高等学校理工科参考丛书

数学物理方法学习与解题指导

蔡日增　俞华英

湖南科[illegible]

高等学校理工科参考丛书
数学物理方法学习与解题指导
蔡日增　俞华英编
责任编辑：陈一心
*
湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1988年3月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：19.75　字数：456,000
印数：1—4,200
ISBN 7—5357—0289—9
O·38　定价：4.75元
湘目—87—42

前　言

本书是围绕理工科数学物理方法课程的教学内容，结合编者的教学实践，编写而成的一本课外辅助读物。可供理工科院校学生配合教本使用。

本书包括数学物理方程(蔡日增编)和特殊函数(俞华英编)两部分内容，并以前者为主。各章都有内容梗概，便于读者抓住要点。实质性的内容则以例题分析的形式出现。全书以例题分析为主，经过精心筛选，共选编了四百多道例题。力求类型齐全，避免雷同。既有巩固基本概念、掌握基本方法的大量实例，又有适量的难度较大的提高性实例。许多例题还附有注解或小结，以帮助读者掌握解题方法的实质和要领。此外，不少例题采用了一题多解，以启发读者思路。为了叙述的清晰，本书多处利用了列表形式，可起到简明扼要、便于记忆、便于查阅对照的作用。每章提出的要求，指明了对该章内容读者应掌握的程度。全书还配有三百多道思考题，供读者进一步练习之用。

本书在编写过程中，得到刘盛耀副教授的帮助，在此深表谢意。

编者水平有限，谬误之处在所难免，热诚欢迎批评指正。

编　者

1984年9月

目　录

第一篇　数学物理方程

数学物理方程（简称数理方程）通常是指从物理问题导出的函数方程，主要指偏微分方程和积分方程。现行教材中只限于讨论二阶线性偏微分方程，着重讲述波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程等典型方程。因为，一方面这些方程很好地描述了一些基本的物理现象，能解决一些重要的物理问题，例如弹性体的振动、电磁波的传播、热的传导、粒子扩散等；另一方面，也因为通过这些方程的各种定解问题的研究，可以掌握一些基本方法（例如，分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法及行波法等），作为探讨新问题的参考。

数学物理方程处理问题的步骤大致为：

（1）把物理问题归结为数学上的定解问题，即导出数理方程和定解条件；

（2）解定解问题，即求出满足方程和定解条件的解；

（3）对所求得的解作适当的物理解释。

现行教材中，在内容安排上主要依照两种方式，一种是依照方程的基本类型来编排，另一种是依照解法来编排，即先从物理问题导出一些典型方程和定解条件，然后以常用解法为线索讨论典型方程的各种定解问题。本书参照了后者的编排次序，并以分离变量法和积分变换法作为重点。

第一章　方程的导出和定解问题

本章的中心是把物理问题归结为数学上的定解问题。也就是导出方程和定解条件。它们是读者学习中的难点。因此，在本章中，我们把分析典型例题用以说明从物理问题导出方程的一般步骤和注意事项作为重点。

一　内容提要

（一）基本概念

含有未知多元函数及其偏导数（可以只含偏导数）的方程称为偏微分方程。

偏微分方程中所含最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶。

未知函数及其各阶偏导数是线性的且系数只依赖于自变量的方程称为线性偏微分方程。

研究对象的初始时刻的状态称为初始条件。

研究对象的边界上的物理状况称为边界条件。

初始条件和边界条件统称为定解条件。

由方程和定解条件所构成的问题称为定解问题。

如果一个定解问题满足条件：（1）有解；（2）解是唯一的；（3）解是稳定的（即如果定解条件的数值有细微的改变，

（二）典型方程表

	方程类型	方程形式	说明
波动方程	一维受迫振动	$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$	弦振动方程、杆纵振动方程、电报方程及浅水表面波方程等是这种形式
	二维受迫振动	$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=f(x,y,t)$	薄膜振动方程是这种形式
	三维受迫振动	$u_{tt}-a^2\Delta_3 u=f(x,y,z,t)$	声波方程、电磁波方程及流体的速度势方程等是这种形式
输运方程	一维有源	$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$	周侧绝热的细杆内的温度分布、定向扩散的浓度分布等满足该方程
	二维有源	$u_t-a^2\Delta_2 u=f(x,y,t)$	两面绝热的薄片内的温度分布
	三维有源	$u_t-a^2\Delta_3 u=f(x,y,z,t)$	三维热传导方程和三维扩散方程是这种形式
稳定场方程	二维泊松方程	$\Delta_2 u=f(x,y)$	薄膜平衡方程是这种形式
	三维泊松方程	$\Delta_3 u=f(x,y,z)$	静电场的电势、无旋稳恒电流势、流体无旋稳定流动的速度势、稳定温度分布及稳定浓度分布等都是这种形式的方程
其它	杆的受迫横振动	$u_{tt}-a^2u_{xxxx}=f(x,t)$	这是四阶方程
	薛定谔方程	$ihu_t=-\dfrac{h^2}{2m}\Delta u+vu$	
	定态薛定谔方程	$-\dfrac{h^2}{2m}\Delta u+vu=Eu$	

注：①在波动方程中，当$f\equiv0$时方程所描述的振动是自由振动；
②在输运方程中，当$f\equiv0$时方程所描述的是无源输运方程；
③在稳定场方程中，当$f\equiv0$时，对应的方程称为拉普拉斯方程。

则解的值也只作细微的改变），则称该定解问题是适定的。

如在所研究的区域里出现跃变点而导致方程在跃变点失去意义，则在跃变点所给的条件称为衔接条件。

（三）定解条件

初始条件

方程类型	初始条件个数	初始条件的一般形式
波动方程	2	初始位移 $u\|_{t=0}=$ 已知函数
		初始速度 $u_t\|_{t=0}=$ 已知函数
输运方程	1	初始状态 $u\|_{t=0}=$ 已知函数
稳定场方程	不需要初始条件	

注 ①波动方程中含有时间的二阶导数，故给两个初始条件；
②输运方程中只含有时间的一阶导数，故只给一个初始条件；
③稳定场方程中不含时间的导数，故不需要初始条件。

边界条件

边界条件类型	边界条件的形式
第一类	$u\|_{\Sigma}=$ 已知函数
第二类	$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\Sigma}=$ 已知函数
第三类（混合边界条件）	$\left[\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_{\Sigma}=$ 已知函数 或 $\left[u+h\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Sigma}=$ 已知函数 $\left(h=\dfrac{\alpha}{\beta},\ \beta\neq 0\right)$

注 ①Σ表示区域的边界；
②n表示Σ的法线方向；
③三类边界条件对三类典型方程都可提；
④在边界的不同部分上边界条件的类型可能不同；
⑤表中的已知函数定义在边界Σ上。

二 要 求

1 正确理解泛定方程、定解条件、定解问题、初始条件、边界条件、衔接条件等基本概念。

2 弄清三类典型方程各自对初始条件的要求。

3 正确理解三种类型边界条件的意义，并能正确区分边界条件与泛定方程中的外力或外源。

4 了解讨论定解问题适定性的意义。

5 掌握推导数理方程的一般步骤。

6 会用"隔离物体法"导出弦振动方程、杆振动方程、扩散方程及热传导方程等。

7 会根据电磁学定律导出静电场方程和波传播方程。

三 例题分析

(一) 导出方程部分

学习数理方程的目的在于应用偏微分方程的理论去解决科学研究和生产实践中遇到的实际问题。要达到这一目的，首先要能正确地导出数理方程。下面通过例题来分析导出数理方程的方法步骤以及注意事项。主要采用"隔离物体法"。

1 振动方程举例

例1 设有一根拉紧着的均匀、柔软而有弹性的弦，长为l，两端钉在O、L两点，当它在平衡位置附近作垂直于OX方向的微小横振动时，求这弦上各点的运动规律。

解 ①本例所要研究的物理量是横向位移U。选择坐标系如图1.1所示，用$u(x, t)$表示弦上x点在时刻t沿垂直于x方向

的位移。

对于弦的微小振动，可设倾角α很小，即可假定，

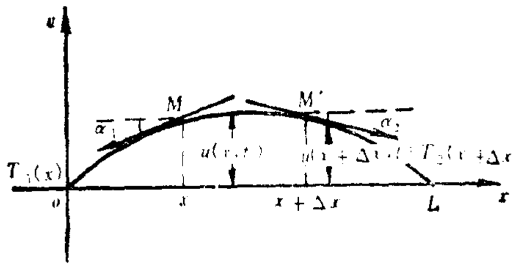

图1.1

$$\sin\alpha\approx\alpha,\ \cos\alpha\simeq 1,\ \mathrm{tg}\,\alpha\simeq\alpha \tag{1}$$

于是可推知，

(i) 弦的伸长可略去：

$\overset{\frown}{MM'}$的弧长，$\Delta s\approx ds=[(dx)^2+(du)^2]^{1/2}$

$$=dx\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=dx[1+\mathrm{tg}^2\alpha]^{1/2}$$

$$\simeq dx[1+\alpha^2]^{1/2}$$

$$\simeq dx. \tag{2}$$

(*ii*) 张力是常数：如图1.1所示，由于弦沿x方向无运动，

$$T_2\cos\alpha_2=T_1\cos\alpha_1,$$

于是，由(1)推知，

$$T_2=T_1=T. \tag{3}$$

② 用"隔离物体法"从弦上任取位于x到$x+dx$的线元$\overset{\frown}{MM'}$，分析作用在其上有哪些力。

(*i*) 作用在M'点的张力T，它在u轴方向的分力为$T\sin\alpha_2$；

(*ii*) 作用在M点的张力T，它在u轴方向的分力为$-T\sin\alpha_1$；

(*iii*) 作用在$\overset{\frown}{MM'}$上，垂直于x轴的外力为$\bar{F}\Delta x$，其中$\bar{F}$表

示在点x处外力的线密度的平均值。

设弦的密度为ρ，根据牛顿第二定律有

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 + \bar{F}\Delta x = \rho\Delta x\bar{u}_{tt}. \qquad (4)$$

式中$\bar{u}$表示线元的平均位移。因为

$$\sin\alpha_1 \simeq \operatorname{tg}\alpha_1 = u_x|_x. \qquad (5)$$

$$\sin\alpha_2 \simeq \operatorname{tg}\alpha_2 = u_x|_{x+\Delta x} \simeq u_x|_x + u_{xx}|_x\Delta x. \qquad (6)$$

将(5)、(6)式代入(4)式后，并约去Δx，得

$$Tu_{xx}|_x + \bar{F} = \rho\bar{u}_{tt}. \qquad (7)$$

③ 化简整理　令$\Delta x\to 0$，则$\bar{u}\to u$，$\bar{F}\to F$，于是得弦的受迫横振动方程

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f. \qquad (8)$$

其中$a^2 = T/\rho$，$f = F/\rho$.

注　①若外力F消失，则得弦的自由振动方程$u_{tt} = a^2u_{xx}$.

②本例建立方程时用到了牛顿第二定律.

例2　绝对柔软而均匀的弦线有一端固定，垂直悬挂，在重力作用下，拉它一下再放手，使之作微小横振动，试导出振动方程.

解　①　本例要研究的物理量也是横向位移u. 设弦长为l，建立坐标系如图1.2所示。用$u(x, t)$表示弦在时刻t，x处的横向位移.

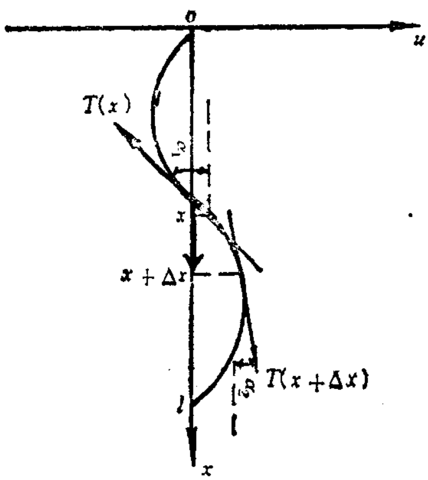

图1.2

②　用“隔离物体法”从弦上任取位于x到$x+dx$之间的线元，分析作用在其上的力.

由弦是绝对柔软的假定，弦的张力T的方向总是沿着弦的

切线方向，又由弦作微小振动的假定，有 $u_x \ll 1$。因此，如同例1一样，可认为在振动过程中弦不伸长，且张力T与时间无关。

纵向受到的力：(i)张力$T(x)\cos\alpha_1$；$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2$；($ii$)重力$\rho g\Delta x$。

横向受到的力：(i) 张力 $T(x)\sin\alpha_1$； $T(x+\Delta x)\sin\alpha_2$；(ii)惯性力$\rho\Delta x\bar{u}_{tt}$。

其中，ρ为弦的密度，$\bar{u}$为线元的平均位移．由牛顿第二定律得

$$\text{纵向}\quad T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = -\rho g\Delta x. \qquad (1)$$

$$\text{横向}\quad T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 = \rho\Delta x\bar{u}_{tt}. \qquad (2)$$

由(1)式得

$$\frac{dT}{dx} = -\rho g.$$

对上式关于x积分，并利用在$x=0$处，张力大小恰等于弦的自重ρgl，得

$$T(x) = \rho g(l-x).$$

又
$$\sin\alpha_2 \simeq \operatorname{tg}\alpha_2 = u_x(x+\Delta x,\ t),$$
$$\sin\alpha_1 \simeq \operatorname{tg}\alpha_1 = u_x(x,\ t).$$

将上述结果代入(2)式得

$$[T(x)u_x]\big|_{x+\Delta x} - [T(x)u_x]\big|_x = \rho\Delta x\bar{u}_{tt}. \qquad (3)$$

③ **化简整理** 对(3)式左端应用微分中值定理，并约去等式两端Δx，然后令$\Delta x\to 0$，得

$$[T(x)u_x]_x = \rho u_{tt}.$$

利用$T(x)$的表达式，即得弦的横向位移满足的方程

$$u_{tt} = g[(l-x)u_x]_x.$$

注意，本例中张力T是x的函数，这和例1不同，故所得方程也和例1中的方程不同。

例3 细杆（或弹簧）受某种外界原因的影响而产生纵向振动，以$u(x, t)$表示静止时在x点时刻t离开原来位置的偏移，假设振动过程中所发生的张力服从虎克定律，试证明$u(x, t)$满足方程

$$[\rho(x)u_t]_t = [E(x)u_x]_x. \tag{1}$$

其中，ρ为杆的密度，E为杨氏模量。

证 建立坐标系如图1.3所示，取杆的左端截面的形心为原点，杆轴为x轴。

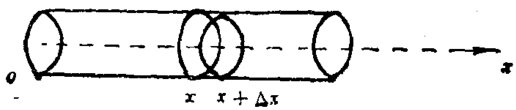

图1.3

由假设，在垂直于杆的每一个截面上的每一点受力与位移都是相同的。

在杆上任意截取位于x到$x+\Delta x$的一段微元，现分析作用在该微元上的力。设杆的截面积为S，由材料力学可知，微元两端处的相对伸长（应变）分别是，$u_x(x, t)$与$u_x(x+\Delta x, t)$，又由虎克定律知，微元两端面受杆的截去部分的拉力分别是$E(x)u_x(x, t)S$和$E(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x, t)S$，因此，微元受杆的截去部分的作用力的合力为

$$E(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x, t)S - E(x)u_x(x, t)S$$

且其正向与坐标轴方向相同。

设$\bar{x}$为微元重心的坐标，则重心处的加速度为$u_{tt}(\bar{x}, t)$。于是，由牛顿第二定律得

$$\begin{aligned}&\rho(x)S\Delta x u_{tt}(\bar{x}, t)\\&= E(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x, t)S - E(x)u_t(x, t)S.\end{aligned}$$

约去上式中的S，并对右端用微分中值定理得

$$\rho(x)\Delta x u_{tt}(\bar{x},\ t)=[E(x)u_x]_x|_{x+\theta\Delta x}\cdot\Delta x.$$

其中 $0<\theta<1$. 约去Δx，并令$\Delta x\to 0$，即得$u(x,\ t)$在(x,t)处满足的微分方程

$$[\rho(x)u_t]_t=[E(x)u_x]_x.$$

注 本例的证明过程实际上是导出偏移$U(x,\ t)$满足方程的过程。

例4 长为l的柔软匀质轻绳，一端固定在以匀速ω转动的竖直轴上，由于惯性离心力的作用，这绳索的平衡位置应是水平线，试导出此绳相对于水平线的横振动方程。

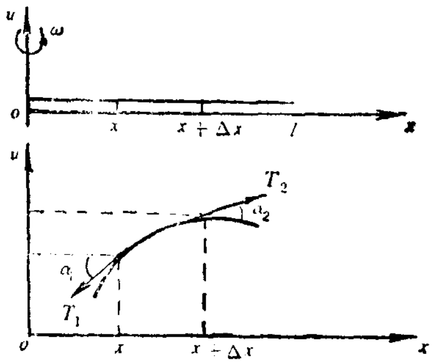

图1.4

解 ①本例要研究的物理量也是横向位移u。

②用"隔离物体法"，任取绳上位于x到$x+\Delta x$处的一段微元，如图1.4所示，现分析作用在该微元上的力。

因为在小振动的情况下，$\sin\alpha\simeq \mathrm{tg}\,\alpha=u_x$，$\cos\alpha\simeq 1$。于是张力的纵向分量为$Tu_x$。因此，微元的运动方程为

$$(Tu_x)|_{x+\Delta x}-(Tu_x)|_x=\rho\Delta x\bar{u}_{tt} \qquad (1)$$

其中，$\bar{u}_{tt}$表示微元的平均加速度。

由于x处的张力$T(x)$等于从x到l的一段绳上的惯性离心力，从而

$$T(x)=\int_x^l\omega^2 x\rho dx=\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2). \qquad (2)$$

在(1)式左端应用微分中值定理得

$$(Tu_x)_x|_{x+\theta\Delta x}\cdot\Delta x=\rho\Delta x\bar{u}_{tt}. \qquad (3)$$

③化简整理　在(3)式中约去Δx，并令$\Delta x \to 0$，得

$$(Tu_x)_x = \rho u_{tt}. \tag{4}$$

用(2)式中的$T(x)$代入(4)式，并约去ρ，即得欲求的方程

$$[(l^2 - x^2)u_x]_x = \frac{1}{a^2}u_{tt} \qquad \left(a = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\right).$$

例5　枢轴振动时，如它的横截面绕着枢轴的轴一个对一个的有所扭转，则这种振动称为扭转振动。试导出均匀圆杆的扭转振动方程。杆半径R，切变模量为N。

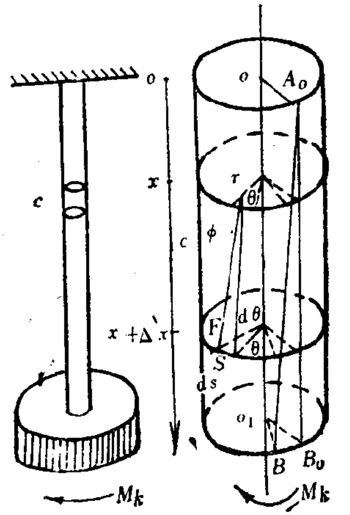

图1.5

解　①圆杆的扭转形变如图1.5所示，设其上端固定不动，而在下端有一足够大的圆盘与杆相连接，因圆盘扭转而产生作用扭矩M_K，于是这个扭矩与作用在固定端的大小相等和方向相反的扭矩相平衡。由于这个扭矩的作用，圆杆要产生形变。形变后，在圆杆的两端的截面上处于同一母线上的两点A_0和B_0彼此相对地移动一弧长$\overset{\frown}{B_0B}$，与$\overset{\frown}{B_0B}$相对应的中心角$\theta = \angle B_0O_1B$称为扭转角，也就是扭转的绝对形变——角位移。而扭转仅是切变的一种形式。

切应力与切应变的关系是$\tau = N\phi$，而切力$F = N\phi S$，其中ϕ为切变角，S为与F平行的截面。

②　由上述可见，本例所要研究的物理量是角位移θ（扭转的绝对形变）。

③　用“隔离物体法”，取区间（x，$x+\Delta x$）来研究。若

在x处截面的角位移为θ，在$x+\Delta x$处的角位移为$\theta+\Delta\theta$。则在离轴线r处的切变角

$$\phi \simeq \mathrm{tg}\phi = r\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

上式用偏导数，这是考虑到θ是x和t的函数。对于面积元dS来讲，其上的切力

$$dF = N\phi dS = Nr\frac{\partial\theta}{\partial x}dS.$$

从而整个截面上的切力对轴线的力矩

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\left(Nr\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)rdr \\ &= 2\pi N\frac{\partial\theta}{\partial x}\int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\pi N}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}R^4. \end{aligned}$$

设单位长度的圆杆对轴线的转动惯量为I，则长为Δx（即x到$x+\Delta x$）的C段的转动惯量为$I\Delta x$。

若如①所述，$x+\Delta x$以上一段圆杆对C段的作用的力矩与θ方向相同，而在x以下一段对C段作用的力矩与θ方向相反，则C段所受的合力矩为$L|_{x+\Delta x}-L|_x$，由刚体力学的动量矩定理

$$L|_{x+\Delta x} - L|_x = I\Delta x\theta_{tt},$$

则
$$\frac{\pi NR^4}{2}\left(\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_x\right) = I\Delta x\theta_{tt}.$$

④ 化简整理，上式即

$$\frac{\pi NR^4}{2I}\left(\frac{\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_x}{\Delta x}\right) = \theta_{tt},$$

亦即 $$\theta_{tt}=\frac{\pi NR^4}{2I}\theta_{xx}.$$

注 本例中导出方程的思路是先分析所要研究的物理量，然后用"隔离物体法"，借助材料力学的知识和刚体力学的动量矩定理建立扭转振动方程。

例6 试用积分法导出例1中的弦振动方程。

解 由例1知，张力T是常数。现考虑弦上位于x到$x+\Delta x$的一段微元，分析作用在其上的垂直方向的力。在时刻t，微元的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x}u_t(\xi,t)\rho(\xi)d\xi\quad(\rho\text{为密度}).$$

在时刻t到$t+\Delta t$内动量的改变量为

$$\int_x^{x+\Delta x}[u_t(\xi,t+\Delta t)-u_t(\xi,t)]\rho(\xi)d\xi$$
$$=\int_x^{x+\Delta x}\left[\int_t^{t+\Delta t}u_{tt}(\xi,\tau)\,d\tau\right]\rho(\xi)d\xi\ . \qquad (1)$$

垂直方向受力的总和为

$$\int_t^{t+\Delta t}T[u_x(x+\Delta x,\tau)-u_x(x,\tau)]d\tau$$
$$+\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$
$$=\int_t^{t+\Delta t}T\left[\int_x^{x+\Delta x}u_{xx}(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau$$
$$+\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (2)$$

由能量守恒原理得

$$\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}u_{tt}(\xi,\tau)\rho(\xi)d\xi d\tau$$
$$=\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}Tu_{xx}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}F(\xi,\ \tau)d\xi d\tau$$