

井字梁结构静力计算手册

建筑结构设计手册丛书编委会

包福廷 编著

中国建筑工业出版社

前 言

随着我国建筑业的蓬勃发展，井字梁形式结构在工业与民用建筑中得到了较为广泛的应用，如在礼堂、宾馆及商场等一些大型公共建筑入口大厅中常被采用。结构为交叉梁系，受力合理，能够满意地解决象会议室、娱乐厅楼盖等大房间设计问题。这种结构形式能给人一种美观而舒适的感觉，同时能容易满足建筑处理和装修要求，因此受到上建设计人员的欢迎。

井字梁楼盖实属空间受力体系，其内力分析及变形计算是一个十分复杂的问题。目前，在设计时多借助于系数图表来完成结构设计及计算。可是，能满足各种支承条件、多种荷载计算需要的参考书和工具书很难见到。现有资料、手册所提供的计算图表应用范围非常有限，计算荷载单一，而且支承条件仅局限于简支。再有，以往在设计中碰到象连续井字梁、承受非均布荷载这类问题，多数情况下只得按简单粗略的方法进行设计计算。另外我们知道最大挠度值是衡量井字梁结构刚度大小的重要参数。只有确定合适的挠跨比之后，才能使设计达到既经济又安全的目的。但是，挠度值计算工作量较大，采用手算是困难的。过去参考单向梁的方法确定井字梁截面尺寸往往偏大，而对结构变形程度也心中无数。有些特殊情况采取种种简化处理，常与实际受力不符，这样难免给结构的安全性、经济性带来一定盲目因素。综上所述，故此作者根据实际需要和几年的设计实践，参考有关力学书籍，编写了这本工具书，想为设计工作提供一点方便。

虽说目前几乎各大设计单位多使用计算机解决结构计算问题，但是，对于一般设计人员来说，运用计算机很难做到得心应手，更不可能事事处处都依赖电算。在许多情况下，利用设计图表常常更能及时的解决问题。对经常亲临现场的设计人员，想必同样更需要这方面工具书和计算图表，来提高设计速度，更圆满地完成设计任务。况且，我国中小设计单位众多，所以这本手册的出版就更具有现实意义。

本手册所介绍的荷载分配方法虽然属于近似法，但其误差小。曾与有限单元法作了计算比较，计算结果表明，能够满足工程上的要求。应用本手册所提供的方法设计过的工程已有数十例，实践证明，效果良好。

本手册编写时，虽然尽可能照顾到设计需要，但是，由于篇幅所限，不可能完全满足设计上的要求。按等效均布荷载法计算，虽能够达到实用上精度要求，但对于受力性能较好的斜交井字梁来说，考虑不常用，应用面窄，所以没有写进这部分内容。不过利用本手册给出的方法不难解决这类结构计算问题。

本手册在编写过程中，得到所在院、室领导和同志的有力支持。同时得到苏允璋高级工程师热情帮助，并对初稿作了审阅，提出许多有益意见。此外，还有薛仲谦工程师、阎高峰及田宏明助理工程师参加部分图表的编制工作，在此谨致衷心地感谢。

作者期望通过这本简明实用的《井字梁结构静力计算手册》会对设计工作有所帮助，但水平有限，不足之处在所难免，恳请使用本手册的读者予以指正。

高级工程师 包福廷

本手册对单跨井字梁计算给出了简便的荷载分配法和等效均布荷载法；对连续井字梁给出了实用计算，可以解决荷载组合、支座弯矩考虑塑性内力重分布的调幅问题；荷载形式有面均布、线均布、集中及局部等；网格有相等或不相等情况；支承条件考虑了多种类型；同时提供了1100种井字梁内力和挠度计算图表，270种荷载分配系数图表，供结构强度、刚度计算时使用，并列有大量相应的算例；另将单跨井字梁截面选择、扭矩近似计算及井字梁结构计算程序使用说明及源程序等内容列入书末附录中。

本手册方法易懂、概念清晰、计算简捷、实用性强，可供从事工业与民用建筑设计的结构技术人员参考。

井字梁结构静力计算手册

建筑设计手册丛书编委会

包福廷 编著

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

开本：787×1092毫米 1/16 印张：41¹/₂ 字数：1004千字

1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷

印数：1—5,120册 定价：28.10元

ISBN7—112—00773—9/TU·546

(5851)

目 录

<p>第 1 章 计算图表编制..... 1</p> <p>1.1 编制方法..... 1</p> <p>1.2 计算精度..... 1</p> <p>1.3 一般规则..... 2</p> <p>1.3.1 井字梁支承条件图例..... 2</p> <p>1.3.2 井字梁上作用荷载图例..... 2</p> <p>1.3.3 荷载、内力及挠度正负号规定..... 3</p> <p>1.3.4 图表编号..... 3</p> <p>第 2 章 荷载分配法..... 4</p> <p>2.1 基本原理..... 4</p> <p>2.2 计算例题..... 5</p> <p>第 3 章 在均布荷载作用下 井字梁计算..... 11</p> <p>3.1 计算公式..... 11</p> <p>3.1.1 内力计算公式..... 11</p> <p>3.1.2 最大挠度计算公式..... 11</p> <p>3.2 四边简支井字梁计算..... 11</p> <p>3.2.1 计算例题..... 11</p> <p>3.3 横向一边固定另一边简支、纵向边 简支井字梁计算..... 12</p> <p>3.3.1 计算例题..... 12</p> <p>3.4 横向一边固定另一边简支、 纵向边固定井字梁计算..... 13</p> <p>3.4.1 计算例题..... 13</p> <p>3.5 横向一边固定另一边简支、纵向一边简 支另一边固定井字梁计算..... 14</p> <p>3.5.1 计算例题..... 14</p> <p>3.6 横向边固定、纵向边简支井字梁计算..... 15</p> <p>3.6.1 计算例题..... 15</p> <p>3.7 四边固定井字梁计算..... 15</p> <p>3.7.1 计算例题..... 15</p> <p>3.8 横向一边固定另一边自由、纵向一边 简支另一边固定井字梁计算..... 16</p> <p>3.8.1 计算例题..... 16</p> <p>3.9 横向一边固定另一边自由、纵向边 简支井字梁计算..... 17</p> <p>3.9.1 计算例题..... 17</p>	<p>3.10 横向一边固定另一边自由、纵向边 固定井字梁计算..... 18</p> <p>3.10.1 计算例题..... 18</p> <p>3.11 横向一边固定另一边自由、纵向 一边自由另一边固定井字梁计算..... 19</p> <p>3.11.1 计算例题..... 19</p> <p>3.12 均布荷载计算图表..... 20</p> <p>3.12.1 四边简支井字梁..... 20</p> <p>3.12.2 横向一边固定另一边简支、 纵向边简支井字梁..... 35</p> <p>3.12.3 横向一边固定另一边简支、纵向边 固定井字梁..... 54</p> <p>3.12.4 横向一边固定另一边简支、纵向 一边简支另一边固定井字梁..... 80</p> <p>3.12.5 横向边固定、纵向边简支井字 梁..... 99</p> <p>3.12.6 四边固定井字梁..... 114</p> <p>3.12.7 横向一边固定另一边自由、纵向 一边简支另一边固定井字梁..... 125</p> <p>3.12.8 横向一边固定另一边自由、纵向 边简支井字梁..... 145</p> <p>3.12.9 横向一边固定另一边自由、纵向 边固定井字梁..... 160</p> <p>3.12.10 横向一边固定另一边自由、纵向 一边自由另一边固定井字梁..... 177</p> <p>第 4 章 在集中荷载作用下井字梁 计算..... 192</p> <p>4.1 计算公式..... 192</p> <p>4.1.1 内力计算公式..... 192</p> <p>4.1.2 最大挠度计算公式..... 192</p> <p>4.2 计算例题..... 192</p> <p>4.3 集中荷载计算图表..... 195</p> <p>4.3.1 四边简支井字梁..... 195</p> <p>4.3.2 横向一边固定另一边简支、纵向 边简支井字梁..... 213</p> <p>4.3.3 横向一边固定另一边简支、纵向 边固定井字梁..... 226</p>
--	--

4.3.4	横向一边固定另一边简支、纵向 一边简支另一边固定井字梁	242	6.2.2	计算例题	312
4.3.5	横向边固定、纵向边简支井字 梁	261	6.2.3	线均布荷载计算图表	313
4.3.6	四边固定井字梁	270	6.3	四边简支井字梁开洞情况	324
第5章	按等效均布荷载方法计算	280	6.3.1	计算公式	324
5.1	四边简支井字梁计算	280	6.3.2	计算例题	324
5.1.1	$3/4l_x$ 均布荷载	280	6.3.3	计算图表	324
5.1.2	$1/2l_x$ 均布荷载	281	6.4	均布荷载与自由边节点上集中荷载共 同作用下井字梁	345
5.1.3	$1/4l_x$ 均布荷载	282	6.4.1	计算公式	345
5.1.4	部分均布荷载	283	6.4.2	计算例题	345
5.1.5	计算例题	284	1. 横向一边固定另一边自由、纵向边简 支井字梁	345	
5.2	横向一边固定另一边简支、纵向边固定 井字梁计算	286	2. 横向一边固定另一边自由、纵向一边 自由另一边固定井字梁	346	
5.2.1	$2/3l_x$ 均布荷载	286	6.4.3	计算图表	347
5.2.2	$1/3l_x$ 均布荷载	288	1. 横向一边固定另一边自由、纵向边固 定井字梁	347	
5.2.3	计算例题	289	2. 横向一边固定另一边自由、纵向一边 简支另一边固定井字梁	374	
第6章	在局部均布荷载作用下井字梁 计算	293	3. 横向一边固定另一边自由、纵向边简 支井字梁	407	
6.1	在部分均布荷载作用下四边简支 井字梁	293	4. 横向一边固定另一边自由、纵向一边 自由另一边固定井字梁	424	
6.1.1	计算公式	293	第7章	不等网格井字梁计算	442
1.	内力计算公式	293	7.1	四边简支井字梁	442
2.	最大挠度计算公式	293	7.1.1	均布荷载	442
6.1.2	计算例题	293	1.	计算公式	442
6.1.3	部分均布荷载计算图表	294	2.	计算例题	442
1.	$5/6l_x$ 均布荷载	294	3.	计算图表	443
2.	$2/3l_x$ 均布荷载	294	7.1.2	部分均布荷载	456
3.	$1/2l_x$ 均布荷载	294	1.	计算公式	456
4.	$1/3l_x$ 均布荷载	294	2.	计算例题	456
5.	$1/6l_x$ 均布荷载	294	3.	计算图表	456
6.	$4/5l_x$ 均布荷载	294	7.1.3	线均布荷载	465
7.	$3/5l_x$ 均布荷载	294	1.	计算公式	465
8.	$2/5l_x$ 均布荷载	295	2.	计算例题	465
9.	$1/5l_x$ 均布荷载	295	3.	计算图表	465
10.	$3/4l_x$ 均布荷载	295	7.1.4	集中荷载	479
11.	$1/4l_x$ 均布荷载	295	1.	计算公式	479
6.2	在线均布荷载作用下四边简支 井字梁	312	2.	计算图表	479
6.2.1	计算公式	312	7.2	在均布荷载作用下其它支承条件井 字梁	485
1.	内力计算公式	312	1.	计算公式	485
2.	最大挠度计算公式	312			

2. 计算图表.....	486	4. 横向一边固定另一边自由、纵向一边自由另一边固定井字梁.....	602
第 8 章 连续井字梁计算.....	527	2.3.3 不等网格井字梁均布荷载分配系数.....	610
8.1 实用计算.....	527	1. 四边简支井字梁.....	610
8.1.1 计算原理.....	527	2. 横向一边固定另一边简支、纵向边简支井字梁.....	613
8.1.2 计算实例.....	528	3. 横向一边固定另一边简支、纵向边固定井字梁.....	616
8.2 利用荷载分配系数计算.....	536	4. 横向一边固定另一边简支、纵向一边简支另一边固定井字梁.....	619
8.2.1 荷载分配系数.....	536	5. 横向边固定、纵向边简支井字梁.....	622
8.2.2 计算步骤.....	536	6. 四边固定井字梁.....	626
8.2.3 计算例题.....	537	附录 A 单跨井字梁截面选择.....	629
8.3 荷载分配系数图表.....	540	A.1 查表计算梁截面.....	629
8.3.1 均布荷载分配系数.....	540	A.1.1 井字梁跨高比 β 值表.....	629
1. 四边简支井字梁.....	540	A.1.2 计算允许跨高比 $[\beta]$	630
2. 横向一边固定另一边简支、纵向边简支井字梁.....	542	A.1.3 确定梁截面尺寸.....	630
3. 横向一边固定另一边简支、纵向边固定井字梁.....	546	A.2 按公式计算梁截面.....	631
4. 横向一边固定另一边简支、纵向一边简支另一边固定井字梁.....	551	A.2.1 计算允许跨高比 $[\beta]$	631
5. 横向边固定、纵向边简支井字梁.....	557	附录 B 单跨井字梁扭矩近似计算.....	633
6. 四边固定井字梁.....	559	B.1 计算方法.....	633
7. 横向一边固定另一边自由、纵向一边简支另一边固定井字梁.....	561	B.2 计算例题.....	634
8. 横向一边固定另一边自由、纵向边简支井字梁.....	568	附录 C 井字梁结构计算程序使用说明及源程序.....	635
9. 横向一边固定另一边自由、纵向边固定井字梁.....	573	C.1 程序功能及适用条件.....	635
10. 横向一边固定另一边自由、纵向一边自由另一边固定井字梁.....	578	C.2 算法简介及说明.....	635
8.3.2 非均布荷载分配系数.....	586	C.3 粗框图.....	636
1. 横向一边固定另一边自由、纵向一边简支另一边固定井字梁.....	586	C.4 使用方法.....	636
2. 横向一边固定另一边自由、纵向边简支井字梁.....	592	C.5 输出字符说明.....	638
3. 横向一边固定另一边自由、纵向边固定井字梁.....	597	C.6 注意事项.....	638
		C.7 计算例题.....	639
		C.8 源程序.....	641
		参考文献.....	671

第1章 计算图表编制

1·1 编制方法

本手册对井字梁结构静力计算、图表编制所采用的是荷载分配法。此法具有概念清晰,容易掌握,手算简便,便于编制电算程序,有足够计算精度等特点。荷载分配法计算原理的实质是结构力学中的力法。先将荷载化为梁交叉结点上集中荷载(不一定相等),然后以横向梁分配荷载为基本未知量,满足静力平衡及竖向变形协调原理,不考虑转角变形的影响,利用《建筑结构静力计算手册》^①上刊载的单跨梁挠度计算公式,经计算形成柔度矩阵,不会有太大困难便可以建立起井字梁网格点的线性方程组。通过编制的电算程序,从而求解出每根梁所承受的分配荷载及其相应的内力和挠度。

关于表中梁的最大弯矩、剪力系数,是以区格长度为步长选取最大值。而井字梁的最大挠度系数,采用是以半区格长度为步长,从两个方向逐梁从中选出最大值。

对于有自由边的井字梁,编制图表时,按通常荷载传递规律,在自由边节点上集中了相应的荷载。然后照上述方法求解。

这里需要说明一点,井字梁最大挠度点有时随着 b/a (请见第2章)比值变化而变化,其位置出现在不同的梁上。因此如表中标有 $A1\sim A3$ 或 $B1、B2$ 字样,就是这个意思。至于最大挠度点具体在哪根梁上,这对计算井字梁挠度值并不十分重要,知道点的位置出现属于哪个方向梁,便可以查用本手册中有关公式进行计算。

1·2 计算精度

计算精度是读者十分关心的问题,也是衡量计算方法优劣的主要标准。本手册给出的荷载分配法,除了满足静力平衡条件外,同时考虑主要的竖向变形协调,忽略次要的转角变位。通过计算表明,对内力和挠度的影响小,这样也能使计算大为简化,从而未知量减少三分之二(如变位法)。在求解格点线性方程组时,形成柔度矩阵考虑了所有点的作用,其计算是采用《建筑结构静力计算手册》中有关计算变位解析式进行的,不难看出计算精度是有保证的。

此种计算方法与有限单元法相比是一种近似方法。不过,我们曾对网格 $5\times 5、8\times 8$ 几例井字梁进行了比较计算。从计算结果看出,其误差很小,如梁截面强度主要控制内力弯矩值稍大 $1\sim 5\%$,而井字梁挠度计算值几乎完全一样。我们知道,常用的有限差分法与有限单元法相比同样有一定误差,一般为 $10\sim 20\%$ 。由此可见,本法计算精度对一般情况,能够满足在技术设计阶段对工程上要求的精度。

^① 《建筑结构静力计算手册》,中国建筑工业出版社出版。

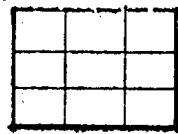
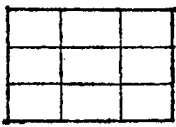
1.3 一般规则

1.3.1 井字梁支承条件图例

- 代表自由边;
- 代表简支边;
- 代表固定边。

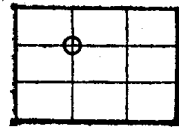
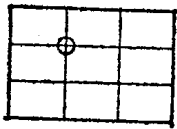
1.3.2 井字梁上作用荷载图例

1. 全部作用均布荷载

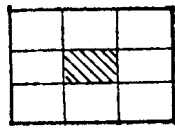
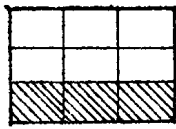
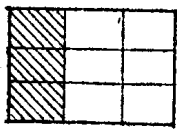


图中全部未画斜线者代表均布荷载。

2. 集中荷载，竖直向下作用

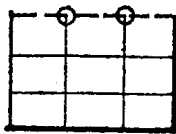


3. 局部作用均布荷载



图中斜线代表局部均布荷载。

4. 均布荷载与自由边节点上集中荷载共同作用

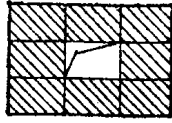


图中○代表竖直向下作用的集中荷载。

5. 线均布荷载



6. 井字梁开洞情况



1.3.3 荷载、内力及挠度正负号规定

荷载——竖直向下作用为正，反之为负；

弯矩——使格梁的受荷面受压者为正，反之为负；

挠度——变位方向与荷载方向相同者为正，反之为负。

1.3.4 图表编号

本手册计算图表编号，考虑到表格数量大，为方便使用，因此按章编排顺序。

第2章 荷载分配法

2.1 基本原理

荷载分配法是根据结构力学理论得到的，它的实质是属于力法。本法概念清晰，容易实现电算程序，手算也很方便，而且有足够的计算精度。

为了计算简便，假定各向梁截面尺寸相同，当然梁截面也允许不一样。荷载分配法计算原理，是以横向梁分配荷载为基本未知量，满足静力平衡条件及竖向位移协调原理，从而

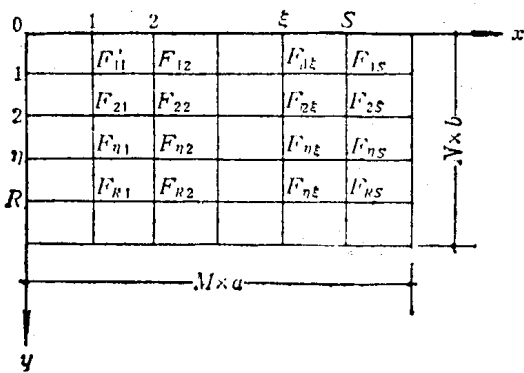


图 2-1

建立井字梁网格点线性方程组，因此求解得到横、纵向梁的分配荷载。然后，再分别按单向梁的计算方法进行计算。

在建立方程式中，将计算荷载按荷载传递规律，近似的化为梁交叉节点处集中荷载。在计算最大剪力时，本手册对支座处一律增加一项梁端节点荷载（靠近支座网格无均布荷载除外），其数值为 $\frac{1}{4}abq$ （有线均布荷载作用的梁端数值为 $\frac{1}{2}bq$ ）。

图 2-1 所示为直角坐标系中的井字

梁平面图，其任意格点的方程式为：

$$\begin{aligned}
 [U_1 \dots U_\xi \dots U_S] \begin{Bmatrix} F_{\eta 1} \\ \vdots \\ F_{\eta \xi} \\ \vdots \\ F_{\eta S} \end{Bmatrix} + [V_1 \dots V_\eta \dots V_R] \begin{Bmatrix} F_{1 \xi} \\ \vdots \\ F_{\eta \xi} \\ \vdots \\ F_{R \xi} \end{Bmatrix} \\
 = [V_1 \dots V_\eta \dots V_R] \begin{Bmatrix} F'_{1 \xi} \\ \vdots \\ F'_{\eta \xi} \\ \vdots \\ F'_{R \xi} \end{Bmatrix} \quad (2-1)
 \end{aligned}$$

或缩写

$$[U_i][F_{\eta i}]^T + [V_j][F_{j \xi}]^T = [V_j][F'_{j \xi}]^T \quad (2-2)$$

式中

$[U_i]$ ——横向梁单位荷载位移矩阵；

$[V_j]$ ——纵向梁单位荷载位移矩阵；

$[F_{\eta i}]$ 、 $[F_{j \xi}]$ ——横向梁分配荷载分别沿横、纵方向排列的向量；

$[F'_{j \xi}]$ ——作用在结点上荷载沿纵向排列的向量；

a 、 b ——分别为井字梁横、纵方向区格长度；

M 、 N ——分别为井字梁横、纵方向最大区格格数。

建立井字梁各网格节点方程式后，便可以组合成格点的线性方程组。

关于求解线性方程组的计算方法方面的参考书籍颇多，这里就不做介绍了。

2·2 计算例题

【例题2-1】 已知某实验楼为井字梁楼面。如图2-2所示。区格长度 $a=1.56\text{m}$ ， $b=2.5\text{m}$ ，格梁刚度 $B=4.29 \times 10^8 \text{kN}\cdot\text{cm}^2$ 。楼面上有一设备基础，其局部均布荷载 $q_{loc}=24\text{kN}/\text{m}^2$ 。

求：各梁内力及最大挠度值。

解：

1. 计算格梁内力

(1) 计算网格结点处的集中荷载

按结点编号(如图2-3)顺序计算。

$$F_{11}' = \frac{1}{4} \times abq = \frac{1}{4} \times 1.56 \times 2.5 \times 24 = 23.40 \text{kN}$$

$$F_{12}' = -\frac{1}{2} \times abq = -\frac{1}{2} \times 1.56 \times 2.5 \times 24 = 46.80 \text{kN}$$

$$F_{21}' = -\frac{1}{2} \times abq = -\frac{1}{2} \times 1.56 \times 2.5 \times 24 = 46.80 \text{kN}$$

$$F_{22}' = abq = 1.56 \times 2.5 \times 24 = 93.60 \text{kN}$$

(2) 建立格点方程式

方程式的系数按表2-1中有关公式计算。

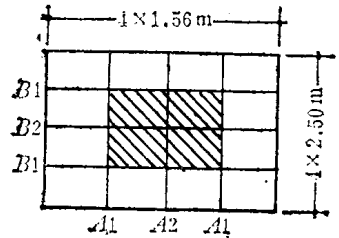


图 2-2

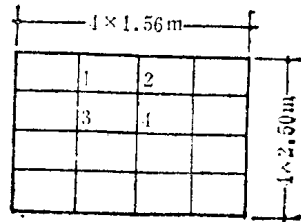


图 2-3

$$\text{令 } \gamma = \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^3 = \left(\frac{10}{6.24} \right)^3 = 4.1157$$

格点 1

$$\begin{aligned} [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} + \gamma [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \\ = \gamma [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{11}' \\ F_{21}' \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

格点 2

$$\begin{aligned} [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} + \gamma [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{Bmatrix} \\ = \gamma [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{12}' \\ F_{22}' \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

格点 3

$$[0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} + \gamma [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{21} \end{Bmatrix}$$

$$= \gamma [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F'_{11} \\ F'_{21} \end{Bmatrix}$$

格点4

$$\begin{aligned} & [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} + \gamma [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{Bmatrix} \\ & = \gamma [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F'_{12} \\ F'_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 组合成线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0.6395 & 0.0859 & 0.3535 & 0 \\ 0.1719 & 0.6395 & 0 & 0.3535 \\ 0.7075 & 0 & 0.6395 & 0.0859 \\ 0 & 0.7075 & 0.1719 & 0.6395 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.584 \\ 57.168 \\ 40.632 \\ 81.264 \end{Bmatrix}$$

求解方程组，得横向梁分配荷载

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.074 \\ 45.458 \\ 29.882 \\ 68.751 \end{Bmatrix}$$

由此可求出纵向梁分配荷载

$$\begin{Bmatrix} F'_{11} \\ F'_{12} \\ F'_{21} \\ F'_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_{11} - F_{11} \\ F'_{12} - F_{12} \\ F'_{21} - F_{21} \\ F'_{22} - F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.326 \\ 1.342 \\ 16.918 \\ 24.849 \end{Bmatrix}$$

(4) 计算梁内力 (图2-4)

B1梁

$$M_{\max} = (22.074 + 45.458/2) \times 1.56 \times 2 - 22.074 \times 1.56 = 105.35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{\max} = 22.074 + 45.458/2 = 44.80 \text{ kN}$$

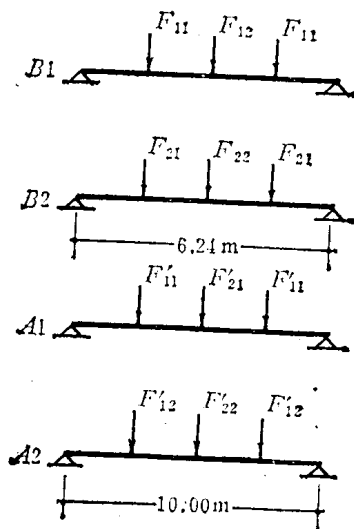


图 2-4

B2梁

$$M_{\max} = (29.882 + 68.751/2) \times 1.56 \times 2 - 29.882 \times 1.56 = 153.87 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{\max} = 29.882 - 68.751/2 = 64.258 \text{ kN}$$

A1梁

$$M_{\max} = (1.326 + 16.918/2) \times 2.5 \times 2 - 1.326 \times 2.5 = 45.61 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{\max} = 1.326 + 16.918/2 = 9.79 \text{ kN}$$

A2梁

$$M_{\max} = (1.342 + 24.849/2) \times 2.5 \times 2 - 1.342 \times 2.5 = 65.48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_{\max} = 1.342 + 24.849/2 = 13.77 \text{ kN}$$

2. 最大挠度计算

井字梁的最大挠度点在A2梁跨中处，其计算可利用表2.1中简支梁的挠度公式。如图2-4中A2梁所示，其作用荷载为 $F'_{12} = 1.342 \text{ kN}$ ， $F'_{22} = 24.849 \text{ kN}$ 。

$$\xi \geq \alpha$$

$$\text{所求点位置 } \xi = x/l = 5/10 = 0.50$$

$$\text{荷载作用点 } \alpha_1 = a/l = 2.5/10 = 0.25$$

$$\alpha_2 = a/l = 5/10 = 0.50$$

$$\begin{aligned} f_{s1} &= F'_{12} l^3 / 6B [\xi(2-\xi) - \alpha^2] (1-\xi) \alpha \\ &= F'_{12} l^3 / 6B [0.5(2-0.5) - 0.25^2] (1-0.5) \times 0.25 \\ &= 0.1153 \times l^3 / 6B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{s2} &= F'_{22} l^3 / 6B [\xi(2-\xi) - \alpha^2] (1-\xi) \alpha \\ &= F'_{22} l^3 / 6B [0.5(2-0.5) - 0.5^2] (1-0.5) \times 0.5 \\ &= 3.1061 \times l^3 / 6B \end{aligned}$$

最大挠度值

$$\begin{aligned} f_{\max} &= 2f_{s1} + f_{s2} \\ &= (2 \times 0.1153 + 3.1061) l^3 / 6B \\ &= 3.3367 \times 1000^3 / (6 \times 4.29 \times 10^8) = 1.30 \text{ cm} \end{aligned}$$

【例题2-2】 已知某楼层采用井字梁楼面，网

格为 4×4 ，如图2-5所示。区格长度 $a = 2.5 \text{ m}$ ，
 $b = 2.0 \text{ m}$ ，格梁刚度 $B = 2.29 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2$ 。

在楼板 $\frac{l_2}{2}$ 处设置一道砖隔墙，每延米荷重为

$q_1 = 16 \text{ kN/m}$ 。

求：各梁内力及最大挠度值。

解：

1. 计算格梁内力

(1) 计算网格结点处的集中荷载
按结点编号（如图2-6）顺序计算。

$$F'_{11} = 0$$

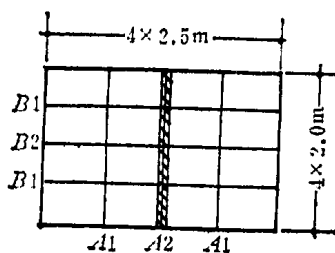


图 2-5

$$F_{1'2} = q_l b = 16 \times 2.0 = 32 \text{ kN}$$

$$F_{2'1} = 0$$

$$F_{2'2} = q_l b = 16 \times 2.0 = 32 \text{ kN}$$

(2) 建立格点方程式

方程式中的系数可按表2-1中简支梁公式计算。

$$\text{令 } \nu = \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^3 = \left(\frac{8}{10} \right)^3 = 0.512$$

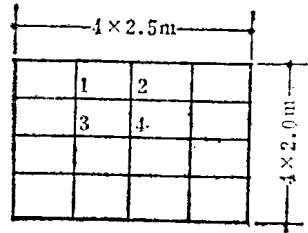


图 2-6

格点1

$$\begin{aligned} [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} + \nu [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \\ = \nu [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{1'1} \\ F_{2'1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

格点2

$$\begin{aligned} [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} + \nu [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{Bmatrix} \\ = \nu [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{1'2} \\ F_{2'2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

格点3

$$\begin{aligned} [0.125 \quad 0.0859] \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} + \nu [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \\ = \nu [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{1'1} \\ F_{2'1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

格点4

$$\begin{aligned} [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} + \nu [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{Bmatrix} \\ = \nu [0.1719 \quad 0.125] \begin{Bmatrix} F_{1'2} \\ F_{2'2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 组合成线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0.1890 & 0.0859 & 0.0440 & 0 \\ 0.1719 & 0.1890 & 0 & 0.0440 \\ 0.0880 & 0 & 0.1890 & 0.0859 \\ 0 & 0.0880 & 0.1719 & 0.1890 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.4554 \\ 0 \\ 4.8644 \end{Bmatrix}$$

求解方程组，得横向梁分配荷载

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.643 \\ 18.679 \\ -7.930 \\ 24.253 \end{Bmatrix}$$

由此可求出纵向梁分配荷载

$$\begin{Bmatrix} F'_{11} \\ F'_{12} \\ F'_{21} \\ F'_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_{11} - F_{11} \\ F'_{12} - F_{12} \\ F'_{21} - F_{21} \\ F'_{22} - F_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.643 \\ 13.321 \\ 7.930 \\ 7.747 \end{Bmatrix}$$

(4) 计算梁内力(图2-7)

B1梁

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (F_{11} + F_{12}/2) \times 2.5 \times 2 - F_{11} \times 2.5 \\ &= (-6.643 + 18.679/2) \times 2.5 \times 2 \\ &\quad - (-6.643 \times 2.5) \\ &= 30.09 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$V_{\max} = -6.643 + 18.679/2 + 6.643 = 9.34 \text{ kN}$$

B2梁

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (F_{21} + F_{22}/2) \times 2.5 \times 2 - F_{21} \times 2.5 \\ &= (-7.930 + 24.253/2) \times 5 - (-7.930 \times 2.5) = 40.81 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$V_{\max} = -7.930 + 24.253/2 + 7.930 = 12.13 \text{ kN}$$

A1梁

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (F'_{11} + F'_{21}/2) \times 2.0 \times 2 - F'_{11} \times 2.0 \\ &= (6.643 + 7.930/2) \times 2.0 \times 2 - 6.643 \times 2.0 = 29.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$V_{\max} = 6.643 + 7.930/2 = 10.61 \text{ kN}$$

A2梁

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (F'_{12} + F'_{22}/2) \times 2.0 \times 2 - F'_{12} \times 2.0 \\ &= (13.321 + 7.747/2) \times 2.0 \times 2 - 13.321 \times 2.0 = 42.14 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$V_{\max} = 13.321 + 7.747/2 + 16 \times 2.0/2 = 33.19 \text{ kN}$$

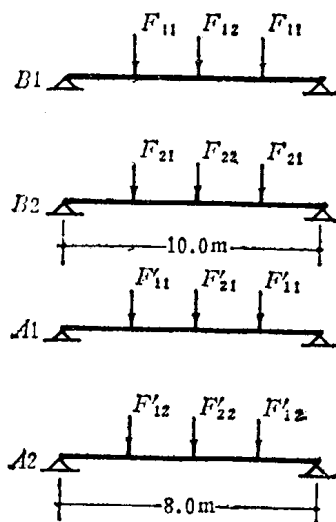


图 2-7

2. 最大挠度计算

井字梁的最大挠度点在B2梁跨中处,可按表2·1中简支梁的挠度公式计算。如图2-7中B2梁所示,其作用荷载为 $F_{21} = -7.930 \text{ kN}$, $F_{22} = 24.253 \text{ kN}$ 。

$$\zeta \geq \alpha$$

所求点位置 $\zeta = x/l = 5/10 = 0.5$

荷载作用点 $\alpha_1 = a/l = 2.5/10 = 0.25$

$\alpha_2 = a/l = 5.0/10 = 0.5$

$$f_{.1} = \frac{F_{21} l^3}{6B} [\zeta(2-\zeta) - \alpha^2](1-\zeta)\alpha$$

$$= \frac{F_{21} l^3}{6B} [0.5(2-0.5) - 0.25^2](1-0.5) \times 0.25 = -0.6815 \times \frac{l^3}{6B}$$

$$f_{.2} = \frac{F_{22} l^3}{6B} [0.5(2-0.5) - 0.5^2](1-0.5) \times 0.5 = 3.0316 \times \frac{l^3}{6B}$$

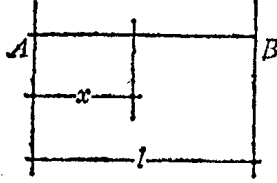
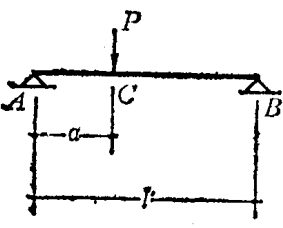
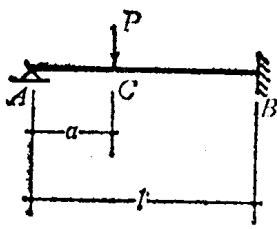
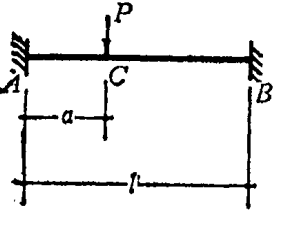
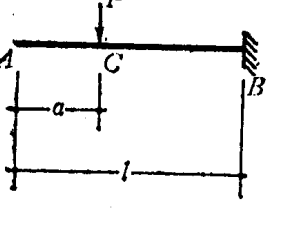
最大挠度值

$$f_{\max} = 2f_{.1} + f_{.2} = (-2 \times 0.6815 + 3.0316) \frac{l^3}{6B}$$

$$= 1.6686 \times \frac{1000^3}{6 \times 2.29 \times 10^8} = 1.21 \text{ cm}$$

梁 挠 度、内 力 公 式①

表 2·1

简 图	计 算 公 式
	$\zeta = \frac{x}{l}, \quad a = \frac{a}{l}$
	$\zeta \leq a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} [a(2-a) - \zeta^2](1-a)\zeta,$ $\zeta > a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} [\zeta(2-\zeta) - a^2](1-\zeta)a$ $\zeta \leq a, Q_x = P(1-a),$ $\zeta > a, Q_x = -Pa$ $\zeta \leq a, M_x = Pl(1-a)\zeta,$ $\zeta > a, M_x = Pl(1-\zeta)a$
	$\zeta \leq a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} \left[\frac{1}{2}(2+a)(3-\zeta^2) - 3 \right] (1-a)^2 \zeta,$ $\zeta > a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} \left\{ \left[\frac{1}{2}(2+a)(3-\zeta^2) - 3 \right] (1-a)^2 \zeta + (\zeta-a)^3 \right\}$ $\zeta \leq a, Q_x = \frac{1}{2}P(2+a)(1-a)^2$ $\zeta > a, Q_x = \frac{1}{2}P[(2+a)(1-a)^2 - 2]$ $\zeta \leq a, M_x = \frac{1}{2}Pl(2+a)(1-a)^2 \zeta,$ $\zeta > a, M_x = \frac{1}{2}Pl[(2+a)(1-a)^2 \zeta - 2(\zeta-a)]$
	$\zeta \leq a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} [3a - (1+2a)\zeta](1-a)^2 \zeta^2,$ $\zeta > a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} [(3-2a)\zeta - a](1-\zeta)^2 a^2$ $\zeta \leq a, Q_x = P(1+2a)(1-a)^2,$ $\zeta > a, Q_x = P[(1+2a)(1-a)^2 - 1]$ $\zeta \leq a, M_x = Pl[(1+2a)(1-a)^2 \zeta - a(1-a)^2],$ $\zeta > a, M_x = Pl[(1+2a)(1-a)^2 \zeta - a(1-a)^2 - (\zeta-a)]$
	$\zeta \leq a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} (2+a-3\zeta)(1-a)^2,$ $\zeta > a, f_x = \frac{Pl^3}{6EI} [2(1-a)^2 - 3(\zeta-a)(1-a)^2 + (\zeta-a)^3]$ $\zeta < a, Q_x = 0,$ $\zeta \geq a, Q_x = -P$ $\zeta < a, M_x = 0,$ $\zeta > a, M_x = -Pl(\zeta-a)$

① 摘自《建筑结构静力计算手册》

第3章 在均布荷载作用下井字梁计算

3.1 计算公式

3.1.1 内力计算公式

支座处弯矩

A方向梁

$$M_{\text{fix}} = -\text{表中系数} \times ab^2q \quad (3-1)$$

B方向梁

$$M_{\text{fix}} = -\text{表中系数} \times a^2bq \quad (3-2)$$

跨内最大弯矩

A方向梁

$$M_{\text{max}} = \text{表中系数} \times ab^2q \quad (3-3)$$

B方向梁

$$M_{\text{max}} = \text{表中系数} \times a^2bq \quad (3-4)$$

最大剪力

$$V_{\text{max}} = \text{表中系数} \times abq \quad (3-5)$$

3.1.2 最大挠度计算公式

A方向梁

$$f_{\text{max}} = \text{表中系数} \times \frac{ab^4q}{B} \quad (3-6)$$

B方向梁

$$f_{\text{max}} = \text{表中系数} \times \frac{a^4bq}{B} \quad (3-7)$$

式中 a 、 b ——分别为井字梁横、纵向区格长度；

q ——单位面积上计算荷载；

B ——井字梁刚度；按弹性理论计算时 $B = EI$ ；

E ——弹性模量；

I ——截面惯性矩。

3.2 四边简支井字梁计算

3.2.1 计算例题

【例题3-1】 已知井字梁网格为 4×3 ，如图3-1所示。区格长度 $a = 2.5\text{m}$ ， $b = 2.0\text{m}$ ，