结论：薄膜会产生干涉现象，厚膜或玻璃零件对非激光光源则不会产生干涉现象。计算薄膜的光学性质用振幅的矢量和，计算厚膜的光学性质用强度的数量和。这就是薄膜和厚膜的本质区别。

二、薄膜干涉的空间相干性特点

在干涉仪中，我们对干涉条纹的对比有着愈高愈好的要求，干涉条纹的对比 K 定义为：

$$K = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (1-6)$$

式中： I_M 为干涉条纹光强分布的极大值， I_m 为极小值。当 $K=1$ 时，条纹对比最好，当 $K=0$ 时，条纹对比最差。

但是，对光学薄膜来说，在一般情况下它有着和干涉仪完全相反的要求。我们知道，光学薄膜是为了改善光学零件界面上的光学特性的，如增透膜，它的作用是增加光学零件界面上的透过光能，减少光学零件界面上的反射光能，而不希望增透膜本身参与成像。如对无限远的一个光点，希望它的像还是一个点，而不是明暗相间的条纹，因此它要求薄膜因干涉而产生的条纹对比为零。

我们知道，光源的空间大小（即光源的空间相干性）将严重影响干涉条纹的对比。光源的空间大小增加，条纹的对比下降；或者反过来，当我们要求 $K=0$ 时，可对光源的空间相干性没有限制，即它适用于任意的扩张光源。

因此光学干涉薄膜的一个重要特点是：一般说来，薄膜的透射率 T 或反射率 R ，它不是空间位置坐标（ x, y ）的函数，它只是波长 λ 的函数，透射率 T 和波长 λ 的关系曲线见图1-1。或者我们可以这样说：我们不希望薄膜的干涉效应会改变光能的空间位置分布状况，即薄膜不对空间位置坐标进行光能的重新分配，它只对各种波长的光进行光能的重新分配。

但是在特殊情况下，例如在真空室中利用薄膜来测温或测量膜层厚度时，这时我们希望看到薄膜的干涉条纹，这就要求对光源的宽度作出限制，例如采用单色的激光光源。

另外，为了便于讨论，我们还必须对我们的研究对象——光学薄膜作如下基本假定：

一、薄膜在光学上是各向同性介质，对于电介质其特性可用折射率 n 表征，并且 n 是一个实数；对于金属和半导体，其特性可用复折射率（或称光学导纳） $N = n - jk$ 来表征， N 是一个复数，其实部 n 仍叫折射率，其虚部 k 叫消光系数， j 是虚数单位， $j = \sqrt{-1}$ 。

二、二个邻接的介质用一个数学界面分开，在这个数学分界面的两边折射率发生不连续的跃变。

三、折射率在空间坐标上是连续的。为了实际的目的，折射率可随膜层的深度而变化，并称为非均匀薄膜或变折射率薄膜。

四、膜层用二个如二所规定的平行平面所分开的空间来定义，它的横向大小假定为无限大，而膜层的厚度是光的波长数量级。

本书的讨论只限于这些基本假定。但真实的光学薄膜并非如此。真实的光学薄膜与这里所采用的分层介质的简单模型所产生的差别虽然在大多数情况下是可以被忽略的，但它所造成的扰动使理论应用受到实际的限制，在更精确的理论中，我们必须考虑真实薄膜如下物理因素：

- 一、蒸发薄膜的多晶结构可能造成光的散射或吸收；
- 二、基体表面的粗糙度和薄膜界面的粗糙度也将造成光的散射或吸收；

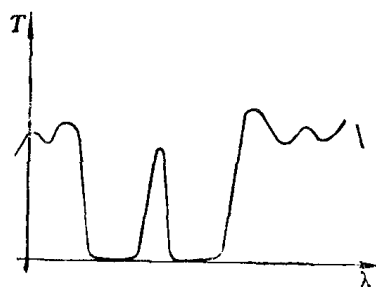


图1-1 薄膜的透射率曲线

- 三、由于薄膜结构和内应力所造成的薄膜的各向异性；
- 四、薄膜的结构和薄膜的光学常数与薄膜的实际厚度有关；
- 五、折射率与厚度随时间的变化特性（经时效应）；
- 六、二相邻材料之间的扩散将引起内过渡层；
- 七、成膜以后的吸附和氧化将引起外过渡层；
- 八、由非稳定的蒸发条件造成薄膜的非均匀性；
- 九、介质的光学常数的色散。

第二节 麦克斯韦方程

上面说到，光波是电磁波，那么什么叫电磁波呢？我们知道，在静止电荷周围有静电场，在恒定电流周围有静磁场；当空间电场发生变化会在它邻近的区域产生变化的磁场。这个变化的磁场又要在较远的区域产生变化的电场，接着又在更远的区域产生变化的磁场。如此继续下去，变化的电场和变化的磁场不断地相互转化，并由近及远地传布出去，这种变化的电磁场在空间以一定的速度传布，便形成了电磁波。因此电磁波可以用与空间和时间都有关系的电磁场 $E(\mathbf{r}, t)$ 和 $H(\mathbf{r}, t)$ 来描述。

从理论上讲，能本质的定量的描述电磁波的是麦克斯韦方程，麦克斯韦方程有二种形式，

一、积分形式

麦克斯韦方程组的积分形式如下：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi \iiint_V \rho dv \quad (1-7)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-8)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-9)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1-10)$$

式中： \mathbf{D} ——电感应强度矢量，或称电位移矢量

ρ ——空间自由电荷密度

\mathbf{B} ——磁感应强度矢量

\mathbf{E} ——电场强度矢量

\mathbf{H} ——磁场强度矢量

\mathbf{J} ——传输电流密度矢量

(1-7) 式是电位移的高斯定律，它表示在任何电磁场中，通过任一封闭曲面的电通量 ($\mathbf{D}d\mathbf{s}$ 为通过 $d\mathbf{s}$ 面积元的电通量) 等于此曲面所包含的总电荷。

(1-8) 式是磁场的高斯定律，不过它是根据磁荷不能单独存在，磁力线永远是一个

闭合曲线的事实写的，即磁场是一种无源场。(1-8)式表明：流入和流出任一封闭曲面的磁通量永远相等，磁场没有起止点。或者，在任何电磁场中，通过任意封闭曲面的磁通量恒等于零 ($\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ 为通过 $d\mathbf{s}$ 面积元的磁通量)。

(1-9)式是法拉第电磁感应定律，它表明：变化的磁场可产生一环形电场，如果周边 L 是一圈导线，那么这个电场将造成感应电动势，并形成感生传导电流，这就是发电机的原理。

(1-10)式叫麦克斯韦-安培定律，它可以改写成下式：

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \left(I + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} (I + I_c) \quad (1-11)$$

式中： I 为传导电流， Φ_c 为电通量， $I_c = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Phi_c}{\partial t}$ 称为位移电流。如果 $I_c = 0$ ，就是一般的安培定律。它表示在任何电磁场中，磁场强度沿任何封闭回路的线积分等于通过回路所包围的任意曲面的电流强度的 $\frac{4\pi}{c}$ 倍（在推广的安培定律中，这个电流应该是总电流 $I + I_c$ ）。

麦克斯韦-安培定律描述了在任何电磁场中，单位磁极在磁场中绕任何闭合回路所做的功等于该回路中包含电流的 $\frac{4\pi}{c}$ 倍。

二、微分形式

麦克斯韦方程的积分形式适用于某一有限大小范围内的电磁场，如一闭合回路或一个封闭曲面内的电磁场，欲确定一给定点的电磁场必须采用麦克斯韦方程的微分形式。利用场论中的高斯定理和斯托克斯定理可以把麦克斯韦方程的积分形式化成如下微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (1-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_c) \quad (1-15)$$

式中： \mathbf{J} ——传输电流密度矢量

\mathbf{J}_c ——位移电流密度矢量，并且

$$\mathbf{J}_c = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-16)$$

∇ ——微分算符，在直角坐标系中，它定义为：

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}$$

式中： \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 、 \mathbf{z} 分别为直角坐标系中 x 轴、 y 轴和 z 轴上的单位矢量。

公式 (1-12)、(1-13) 是描述电磁场的散度，公式 (1-14)、(1-15) 是描述电磁场的旋度，所以在一些书中上述公式亦写为

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (1-12')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-13')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-14')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_c) \quad (1-15')$$

散度 $\nabla \cdot \mathbf{D}$ 表示考察点附近单位体积内的电荷，所以电荷为电场的源。(1-13) 式说明，磁场没有源。

另外，散度是一个标量场，例如

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 有时还记作 $\operatorname{curl} \mathbf{E}$ ，它表示变化的磁场会在它的周围产生电场，而旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ 表示变化的电场周围会产生磁场。旋度是一个矢量场，例如

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}$$

此外，我们还必须考虑到介质对电磁场的影响。我们知道，表征介质的特征量是介电常数 ϵ ，磁导率 μ 和电导率 σ ，它们对电磁场的影响可用如下方程来表示，这些方程我们称之为物质方程。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-17)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-18)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1-19)$$

第三节 在各向同性均匀介质中的波动方程

设一平面波以速度 V 向前传布，在速度 V 方向上的单位矢量是 \mathbf{k} ，设考察点 P 的位置矢量为 \mathbf{r} ，则空间任一点 P 的波动方程为

$$s = A \cos \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{V} \right) \quad (1-20)$$

式中： A ——振动振幅

ω ——圆频率

V ——波的传布速度

平面波的波动方程如用复数表示，可写为：

$$s = A \exp j\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{V} \right) \quad (1-21)$$

设 o 为波动的波源 (见图 1-2)，我们在 P 点得到球面波的波动方程：

$$s = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \cos \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{V} \right) \quad (1-22)$$

考虑到光波在光学仪器中的实际传布情况，为简化问题，今后我们只研究平面波。

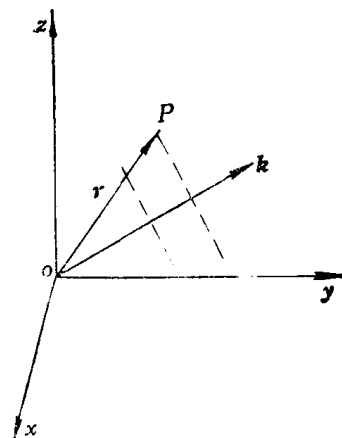


图1-2 沿 \mathbf{k} 方向传布的波

设图 1-2 中 P 点的坐标为 (x, y, z) , 所以

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = (xx + yy + zz) \cdot (k_x x + k_y y + k_z z) = xk_x + yk_y + zk_z$$

于是 (1-21) 式可写成,

$$s = A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

将上式分别对 t 和 x, y, z 求两次偏微分, 我们得到:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \omega^2 A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

而

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\omega^2 k_x^2}{V^2} A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\omega^2 k_y^2}{V^2} A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{\omega^2 k_z^2}{V^2} A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{V^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) A \exp j\omega \left(t - \frac{xk_x + yk_y + zk_z}{V} \right)$$

因此

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (1-23)$$

或者

$$\nabla^2 s = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (1-23')$$

式中: $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 称为拉普拉斯算符。

(1-23) 式叫波动的微分方程, 任何物质运动只要其运动形式可表达成 (1-23) 式, 就可肯定它是传播速度为 V 的平面波。

第四节 平面电磁波

前面讲过, 位移电流密度矢量 $\mathbf{J}_c = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 由公式 (1-15) 得,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

将物质方程 (1-17)、(1-18)、(1-19) 代入上式和 (1-14) 式, 我们得到:

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1-24)$$

$$\left(\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (1-25)$$

以 ∇ 叉乘 (1-24) 式, 并代入 (1-25) 式得:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

因为存在恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

我们得到

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (1-26)$$

在不带电荷的介质里, $\rho = 0$, 由 (1-12) 式得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

再代入 (1-17) 式得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1-27)$$

将上式代入 (1-26) 式, 得

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1-28)$$

(1-28) 式是电磁扰动在介质中传布时的麦克斯韦方程。

一、不导电的无限均匀介质

在不导电的均匀介质中, $\sigma = 0$, $\varepsilon = \text{常数}$, $\mu = \text{常数}$, (1-28) 式变为:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1-29)$$

采用类似的计算, 我们得到

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1-30)$$

令:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (1-31)$$

则上两式可写成:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1-32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1-33)$$

(1-32)、(1-33) 式是变化的电磁场在不导电的均匀介质中传布时所满足的波动微分方程, 因为它具有和 (1-23') 完全相同的数学形式, 所以这个变化的电磁场是一种电磁波, 而且是平面电磁波。同时, 从 (1-31) 式可见, 由于一般介质的 ε 和 μ 恒大于 1, 所以电磁波在介质中的传布速度 V 恒小于 c , 其大小只和介质的性质有关, 与激发电磁场的方式无关。

在真空中, $\varepsilon = \mu = 1$, 电磁波方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1-34)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1-35)$$