高等专科学校教材
中国计算机学会大专教育学会推荐出版

离散数学

马叔良 顾豫 编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http: // www. phei. co. cn

高等专科学校教材

离 散 数 学

马叔良 顾 豫 编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容提要

离散数学是计算机专业的数学基础课。内容涉及数理逻辑、集合论、图论、代数系统及布尔代数等对计算机专业特别有用的章节。章后配有一定量的习题，以加深对相应概念的理解，提高解决实际问题的能力。

本书为大学专科计算机专业教材，同时适用于其他工程类专业，也可供希望了解离散数学的读者阅读。

丛 书 名：高等专科学校教材
书　　名：离散数学
编　　者：马叔良　顾豫
审 校 者：李邦荣
责任编辑：张凤鹏
特约编辑：袁　英
印 刷 者：北京四季青印刷厂印刷
出版发行：电子工业出版社出版、发行
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036　发行部电话 68214070
URL:http:/www.phei.com.cn
经　　销：各地新华书店经销
开　　本：787×1092 1/16　印张:12　字数:307.2 千字
版　　次：1997 年 6 月第二版　1998 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-3848-X / G·288
定　　价：13.50 元
凡购买电子工业出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页者，本社发行部负责调换

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定，在电子工业部教材办的组织与指导下，按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”的精神，大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委员会大专教育学会密切合作，于1986～1995年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作，共出版教材48种，从而较好地解决了全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要以及在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排、在速度上适应市场经济发展形势的需要，在电子工业部教材办的指导下，大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作，从1994年7月起经过两年的努力制定了1996～2000年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践，从师生反映较好的讲义中经学校选报，编委会评选择优推荐或认真遴选主编人，进行约编的。广大编审者，编委和出版社编辑为确保教材质量和如期出版，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，编审与出版工作中的缺点和不足在所难免，望使用学校和广大师生提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会
电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营734厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
南京理工大学
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍钢职工工学院
天津商学院
国营738厂职工大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营761厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营774厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家品大学
河南新乡纺织职工大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学

湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
湖南怀化师范专科学校
汀穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南汀潭机电专科学校
湖南株洲大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学

湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳建筑大学
广东佛山大学
广东韶关大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

前　言

自从本世纪40年代世界上诞生第一台计算机以来，在半个世纪中，科学技术迅猛发展，通信、信息产业和计算机科学日新月异，这无疑是最为令人瞩目的篇章之一。在这样的形势下，大约是70年代初期，离散数学在国外作为一门课程正式列入计算机科学系和一些工程学系的教学计划，许多有关离散数学的著述不断涌现。由于编撰者个人对离散数学的理解和读者群的差异，使很多这方面的著述所包含的内容以及切入的角度也不尽相同。不过，多数作者趋向于将数理逻辑、集合论、图论以及代数系统和布尔代数列为离散数学的基本内容，至少从应用的角度看是如此。

计算机系统（包括硬件系统和软件系统）本质上属于一种有限结构，或称为有限离散结构，而研究离散量及其关系的离散数学正是计算机科学最有效的一种数学工具。

本书是根据中国计算机教育学会大专教育组关于编写“九五”大专计算机专业主干课系列教材的精神编写的。由马叔良主编，李邦荣主审。

我们认为，同一门课程，本科和专科学生都必须学习的话，必然会因为教学计划的制约而在内容上有所侧重，但对离散数学中所涉及的基本概念、术语以及基本理论则同样是重要的，都必须尽可能完整地进行介绍。这些基本概念、术语以及基本理论不仅构成了离散数学的基础，而且对于读者今后学习和阅读计算机学科的专业课程和其他文献都是必备的知识。

对于第一次学习离散数学的读者，可能会稍稍遇到些困难，因为在现实世界中并不总能找到那些基本概念的对应物。因此，只要有可能，我们尽量在介绍完一些抽象的概念之后，马上从正反两面举一些例子来帮助读者加深理解这些概念。另外，为了训练分析和解决离散数学问题的能力，对大多数定理都给出了它们的证明，有些则举出相关的例证，启发读者从中寻找到证明的主要线索，最后，将少量的证明留给读者作为练习。我们希望这样做对提高读者处理离散数学结构的能力和信心有所裨益。

在内容的安排上，我们将集合论放在教程的前面，因为它是图和代数系统的基础知识。至于数理逻辑部分与其他内容联系较少，一般说来，放在最后讲授也不会有什么问题。本教程将数理逻辑安排在绪论之后是出于以下考虑，就是说，尽管它在内容上相对独立一些，但数理逻辑对于训练学生严谨的思维方式和缜密的推理能力是非常有用的。另一个促使我们这样做的理由在于数理逻辑的形式语言和推理理论为以后几章中的逻辑论证，提供了一个良好的环境。

限于本教材的性质，我们割舍了诸如组合学、概率、散列函数、数论初步这些重要的内容。这里提到它们，是因为我们相信其中有些内容读者从中学数学教程中已获得了必要的基本知识，而另一些则提供给那些对离散数学有兴趣，并希望学得更多一些的读者。它们很容易在更高一级的离散数学书籍中查阅到。

无论如何，学习离散数学，除了中学数学知识以外，不需要特别的数学准备。我想，有一个勤奋思维的大脑是最好的基础。所以，对不具备微积分和线性代数知识的读者，只要有兴趣耐着性子读它，本教程一样也可供一般读者了解离散数学的基本内容。

本教程将选材框定在一个尽可能小的合理范围内，不过，即使删除那些标有 * 号的内容，也不致影响教程的完整性。

本教程的第一、三、四、五各章由马叔良执笔，顾豫完成了第二章及第六章的编写工作。初稿承韶关大学李邦荣教授审校，对他提出的很有价值的建议，作者都认真地予以考虑，并作了必要的补充，特此深表谢忱。书中的插图的底图是马谨完成的。本书在编写和出版过程中，还得到俞咏薇副教授和其他许多同仁的帮助，在此一并致谢。

限于编者的水平，书中定有不妥或疏漏之处，诚请广大读者与专家赐教。

编　者

1996 年 6 月

第一章　绪　论

第一节　离散数学的研究对象

“离散数学”是一门相对于“连续数学”而命名的数学分支。学习过数学分析和复变函数的读者都知道，这两门课是以函数为主要研究对象的，那里所讨论的函数是连续变量之间的关系，变量可在一个确定的范围内连续地变化（取值）。而离散数学则是主要讨论离散变量及其关系的数学，一般而言，离散变量取值于一个有限集合或可列元素的集合。

在现实世界里，要用数学方法解决一个具体问题，首先得对这个问题进行分析、综合、归纳，以找出该问题的主要线索，并用一种最适合的数学工具来模拟该问题诸因素之间的联系，这样就形成了最初的所谓“数学模型”。如果一个问题的数学模型是该问题准确的模拟，并且该数学模型是可解的，则问题就归于解决；否则，我们必须重新修改数学模型，直至符合要求为止。现实世界的许多问题，固然可以用连续数学作为工具，诸如用函数来描述，但大量的实际问题需用离散数学的工具来写照。例如在计算机系统（包括系统硬件和系统软件）里，每一个硬件子系统或子系统内的各部件之间均存在一种严格的时序或逻辑关系，对一个软件系统来说也存在类似情况。它们随时间按照一定规律作各种非连续的变化，因此，必须借助于离散数学这个工具来描述它们。事实上，离散数学在计算机系统的逻辑设计中有着重要的应用。至于我们日常可能接触到的如图书检索系统、银行帐户管理系统、教学管理数据库系统等等，无一不是对某一范畴内一定的离散数据及其关系的严谨描述。

总而言之，计算机系统从本质上说是一种离散性的结构。因此，离散数学成为计算机科学和其他有关工程学科的数学工具是毋庸置疑的了。

第二节　离散数学的主要内容

容易理解，任何一本称为离散数学的书都不可能穷尽该数学领域内现今的所有成果。我们也一样，只能选择一些在计算机科学和其他有关工程学科中最为常用的数学专题。它们是数理逻辑、集合论、图论和代数系统。这些知识对计算机科学和其他有关工程学科的学生学习后继专业课是必备的。同时，由于离散数学的各个专题本身和专题之间，有着缜密的系统性和论述上的严谨性，对培养学生严格的抽象思维能力会大有裨益。通过一些典型的例题和大量练习的训练，还将对提高学生自觉地应用离散数学工具解决实际问题的能力有所帮助。

第三节　离散数学的学习方法

离散数学作为计算机等学科的基础数学课程，一方面有其实用性，另一方面有其本身作为数学基础课的严谨的理论性。所以，在学习任何一个专题时，首先要精确严密地掌握好一

些相关的概念或术语，正确地理解它们的内涵和外延。因为概念或术语是以后的公理、定理和公式的基石，只有对概念有了透彻的理解，才能正确地把握公理、定理和公式的精髓，并进而熟练地应用它们来解决实际问题。全面掌握概念或术语的一个好办法是在充分理解概念的内涵后，举出一些属于和不属于该概念外延的正反两方面的例子。如果对最为似是而非的例子也能辨别的话，应该说这个概念已经是属于你自己的了。对一些重要的概念，能记住一二个典型的例子也是一个好主意。因为这反过来对我们牢固地掌握一个概念是很有帮助的。

建议读者不要在基本概念、基本定理和公式尚未透彻理解时就着手做习题，因为那样的话，几乎是不会有所受益的。

归纳起来讲，学习离散数学（实际上学习任何一门理论性很强的课程都一样）要自觉地掌握好每一个基本概念，正确理解建立在这些基本概念之上的基本理论（公理、定理和公式）最后才能学会解决某一类问题的基本方法。唯有如此，我们方可在较好地掌握离散数学各专题中的主干理论的同时，培养自觉将理论运用于实践的本领。

最后必须提醒读者，由于离散数学的研究对象和自身的特点与以往我们熟悉的初等数学和数学分析等课程有所不同，因此我们应当特别留意在这里的一些理论分析和解决问题的方法。虽然，并不要求每位读者对书中所有定理的证明都有透彻的了解，但仔细地阅读那些典型的证明方法和基本的例题却是必需的。

第二章 数理逻辑

通常人们所说的推理这种思维活动，大致可以概括为由表象生成概念，由概念建立判断，而由通常是经过验证或证明为正确的判断，利用一些严格定义了的规则产生新的判断的过程。法律上的推证如是，数学上的证明如是，科学理论中从一组假设推证出某一结论也如是。正确的推理可以得出有效的结论。这里的意思是在正确的前提下引用正确的推理规则必然得出正确的结论；不正确的或不完全正确的前提利用正确的推理规则不可能得到必然正确的结论。所以说，有效的结论必然是经由正确的推理规则得出的；如若再保证用以推理的前提都确实为正确无误的话，我们可以断言推理所得的结论必定也是正确的。

逻辑学是一门研究人类思维规律的学科。由于它在应用上的普遍性。所以上述提及的一般规则，应当被表述成与任一具体的论证或学科的内容无关。这样，就要求建立逻辑学自己的所谓形式语言。它是由完全定义了的概念或术语以及如何使用这些概念的语法组成。事实上，在讨论数理逻辑时，我们总是先花费一些时间建立这种形式语言，最后才在推理理论中讨论它的应用。后来，我们还发现，我们所研究的形式语言有很大的局限性，甚至连一些最简单而又明显是正确的推论形式都无法表达时，于是引入了谓词的概念。这正是本章第九节以后的内容。

为了让定义的形式语言避免二义性，我们使用有明确定义的符号。所以，有时也把数理逻辑称为符号逻辑。在形式语言中引入符号，使我们在分析和应用它的时候，类似于作数学上的处理。这也是数理逻辑区别于一般所谓“形式逻辑”之处。

最后，我们要事先提醒读者注意这样一个明显的困难，即在定义和描述逻辑上绝无二义性的语言时，必须使用一种大家在日常都习惯的语言（譬如汉语、英语等），而后者常称为元语言。这种日常使用的自然语言不乏二义性是众所周知的（您一定知道“双关语”）。因此，用一种不太严格的自然语言来描述一种精确而无二义性的语言，这种困难一开始大家就要充分注意。

第一节 命题和命题的表示法

命题是命题逻辑中的一种基本单位。逻辑学中的形式语言包含一组陈述句，这些陈述句在特别指定范围、时间和空间内具有唯一确定的真假性。这样的陈述句称为命题。由于在命题逻辑中所关注的只是可称为命题的语句，所以本章中“语句”一词与“命题”一词等价地被使用。真的命题具有“真”（或 T，即 TRUE）的真假值；反之，假的命题具有“假”（或 F，亦即 FALSE）的真假值。（真假值 T 和 F 也可以分别用“1”和“0”来表示）一个命题的真假值也可简称为真值。值得提出的是命题客观上具有唯一的真假性与我们的主观感受或是否知道这种真假性无关。例如命题“宇宙中必然还有除人类以外的智慧生物”，其真假目前我们尚未得知，可是其确实具有确定的真假性是毋庸置疑的。另一个值得一提的是命题的真值通常与论及该命题的范围、时间和空间有关，一般这种限制在上下文中已经明确或是约定俗成而无疑问的。例如“101＋1＝110”这个命题，它在二进制计数中是真的，而在其他进制的计数中

是假的。然而，一般在出现该命题的上下文，总可以确定它是在二进制范围内给出的。

由于一个命题可能具有的只是二个真值之一，所以，我们称这种逻辑为二值逻辑。

在形式语言中有两种陈述句，它们本质上都是命题。一种是所谓原子命题，除其本身以外它的任何局部都不是命题。另一种是复合命题，它是由一些原子命题、联结词和某些标点符号（如括号）组合而成的。它们的共同点是都具有确定的真假性。联结词是形式语言中又一种基本语素，将在下一节讨论。一般用大写字母 A，B，…，P，Q，R，…（T 与 F 除外）表示，也可用大写字母加下标表示，如 P_i。例如

P：今天下雪了。

这样，我们就将“P”看成是命题“今天下雪了”的等价物。这种表示命题的符号称为标识符。标识符的另一种作用是为事后可能取代它的某一具体命题保留一个空位，换句话说它的出现向你表示在这个位置上可以用某个命题代替它。这种取代被称为对该标识符的指派。作为标识符的第一种用法，我们称它为命题常量，作后一种用途时，称它为命题变元。显然命题变元本身不是命题，当且仅当它被某一具体命题取代时，它才有确定的真值。不用担心标识符的这两种不同的含义会引起混淆，事实上每当我们使用标识符时，在上下文中必然明白它是作为何种形式出现的。

还有一种常用的表示命题的方法，即以一被圆括号括起的数字表示一个命题。例如上例中的命题也可表示成：

(1) 今天下雪了。

除此以外，我们再举一些例子：

(2) 上海是一个国际大都市。

(3) 2000 年人将踏上火星。

(4) 达尔文创立了进化论。

(5) 你就别去了吧。

(6) 本语句是假的。

(7) 罗马是法国的首都。

(8) 费城是一个古老的城市。

以上 (2)、(4) 及 (7) 都是命题，其中前两个的真值是 T，后一个有 F 的真值；语句 (3) 是命题，尽管目前我们不知道它的真值；语句 (5) 不是命题，它是一个祈使句，无所谓真假；语句 (6) 是悖论，存在一种语义上的自相矛盾。无法确定其真假。因为如果假设它为真，则由该语句本身含义说明它是假的；若设它为假，类似由该语句本身含义说明它又为真。最后，语句 (8) 在世界上某些地方它是真的，而在另一些地方它是假的；语句 (1) 在特定的时间和地点，它有确定的真值。

现在来讨论一个常常被忽视但又十分重要的情况。这就是对象和它的名字。在构造一个语句（或命题）时，通常使用该语句讨论的名字而不是对象本身。如语句

(9) 张红是三好学生。

名词“张红”被用作张红本人这个对象的名字。为了表述命题 (9)，我们绝无必要非得请张红本人亲临现场，而只需用“张红”这两个汉字组成的名字就行了。有时，还要讨论有关一个名字的问题，这时该名字就是讨论的对象，依据构造语句使用对象的名字而不是对象本身的原则，我们应当给名字命名。通常的做法是将该名字用引号括起来。例如命题

(10)“张红”的汉语拼音是 Z-H-A-N-G　H-O-N-G。

这样做的好处是明显的。让人们一看就清楚语句中的拼音文字是对“张红”这个名字（一个名词）而言，而不是对名字为“张红”的本人说的。

也许有人会提出异议，说这样的规定，看上去逻辑上很严密，但是不这样做，把语句(10) 中加于“张红”这个词上的引号去除，谁又会作不同的理解呢？也许在这种情况下是的，可是在别的场合下，不这样区别也许将会产生严重的后果。现在我们转向一些程序设计语言来看一看。那里也存在着与对象和名字相类似的情况。

大家知道在汇编语言中，一条指令大多包含有操作码和操作数二部分。前者规定该指令的功能，后者指明操作的对象。在所谓立即数寻址方式下，操作数是对象本身，即立即数，如

MOV AX，22AOH

可是有时，待操作的数存放于内存某处（譬如相对于隐含段首地址的偏移量地址是 22AOH），这时在指令的操作数位置上给出的就不是操作对象本身，而是它的地址（这个偏移量与隐含段首地址左移四位后相加就得到操作数的物理地址）。因此，必须将这地址用方括号（虽然不是引号）括起来，以示它不是一个立即数。如

MOV AX，[22AOH]

当然，以上两条指令的区别是明显的。

另外，在大多数程序设计语言中，调用一个过程（或函数，或子程序）时，也要严格区别实在参数的名字和它的值。相对于过程的值形式参数，是通过实参的值去调用（赋值调用）的，它只将实参的值传递给相应的过程，而不传递该实参的名字（或地址）。这意味着不能从过程内部改变实参的值，因为过程不知道该实参存放在何处。相对于变形式参数，必须用实参的名字去调用过程（换名调用）。这种调用，可以在过程中修改实在参数的值。一些早期的语言如 IBM 的 FORTRAN H 中，一概从实参的名字进行调用，这种处理方式，有时会引起严重的后果。在此就不再详细讨论了。

第二节　命题联结词

上一节中，我们已经提到过联结词。它是字或短语，是形式语言中的一种基本语素。它本身不是命题，但将它加到一个或两个命题的适当位置上，可产生一个新的命题。自然语言中也用联结词（或、和、…等），可是它们常常带有二义性。如“他有钢笔或圆珠笔”。究竟是说某人同时拥有两种笔呢，抑或只有二者之一呢？这是不明确的。而今我们要严格定义一组联结词，并且把它们符号化。事先说明，以下用到的标识符是作为命题变元使用的，其中每一个标识符均可以在必要时用一个具体的真命题或假命题取代（指派）之。所以，关于对表示变元的标识符所说的那些话可以在此重复一遍。当某个联结词联结两个命题变元时，它并不是一个（复合）命题，当且仅当其中每一个变元均用一个具体命题取代之后，它才成为一个复合命题。正因如此，我们不妨称取代之前的形式为“命题公式”更合适。有关命题公式的概念将在后面严格定义。现在让我们来定义一些常用的联结词。

一、否定

设 P 是一命题，P 的否定也是命题，记为“$\neg P$”，读作“非 P”。$\neg P$ 为真，当且仅当 P 为假。其间关系可以用表 2-1 来表示。

表 2-1 否定的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

作为例子，我们来考虑命题

P：伦敦是一个多雾的城市。

那么$\neg P$表示的命题是

$\neg P$：并非伦敦是一个多雾的城市。

或者可以表述成

$\neg P$：伦敦不是一个多雾的城市。

虽然这两个汉语表示的语句形式上并不完全一致，但它们有完全相同的真假值，因此在我们的形式语言中都用同一符号"$\neg P$"来表示。这恰是用符号表示一语句（命题）可以避免自然语言中的形式多样化和二义性的一个佐证。

应该注意，"否定"虽只修饰一个语句，但仍把它称为联结词。在此意义上"否定"是一个一元运算。说它是运算是因为用它修饰一语句后产生了一个全新的语句。有关"运算"一词的准确概念，将在第五章代数系统中讨论。

二、合取

设 P、Q 是两个命题，P 和 Q 的合取是一个新命题，记为"$P \wedge Q$"，读成"P 与 Q"或"P 且 Q"。当 P 与 Q 均为真时，$P \wedge Q$ 为真，否则它为假。合取用表 2-2 来定义。

表 2-2 合取的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

例 1 构造以下两语句的合取。

P：这房间很大。

Q：2＋2＝4。

解 $P \wedge Q$：这房间很大且 2＋2＝4。

在日常生活中，这样两个语义上无关的语句联结在一起听起来很可笑，但是它完全符合逻辑上的语法规则。事实上，它不仅因袭了上面两个原子语句的真值，且它本身也有确定的真值。这正反映出本章一开始引言中提到的逻辑的形式语言是被表述成与所论述的具体内容

和我们自身的感受无关的这一观点。

有一点要指出的是自然语言中的“与”以及“和”有时是通用的。它们不仅用于联结语句，也用来联结某些同类型的词。要特别注意在后一种情况下使用时，它不是语句的联结词。这时的“与”或者“和”在命题逻辑的形式语言中，没有对应物。所以不能抽除这种词之间的联结词而反过来分解出两个语句来。一种明显的情况是当语句所论述的两个或多个对象（例如主语）中以“与”或者“和”联结的同时，而语句中用于刻画这些对象的谓词描述的是对象间的某种关系，那么这样的联结词往往就不是语句联结词。

考虑语句

R：小张与小王是同学。

这里的“与”不是我们定义的合取。R 只是一个原子命题。

再来考虑一个例子。

A：小张与小王都是三好学生。

若我们另外引入两个语句

B：小张是三好学生。

C：小王是三好学生。

那么，A 语句就可以表示成 B 与 C 的合取：$B\wedge C$（小张是三好学生与小王是三好学生）。

三、析取

设 P、Q 是两个命题，则 P 以及 Q 的析取是一个新的命题。记作“$P\vee Q$”，读成“P 或 Q”。$P\vee Q$ 为假，当且仅当 P 和 Q 均为假。析取的真值表由表 2-3 给出。

表 2-3　析取的真值表

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

命题逻辑中的联结词“或”与自然语言中的“或”有较大的区别。这里符号化以后的“或”称为可兼或。就是说只要以它联结的两语句中有一个是真，析取产生的新语句就是真。可是自然语言中的“或”却有两种含义，有时它与上述的“可兼或”含义相同，有时它的含义又是“不可兼或”。作为后者使用时，由它联结的两语句中恰有一个为真时，生成的新语句方为真。更明确地说，就是两语句均为真或均为假时，联结后的语句都为假（上面这句话中使用的“或”是不可兼或。读者可以想象，要用自然语言准确表述一个确切的意义是多么麻烦!），还是让我们来看一些例子吧。

（1）今天下午 3：00，我在家或在教室里。

（2）今天食堂供应米饭或馒头。

其中语句（1）中的或是不可兼或，而语句（2）中的或是可兼或。为了明确区分这两个不同的联结词，我们可以将不可兼或用符号“$\bar{\vee}$”来表示。其定义用下表给出。

表 2-4　不可兼或的真值表

P	Q	$P\bar{\vee}Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

通常我们不愿定义过多的符号，事实上在后面我们将知道不可兼或可以用已定义的几个联结词等价地替代。

类似于联结词“与”的情况，自然语言中的“或”有时并不是联结词，它只是在表示对象的某一范围时使用。例如语句

（3）电影院里大约有 400 或 500 名观众。该语句中的“或”就不能作为联结词看待。

四、条件

设 P、Q 是两个命题，则 $P\to Q$ 称为条件命题。读作“如果 P，那么 Q”。当 P 为真命题，Q 为假命题时，命题 $P\to Q$ 为假命题。否则，它的真值是真。条件由表 2-5 定义。

表 2-5　条件的真值表

P	Q	$P\to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

语句 $P\to Q$ 中，称语句 P 为前件，Q 为后件。按照条件的定义，只要 P 和 Q 都是命题，则由条件联结的语句必有真值，而与 P 和 Q 的语义无关。换句话说，前件与后件不必有因果关系。

在自然语言中，有多种措辞都适合用符号“$\to$”来翻译成语句 $P\to Q$：

（1）P 是 Q 的充分条件。

（2）Q 是 P 的必要条件。

（3）Q，如果 P。

（4）P，仅当（仅如果）Q。

在表 2-5 中后面两项与我们的预期是吻合的。这就是说前件 P 若为真而且后件 Q 也为真，那么 $P\to Q$ 为真；还有若前件为真而且后件为假，那么 $P\to Q$ 为假。但是表 2-5 中前面两项的定义却时常令人大惑不解。自然语言中，例如语句“如果工具齐全，我们可在今天完成这项工作”，当工具不齐全而我们在今天完成了工作，或者工具不齐全而我们没有完成工作，这两种情况下我们是否应当被指责为违约（上面这个语句是假）还是被看成是守约（上面的语句是真）的呢？这是有争议的。不过为了消除二义性，请记住当一个条件命题的前件为假时，

不论其后件为真、为假，在逻辑里均定义该条件命题为真。有时人们称这是“善意推断”。

现在来举几个例子。

例 1 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上有导数，那么函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上连续。

例 2 你将一事无成，除非你努力。

这个语句与“除非你努力，否则你将一事无成”所表达的含义相同。相同含义的另一句话是“如果你不努力，那么你将一事无成”。若我们作以下形式化：

P：你努力。

Q：你将一事无成。

那么以上三个语义相同的句子统统可以表示成

$$\neg P \rightarrow Q$$

我们再来看两个语句，注意他们的微妙差异。

例 3 我不承认这是事实，除非太阳从西边出。

按照例 2 中的讨论，这一语句也可以表述为“如果太阳不是从西边出，那么我不承认这是事实”。因为该语句的前件为真，所以说此话的人要强调的是后件“我不承认这是事实”——它必为真。表达了一种坚决否定某事的真实性。

例 4 我承认这是事实，除非太阳从西边出。

听上去这和例 3 中第一个语句的含义没有什么不同。可是如果我们遵循了例 3 中的符号化方式，就可以将这里的语句表述为“如果太阳不是从西边出，那么我承认这是事实”。结果我们发现，后一种表述恰恰表达了发言者对某事物是深信不疑的。

从以上两例的讨论中我们看到，在自然语言里被理解为同义的语句，在严格定义的形式语言中是多么不同。从另外一个角度来说，将看上去截然相反的自然语言，翻译成形式语言时，要确定语句的含义从而使之无二义性。

顺便提一下，与例 3 中语句截然相反的语句应当表述为“要我不承认这是事实，除非太阳从西边出”（虽然只是多了一个字“要”）。或者是“除非太阳从西边出，否则我承认这是事实”。有趣的是介于以上两种坚决肯定与否定某一事物之间的一种模棱两可的语句（并非指语句本身的真值是模棱两可的）是“如果太阳从西边出，那么我承认这一事实”。实际上，该语句的前件是假的，所以无论你承认或不承认某一事物都不会影响到语句本身为真这一事实了。辩论者想为自己留一条退路的话，想必应当使用最后这种形式的语句。

条件联结词是我们会遇到的所有联结词中最难驾驭的一个，所以在此多举了几个例子。目的在于引起读者的注意，并且希望读者自己通过更多地举一些例子来掌握它。

看到这里，读者大约已经明白，日常生活中或辩论中双方各执一词争论不休的原因有不少是出自彼此对语言中同一词有不相同的理解。

五、双条件

设 P、Q 是两个命题，$P \rightleftarrows Q$ 称为双条件命题。读成“P 当且仅当 Q”。当 P、Q 的真值同为真或（这是一个不可兼或）同为假时，命题 $P \rightleftarrows Q$ 为真，否则为假。双条件的定义可用表2-6给出。