普通高等教育机电类规划教材

机械工程参量的动态测试技术

重庆大学 梁德沛
烟台大学 李宝丽
主编

机械工业出版社

前　言

本书系受高等工业学校机电类专业教学指导委员会测试技术课程指导小组的委托，根据高校机电类专业测试技术课程的基本要求，吸取近年来各高校的教学经验，按照少而精和理论联系实践的原则编写的。主要介绍机械工业中常见动态参量的电测法。

本书可与《机械工程测试技术基础》黄长芝、严普强主编教材配套使用，也可单独使用。

全书共九章，分为基础理论和具体应用两部分。第一、二章为基础部分，讲述有关测试信号的描述和分析，测试装置的静、动态特性，以及所涉及到的数学、物理知识等，是必学内容。第三章至第九章为应用部分，分别介绍位移、振动、噪声、力、应变、温度和流量等机械参量的测试原理和方法。与各参量测试密切相关的基础理论知识，传感变换原理和传感器、中间变换电路、数据的分析处理技术等内容，则分散在各章中介绍。不同的专业可根据各自的教学要求选择讲授有关章节。

本书由重庆大学梁德沛、烟台大学李宝丽主编。参加编写的有梁德沛（绪论及第六、七章）、李宝丽（第一、二、三、四章）、重庆大学余成波（第五章）、渝州大学梁守一（第八章）、烟台大学李克平（第九章）。本书由华中理工大学卢文祥教授主审。

本书在编写过程中得到了高等工科学校测试技术教学指导小组自始至终的大力支持和帮助，并获得了许多宝贵的意见。许多兄弟院校也为本书的编写提供了帮助。在此，一并表示衷心的感谢。

本书作为高等工科院校机电类专业本科生及大专生的教材，也可供夜大及成人教育有关专业选用。还可供从事机械工程测试工作的工程技术人员参考。

热忱地期望各位读者和同仁对本书的错误和不足提出指正和建议。

编　者

1995 年 4 月

目　录

绪　论

（一）测试的意义和作用

测试包括测量和试验的全过程，是具有试验性质的测量。它是人们从客观事物中摄取有关信息，借以认识该事物，并掌握其客观规律的一种科学方法。在测试过程中，需要了解和分析测试对象的特征，并明确测试目的；选用专门的仪器设备；设计合理的实验方法；进行必要的数据处理，从而获得被测对象有关信息的量值。所以，测试技术属于信息科学的范畴，因而有人称之为信息探测工程学。测试技术在科学研究和生产过程中具有重要作用，它已成为现代科学技术中必不可少的组成部分，测试技术本身也发展成为了一门非常活跃的独立学科，并结合各门学科和各工业领域，发展了很多分支。

使用先进的测试技术是科学技术现代化的重要标志之一，也是科学技术的发展必不可少的条件，因为它不仅可以为各科学试验提供丰富的测试数据，延伸和扩展人的五官和大脑功能，帮助人们去观察、认识客观事物，而且测试技术本身就是进行科学研究的方法和手段，特别是在进行探索性和开创性的科学发现和技术发明的时候，更需要先进的测试技术帮助。反过来，现代科学技术的发展，尤其是物理学、微电子学、材料学、电子计算技术等学科的发展，又促进了测试技术的发展，使得许多新的先进的测试技术成为可能与现实。测试技术不但在科学技术领域中有极其重要的作用，而且还深入到人们日常生活的各个方面。

机械工业中测试技术可起到以下作用：检验产品的性能和验证新产品设计的正确性；为产品设计或工程设计提供各种必要的数据；为生产过程中的物质流和能量流提供控制信息；分析研究各种因素间的相互关系和影响；研究设备运行过程和设备的故障诊断；许多工程问题在理论上尚不完善，可通过测试数据去发现和研究其规律性，许多设计上所用经验公式就是这样获得的。因而，测试技术是机械工业中各个科技工作者必须掌握的基本知识和技能之一。

（二）信 号 的 简 述

对于机械这一类物理系统，信息是其客观存在或运动状态的特征。然而，信息本身不是物质，也不具有能量，因此它的传输必需依赖于物质和能量。一般来说，信息的载体称为信号，而信息则蕴涵于信号之中。信息总是通过某种物理量表现出来，这些物理量就是信号。人们正是借助于某种测试方法和测试手段，通过对表现为某种物理量的信号的测试，去获得表征某物理系统客观存在或运动状态的信息。例如，单自由度质量一弹簧系统的动态特性，可以由质量块的位移一时间关系来描述，如激励质量块，使其产生自由振动，则质量块随时间变化的位移量（或速度、加速度）就是信号，它所包含的该系统的固有频率和阻尼比等动态特征参数，就是人们所需要的信息，由此信息可了解到这一系统的动态特性。本课程所涉及的都是各种物理量，因此，除非特别的场合，各章中所出现的都是“信号”一词。

根据信号的物理性质，可将其分为非电信号和电信号两类。如随时间而变化的力、压力、温度、流量、位移、速度、加速度等，均属非电信号；而随时间变化的电流、电压、电感、电阻、电容、磁通量等，则属于电信号。这两类信号可借助一定的转换装置相互交换。在测试过程中，常将被测的非电信号转换为电信号，以便于传输、放大、分析处理和显示记录等，这就是通常所谓的非电量电测，也是本课程主要介绍的内容。

被测信号中包含着多种信息，其中有需要研究的有用信息，也有不需要研究的无用信息，这些叠加在有用信息上的无用信息，称为噪声。有用信息和无用信息对所测信号的贡献之比，称为信噪比。显然，信噪比越高，对测试过程越有利。噪声对测试过程和结果将形成干扰，这种干扰可以来自被测对象、或者是测试系统内部，也可能来自周围的环境。噪声往往是不可避免的，它对被测信号所产生的影响，最终将以误差的形式表现出来，导致测试精确度降低，甚至使测试工作无法进行。有用信息和无用信息是一个相对的概念，有些无用信息始终扮演噪声的角色，而另一些无用信息，则可以转化为有用信息。

（三）课程的目的、任务和内容

随着科学技术的发展，从事机械工程的科技人员，不仅面临传统的静态几何量的测量，还越来越多地面临着许多动态物理量（诸如位移、振动、噪声、力、温度和流量等）的测量。因为，只有通过对这些动态物理量的测量，才能更多更全面地获得各种所需要的信息，深入了解各种机械设备的运行状况，产品的生产流程，物质的变化过程，物体的运动状态……等等。这些动态物理量的测量，必须大量地借助于非电量电测法才能实现。因此，机械制造业的工程技术人员，应当掌握这些常见动态物理量的电测法。这也就是设立本课程的目的和任务。

本课程研究的对象主要是机械工程中常见的动态参量的电测技术及有关基础理论，尽管它涉及的知识范围很广，但由于各课程的分工不同和学时的限制，本教材将立足于已修相关课程（如物理学、数学、电子学、微机原理、控制原理……等），讨论测试技术的基础理论和常见机械参量的测试方法及其具体应用。

要完成一项具体的测试任务，必须懂得如何组成一个性能优良的测试系统，并能有效地使用它去达到预定的测试目的。这就要求进行测试工作的人员，必须熟悉与测试系统有关的基础知识和技能，诸如各种传感器和传感变换原理；典型的测量电路；信号的显示、记录方法；以及信号的分析处理技术等。但归根结底，测试工作总是和具体的工程任务相联系，去完成各种物理参数的测试，同时考虑到本课程的实践性很强，为便于学习者将所学知识与实际工程问题相联系，本书在内容组织上，除了基础理论部分集中讲述外，其余的内容均结合各种参量的测试分散在各章中介绍。

第一、二章为本书的基础部分，包括测试信号的描述和分析，测试装置的基本特性，信号传输中的抗干扰等问题。

信号的描述与分析是测试工作的核心内容，没有对测试信号的分析，就不能获得所需要的信息，从而失去测试的意义。实际的工程信号常具有以下的特点：①由多成分构成；②是时间的函数③按一定的频率或多种频率变化；④经常具有随机性……等。因而研究信号的特征及随时间变化的规律；信号的构成；信号表现在变化频率方面的特征；排除信号中的无用部分，在强噪声中提取有用信息等，就成为了信号分析的主要任务。最主要和常用的分析方

法是时域分析法、幅值域分析法和频率域分析法。时域分析法包括求取信号的特征值，对信号作相关分析，以了解信号自身或不同信号间的相似程度或关联性。幅值域分析法是研究信号在各个时刻的瞬时幅值的取值分布状态。频率域分析法是以频率为自变量来研究信号的幅值、相位和能量等的分布，可得到相应的幅值谱、相位谱、能量谱以及功率谱等，故又称为频率分析。通过对信号的频率分析，可以从另一方面提供更为丰富的信息，它是动态信号分析的重要方法。

实现测试的物质手段是各种测试装置，因而应掌握这些装置的特性及其评价方法，还要了解信号通过测试装置时不失真的条件，以指导正确合理地选用仪器。信号在传输过程中必然会受到各种噪声的干扰，了解干扰的产生和抗干扰的措施，对保证测试工作的有效进行是十分重要的。

第三章至第九章是本书的应用部分，在此将对位移、振动、噪声、力、应变、温度、流量等参数，分章系统介绍其测量方法、常用传感器、中间变换电路、显示记录及数据的分析处理等内容。以期使学习者能在学习过程中将各种知识有机地联系起来，将现有知识和具体工程问题联系起来，建立起有关动态测试技术的完整概念，增强处理实际测试工作的能力。

第一章　测试信号的描述和分析

机械参量的动态测试，就是要观测、分析和记录各种机械在运行中的物理现象和参数变化。其中有的是直接观测而获得的数据，而多数情况是借助于测试装置或仪器把待测的量变换成容易测量、分析和记录的物理量，一般为电量，如电流、电压等。这些随时间变化而变化的物理量，称做信号。无论信号采用哪种数据形式或图形表示，它都包含着反映某个物理系统的状态和特性的某些有用信息，它是人们认识客观事物的内在规律、研究事物之间的相互关系及预测事物未来发展的依据。同时在这些信号中必然也夹杂着一些“无用的”干扰因素，只有对这些信号进行科学的分析与处理，才能从中提取尽可能多的反映客观事物规律的有用信息。因此，研究各类信号的特征及其分析方法，也就成为测试工作的首要任务。

第一节　测试信号的分类与描述方法

一、信号的分类

测试信号（或测试数据）若按信号的变化规律可以分成两大类型：确定性信号与非确定性信号。

1. 确定性信号

能够用明确的数学关系式描述的信号称为确定性信号。确定性信号又可分为周期信号和非周期信号。

（1）周期信号　按一定的时间间隔 T 不断重复出现的信号，称为周期信号。它满足下列关系式

$$x(t) = x(t \pm nT) \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

式中　T ——周期。

一个集中参数的单自由度振动系统（见图 1-1a）在作无阻尼自由振动时，其质量块的位移信号 $x(t)$ 就是一种最典型的周期信号，$x(t)$ 可用下面的数学关系式描述

$$x(t) = A\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right] = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (1\text{-}1)$$

式中　A ——振动幅值的最大值；

k ——弹簧刚度；

m ——质量；

φ_0 ——初始相角；

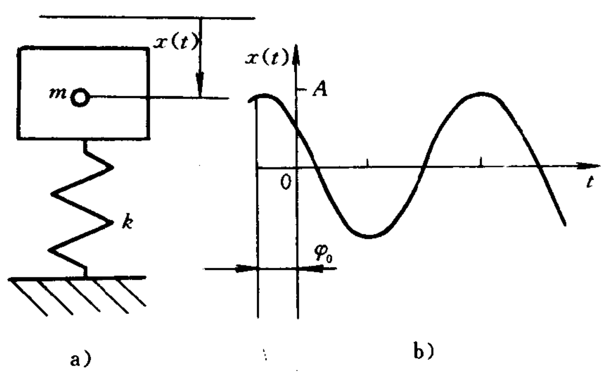


图 1-1　单自由度振动系统

a）单自由度振动系统

b）$x(t)$ —t 曲线

$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$——振动系统的固有圆频率。

它也可以用 $x(t)$ —t 的曲线图来描述这一位移随时间变化的历程（图 1-1b)。工程上将这种按正弦（或余弦）规律变化的最简单的周期信号称作简谐信号，它仅仅具有单一的频率 $f_0\left(f_0=\dfrac{\omega_0}{2\pi}\right)$。

图 1-2b，c，d 表示复杂周期信号的波形，它们是由若干个频率比为有理数的正弦信号叠加而成的。

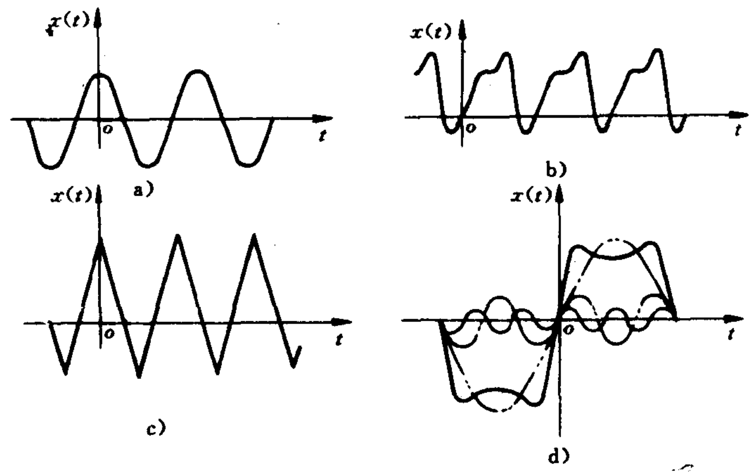


图 1-2　周期信号的波形
a）正弦波　b)、c）复杂周期波
d）由 1，3，5 次谐波叠加的方波波形

（2）非周期信号

凡能用确定的数学关系式描述的、但又不具有周期重复性的信号，统称为非周期信号。信号 $x(t)$ 是一个按指数衰减的振荡信号（见图 1-3)，它没有周期，但可用下式进行描述

$$x(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t}\cos bt & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

非周期信号多为瞬变信号。

虽然任何确定性信号都可以用一个时间函数（或表达式）来描述，但由于在工程实际中的信号一般都是比较复杂的，所以当直接对其原始时间函数进行分析描述有困难时，可以将其分解成某种基本函数之和的形式或按某种级数展开，所采用的基本函数必须是易于实现和分析的简单函数。正弦函数就是被广泛应用的一种基本函数。

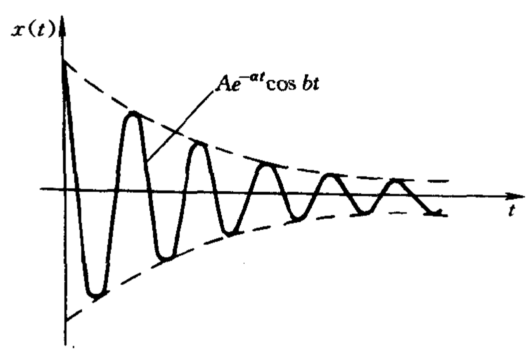


图 1-3　非周期信号的时间历程

2. 非确定性信号

无法用明确的数学解析关系式描述的信号称为非确定性信号，这种信号通常又称为随机信号。随机信号在客观世界中普遍存在，在工程测试中更是大量出现。例如：行驶车辆所受到的道路振动；切削材质不均匀的工件时所产生的切削力；海浪、地震以及机械传动中的随机因素所产生的信号等都属于这类信号。此类信号的特点是每次观测的结果都不一样，它只是许多可能产生的结果中的一种，它未来任何瞬时的精确值均不能预测，所以也无法用实验的方法重复再现，但其值的变动服从统计规律。所以对它的描述需要用统计的特征参数，这些统计特征参数主要有均值、方差、概率密度函数等一些数字特征量及相关函数和功率谱密度函数等。由于随机信号的不可重复性，需分析无限长的信号内容才能得到准确的分析结果，而这在实际工作中是不可能做到的，所以对随机信号

的分析只能限定为某些特种情况即平稳随机过程，甚至更为特定的情况，即各态历经过程，下面对它们作一简要的介绍。

对随机信号按时间历程所作的各次长时间的观测记录称为样本函数，记作 $x_i(t)$（图 1-4）。

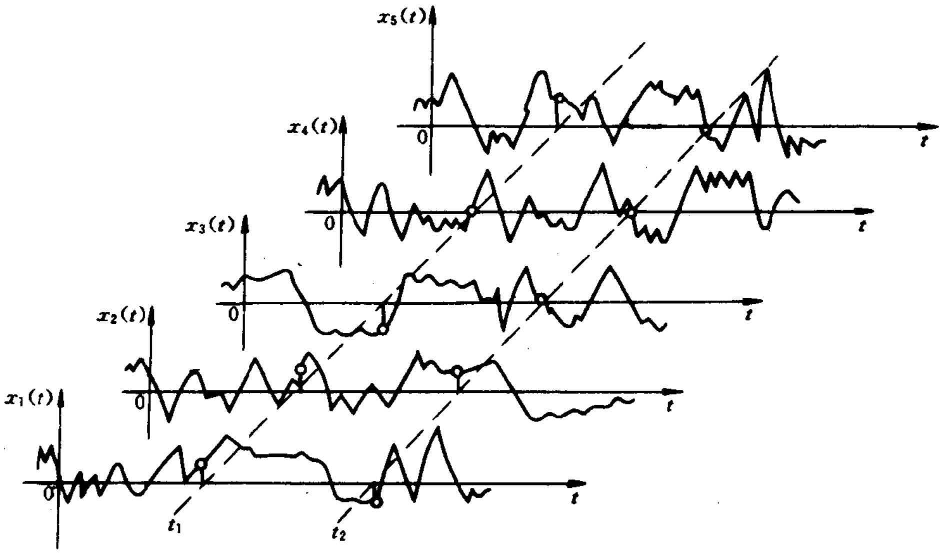


图 1-4　随机过程与样本函数

由于在实际工作中只可能根据仪器的容量每次取有限长的信号作分析，因此在有限时间区间上的样本函数称为样本记录。在同一试验条件下，全部样本函数的集合（总体）就是随机过程，记作 $\{x(t)\}$，即

$$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_i(t), \cdots\}$$

如果对全部样本函数在同一时间坐标值 t_1 上取值，并作平均，则这样的平均运算称为总体平均，即

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$

假如一个随机过程的任一时刻所得的总体平均都是相同的，那么就称它为平稳随机过程。平稳随机过程将被研究的随机过程范畴大为减小，它可以用某一个时刻的总体平均来代表所有各时刻的总体平均。

假设平稳随机过程中的一个样本函数如图 1-5 所示，在此样本函数中，取其时间坐标 t 中

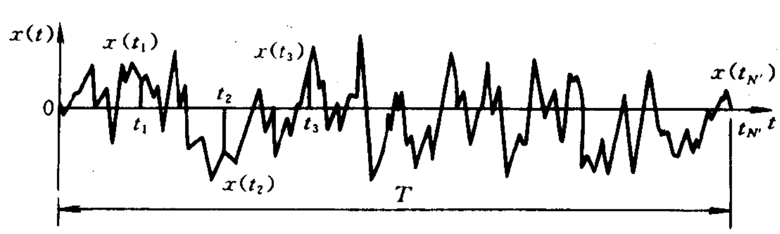


图 1-5　随机过程的一个样本函数

的不同值作平均，可得时间平均

$$\mu_x(t_i)=\lim_{N'\to\infty}\frac{1}{N'}[x(t_1)+x(t_2)+\cdots+x(t_{N'})]$$

如果一个平稳随机过程的总体平均与任一样本函数的时间平均值相等，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t)=\lim_{N'\to\infty}\frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{N'}x(t_i)$$

则称其为各态历经的平稳随机过程。一个具有各态历经特点的平稳随机过程，在进行分析处理时，就可以用一个样本函数的时间平均值来代表全体样本函数的总体平均。从而使对随机过程的分析大为简化。值得注意的是，上面仅仅是以计算统计特征参数—均值为例，实际上，此概念可用于随机信号的所有统计特征参数的计算。

另外，即使是对各态历经的平稳随机过程进行分析，由于通常仅能取有限长的点数进行统计特征参数的计算，所以算出的各值并不是其真正值，而仅是估计值。估计值与真值之间应尽可能接近。

实际的物理现象，都可以在不同程度上当作是各态历经的平稳随机过程，因此在测试工作中，常以一个或几个有限长度的样本记录来推断整个随机过程。

上述两大类信号可以根据各自的特点作如下的划分

- 信号
  - 确定性信号
    - 周期信号
      - 正、余弦简单周期信号
      - 复杂周期信号
    - 非周期信号
      - 准周期信号
      - 瞬变信号
  - 非确定性信号（随机信号）
    - 平稳随机信号
      - 各态历经（遍历性）
      - 非各态历经
    - 非平稳随机信号

二、信号的描述方法

信号作为一定物理现象的表示，它包含着丰富的信息，为了从中提取某种有用信息，需要对信号进行必要的分析和处理。所谓“信号分析”就是采取各种物理的或数学的方法提取有用信息的过程。为了实现这个过程，从数学角度讲，需要对原始信号进行各种不同变量域的数学变换，以研究信号的构成或特征参数的估计等。所以讨论信号的描述方法，在一定程度上就是讨论与“信号分析”有关的数学模式及其图象。值得指出的是，近十多年来由于电子计算机及其软件的发展，特别是快速傅里叶变换（FFT）的应用，“信号分析”这一过程在今天已基本上由以计算机为核心的测试仪器来完成。

通常以三个变量域来描述信号，即时间域（简称时域，含时延域）、频率域（简称频域）、幅值域（简称幅域）。直接观测或记录的信号一般是随时间变化的物理量，即以时间作为独立变量，称为信号的时域描述。时域描述是信号最直接的描述方法，它只能反映信号的幅值随时间变化的特征。由于实际信号比较复杂，直接用时域描述来揭示信号的频率结构和各频率成分的幅值（或能量）大小是很困难的，例如在机械工程中，大量的有用信息--振动，噪声等均与频率有关，所以在动态测试技术中广泛运用信号的频域描述，以揭示信号内各频率成分的幅值、相位与频率的对应关系，或者是信号能量沿频率域的分布规律，这对研究诸如被测对象的振动特性、振型和动力反应等问题是十分重要的。一个信号从时域描述转换为频域描述的数学方法是傅里叶分析法。信号的幅域描述则是反映信号某一范围内的幅值出现的概率，概率密度函数提供了随机信号沿幅域分布的信息，它是随机信号的主要特征参数之一。

信号的各种描述方法仅是从不同的角度去认识同一事物，它们相互间可以通过一定的数学关系进行转换。图 1-6 形象地表示出三个域之间的关系。

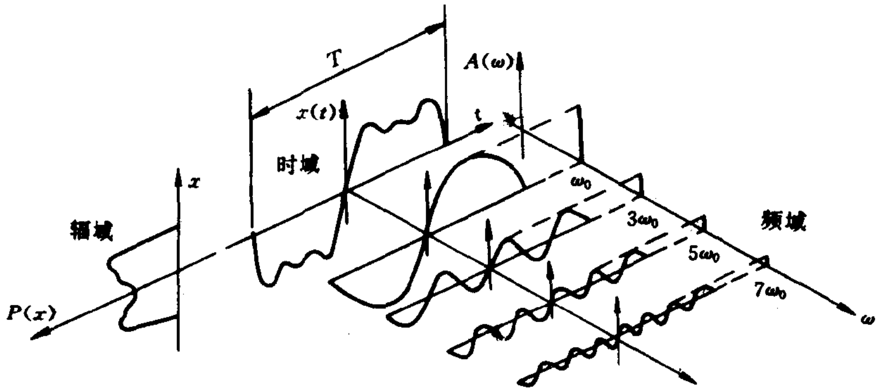


图 1-6　信号的时域、频域及幅域描述

第二节　测试信号的时域分析

在测试工作中，若以一个数轴代表时间，而另一个数轴代表某种物理量的幅值变化，称它为时间历程或时域描述。所谓信号的时域分析就是求取信号在时域中的特征参数（如峰值、均值、方差、均方值等）及信号波形在不同时刻的相似性和关联性（如自相关函数、互相关函数）。

一、时域信号的特征参数

1. 峰值 x_F

峰值 x_F 即信号的最大瞬时值，表示为

$$x_F = |x(t)\max| \tag{1-2}$$

测试过程中如能充分估计峰值的大小，将便于确定测试仪器的动态工作范围。若对峰值估计不足，可导致削波失真，甚至仪器被损坏。信号的峰值也有它的自身作用，如在进行机械结构的强度或安全设计时，就需要了解负荷的最大瞬时值。

峰值不能完全反映信号在整个时间过程中的状况。

2. 均值 μ_x

如前所述，各态历经的平稳随机信号的均值是样本函数 $x(t)$ 在整个时间坐标上的积分平均，即

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

其物理意义是表达这一随机信号变化的中心趋势，或称为直流分量。其估计值表示为 $\hat{\mu}_x$

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

应使 $\hat{\mu}_x$ 足够精确地逼近真正的 μ_x。对于周期信号，其均值的计算仅取一个周期长度 T 作积分平均，即可完全反映整个周期信号的均值。

3. 方差 δ_x^2

方差 δ_x^2 描述随机信号在其均值附近的分布情况，反映被测信号 $x(t)$ 的波动分量。若方差值小，则说明测试数据向均值附近的密集程度高，反之，数据就较分散。它是 $x(t)$ 偏离均值 μ_x 平方的均值。表示为

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 \mathrm{d}t \tag{1-5}$$

方差的正平方根值称为标准差 σ_x，是随机信号数据分析的重要参数之一。

4. 均方值 ψ_x^2

均方值 ψ_x^2 是信号 $x(t)$ 平方的均值，即

$$\psi_x^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

它反映信号的平均功率大小，用以描述被测信号的强度（功率或能量）。

对于周期信号，其均方值 ψ_x^2 可表示为

$$\psi_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

均方值的正平方根值称为均方根值，用 x_{rms} 表示。

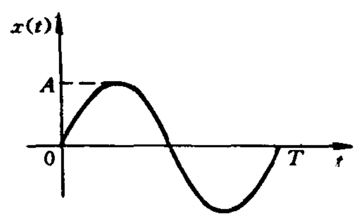
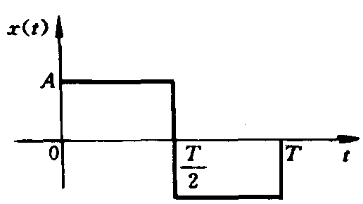
均值、方差和均方值间的相互关系为

$$\delta_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 \tag{1-8}$$

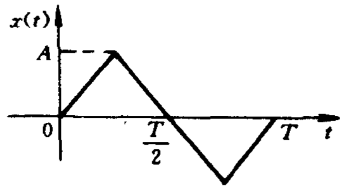
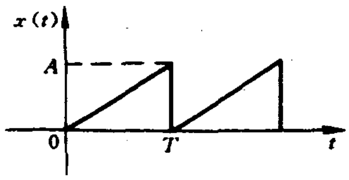
当 $\mu_x=0$ 时，$\sigma_x^2=\psi_x^2$。

表 1-1 列举了几种典型周期信号的特征参数的数量关系，它们均与信号的波形有关。

表 1-1 几种典型周期信号的特征参数

名 称	波 形 图	x_F	μ_x	x_{rms}
正弦波		A	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$
方 波		A	0	A

（续）

名　称	波　形　图	x_F	μ_x	x_{rms}
三角波		A	0	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
锯齿波		A	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$

二、信号的相关分析

相关分析是利用相关系数或相关函数来描述两个信号间的相互关系或其相似程度，还可以用来描述同一信号的现在值与过去值的关系，或者根据过去值、现在值来估计未来值。相关分析也为噪声背景下提取有用信息提供了可靠的途径。

1. 相关和相关系数

所谓相关是指两个变量之间的相互关系，它有两种形式：一种是线性相关，指两个变量之间可用线性方程来描述，另一种是非线性相关，指两个变量之间需用非线性方程来描述。如图 1-7 所示，该图为 S 形测力传感器的弹性元件，在其内贴有四片电阻应变片，组成全桥电路，并接入应变仪的电路。若对其进行标定试验，可得到两组成对的数据 x_i（$i=1, 2, \cdots, N$）和 y_i（$i=1, 2, \cdots, N$），x_i 表示作用在弹性元件上的载荷，而 y_i 表示应变仪的输出，此输出是贴有电阻应变片处的弹性元件的应变值，其测量结果如图 1-8 所示。其中图 1-8a 表示，载荷和应变之间具有精确的线性相关；图 1-8d 为不相关，这是由于结构设计不合理、测量方法不当或其它因素的影响，使测得的应变并非由加在传感器上的载荷引起，两者之间无任何相互关系；图 1-8b 为不精确的线性相关，是实际测量中常见的图形，应变与载荷之间基本上呈某种程度的线性关系，但不精确，有一定的误差；图 1-8c 为非线性相关，表示 x_i 与 y_i 之间存在着某种确定的非线性关系。

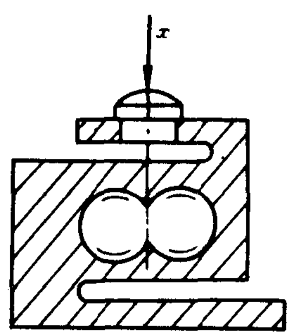


图 1-7　S 形测力传感器

两个随机变量 x 和 y 之间的相关程度常用相关系数 ρ_{xy} 表示，即

$$\rho_{xy}=\frac{E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}{\sigma_x\sigma_y} \tag{1-9}$$

式中 E——数学期望；

μ_x——随机变量 x 的均值；

μ_y——随机变量 y 的均值；

σ_x——随机变量 x 的标准差；

σ_y——随机变量 y 的标准差。

其 $|\rho_{xy}|\leqslant 1$。当 $\rho_{xy}=\pm 1$ 时，说明 x、y 两变量是理想的线性相关（$\rho_{xy}=-1$，表示两者反向线性相关）。当 $\rho_{xy}=0$ 时，说明 x、y 两变量完全不相关。当 $0<|\rho_{xy}|<1$ 时，说明两变量之间有一定程度的相关。

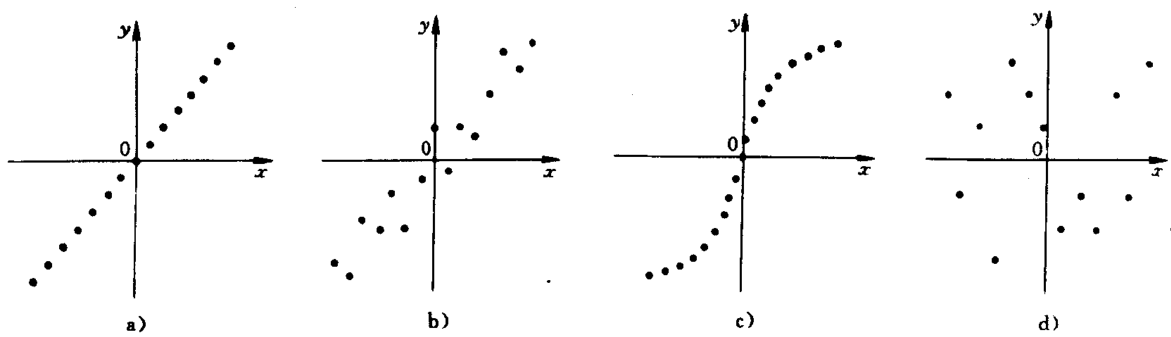


图 1-8　相关程度的变化情况

a）精确的线性相关　b）不精确的线性相关　c）非线性相关　d）不相关

2. 自相关函数

自相关函数是在延时域 τ 内研究一个随机信号在不同时刻之间是否存在关联。

(1) 定义　假若 $x(t)$ 是某各态历经随机过程的一个样本记录，$x(t+\tau)$ 是 $x(t)$ 时移 τ 时刻后的样本记录，见图 1-9。在任何 $t=t_i$ 时刻，从这两个样本记录上可分别得到两个量值 $x(t_i)$

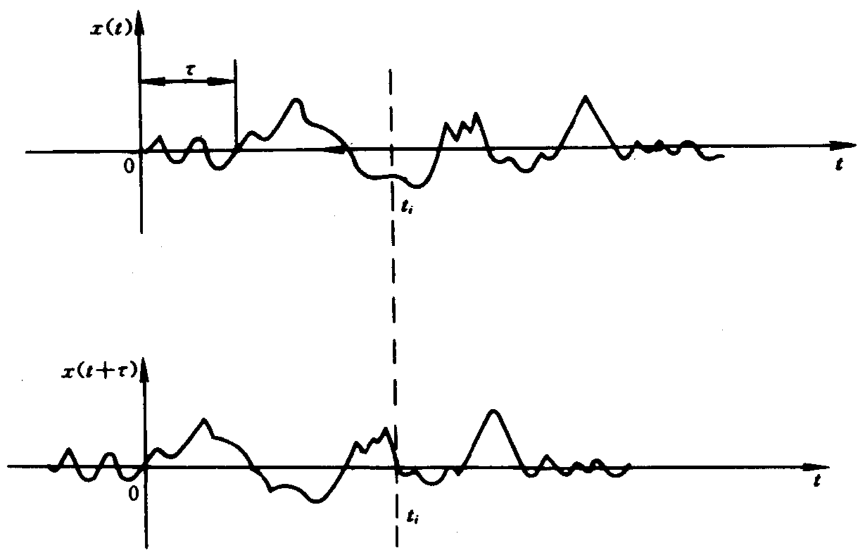


图 1-9　$x(t)$ 及其时移函数 $x(t+\tau)$

和 $x(t_i+\tau)$，而且两个样本记录 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 具有相同的均值 μ_x 和标准差 σ_x。则自相关

函数的定义为：$x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 的乘积，在记录时间历程 T 趋于无穷大时的平均值。其表达式为

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1-10}$$

取不同的 τ 值，可得到不同的 $R_x(\tau)$ 值。

若 $x(t)$ 是一个周期信号，则其自相关函数的表达式为

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

式中 T——周期信号的周期。

（2）自相关系数 上述自相关函数 $R_x(\tau)$ 未能表示出信号 $x(t)$ 在 t 时刻的值与在 $t+\tau$ 时刻的值之间的相关程度，而自相关系数 $\rho_{x(t),x(t+\tau)}$ 则可表示出不同时刻的相关程度。一般将自相关系数 $\rho_{x(t),x(t+\tau)}$ 简写成 $\rho_x(\tau)$ 。公式（1-9）可写成

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \frac{E\{[x(t)-\mu_x][x(t+\tau)-\mu_x]\}}{\sigma_x^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\{E[x(t)x(t+\tau)] - \mu_x E[x(t+\tau)] - \mu_x E[x(t)] + \mu_x^2\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\{E[x(t)x(t+\tau)] - \mu_x^2\} \\ &= \frac{R_x(\tau)-\mu_x^2}{\sigma_x^2} \end{aligned}$$

式中当 $T\to\infty$ 时，$E[x(t)]$ 和 $E[x(t+\tau)]$ 趋近于 μ_x。

当 $\rho_x(\tau)=1$ 时，表示 $x(t)$ 在 t 时刻的值与在 $t+\tau$ 时刻的值完全相关；$\rho_x(\tau)=0$ 时，表示两时刻的值完全不相关。

（3）自相关函数的性质

1）自相关函数是 τ 的偶函数，即

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

2）当 $\tau=0$ 时，自相关函数具有最大值，并等于其均方值，即

$$R_x(\tau=0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t = \psi_x^2$$

若信号 $x(t)$ 的均值 $\mu_x=0$ 时，则

$$R_x(\tau=0) = {\sigma_x}^2$$

3）若 $x(t)$ 是随机信号，当时移 τ 足够大或 $\tau\to\infty$ 时，$x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 之间将彼此无关。即 $\rho_x(\tau\to\infty)\to 0$，那么，当随机信号中不含直流分量（即 $\mu_x=0$），也无周期信号分量时，其

$$\lim_{\tau\to\infty}R_x(\tau) = 0$$

若随机信号中含有直流分量（即 $\mu_x\neq 0$）时，则

$$\lim_{\tau\to\infty}R_x(\tau) = {\mu_x}^2$$

4）随机信号的频带越宽，其 $R_x(\tau)$ 衰减越快，即随时移 τ 的增大，相关性迅速减弱；而窄带随机信号的 $R_x(\tau)$ 则衰减较慢。若随机信号的频谱包含所有的频率成分（即白噪声），则其 $R_x(\tau)$ 将集中成为过原点的 δ 函数。

5）若 $x(t)$ 是周期信号，则其 $R_x(\tau)$ 不收敛，并且它将是一个与原信号具有相同频率的周期函数，但它不具有原信号的相位信息。例如正弦信号 $x(t)=X_0\sin(\omega t+\varphi)$ 的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T X_0\sin(\omega t+\varphi)X_0\sin[\omega(t+\tau)+\varphi]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

令 $\omega t+\varphi=\theta$，则 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\omega}$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \frac{X_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\sin(\theta+\omega\tau)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{X_0^2}{2}\cos\omega\tau
\end{aligned}
$$

可见正弦信号的自相关函数是一个余弦函数，它保留了原信号的圆频率 ω 的信息和幅值 X 的信息，但丢失了原信号中的初始相位信息。

随机信号自相关函数 $R_x(\tau)$ 的图形曲线如图 1-10 所示。

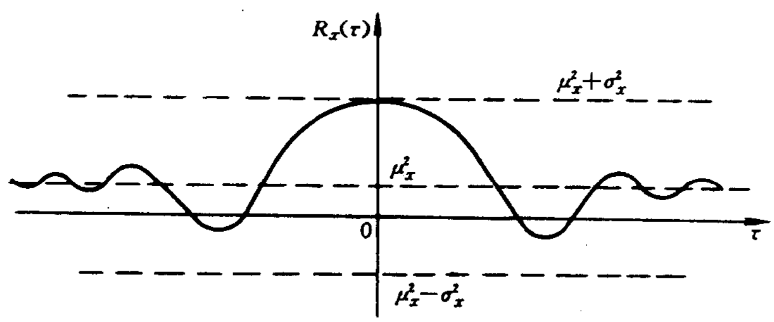


图 1-10　随机信号的自相关函数曲线

（4）典型信号的自相关函数　几种典型信号的自相关函数如图 1-11 所示。

从自相关函数的图形可分析信号的构成及其性质，在稍加对比后可看到，它可从噪声背景下提取信号中的有用信息。

3. 互相关函数

对于两个信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间在不同时刻的相关性（或相似性），可用互相关函数来描述。

（1）定义　若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个各态历经随机过程的样本函数，则它们的互相关函数定义为

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{1-12}
$$

且有

$$
R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t
$$