数学小品译丛

〔美〕R·洪斯贝格尔 著
伍登祥 译

数学瑰宝

第二辑

四川教育出版社

SHU XUE XIAO PIN YI CONG

数学小品译丛

数学瑰宝

第二辑

〔美〕R.洪斯贝格尔 著

伍 登 祥 译

师范大学

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

封面设计：文小华

版面设计：顾求实

数学瑰宝 （第二辑） 数学小品译丛

四川教育出版社出版发行 （成都盐道街三号）
四川省新华书店经销 绵阳新华印刷厂印刷

开本787×960毫米1/32 印张9.375 插页2 字数156千
1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷
印数：1—1345册

ISBN7—5408—0035—6/G·36 定价：3.12元

JY1178/10

作者为中译本写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的四卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情。我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）。

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸，相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情。这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西。

洪斯贝格尔

1983.4.18

前言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的。

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼（Mary P. Dolciani）教授，本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界。

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的。

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，藉以实现她的目的。

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容。预期，各卷都有丰富的习题，很多卷还附有解答。因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料，我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertong

心。

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠。她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然。管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意。

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F.Beckenbach)

序　言

数学里的美妙思想真是多，无论你多么艰辛多么持久地挖掘，数学中令人心花怒放的宝物好象永远也掘不尽挖不完似的。不仅在高级的深奥著作中这些瑰宝才耀眼夺目，就是在那些简单的题材中也显示出鬼斧神工，匠心独运。这册书讲了好几十个初等问题，主要是从1894年到1975年的美国数学月刊里收集来的。这些问题中包含了几十条巧妙构思，其中有二十来条真是令人赏心悦目，美极了。

保尔·厄尔迪什（Paul Erdos）兴了这么一种说法，就是上帝手头有一本书，所有的数学定理和它们的最漂亮的证明都在里面，每当他想赞赏某个定理时，他就说“这个定理是上帝那本书里的！”这里也许可以这么说，本书是从下述观点出发写成的：人生的一切财富都是上帝赐予的，我们应当怀着感恩的心情愉快地收下这份礼物。为了上帝的光荣，为了得到上帝的赞许，我们应分享这份礼物。

具有大学一年级的数学知识就足以读懂这册书的大部分内容了。偶尔也讲到别的内容，即使这

样，所讲的东西也几乎总是初等的。这些内容由于现在的课程表安得太满而无法插进去，不得不延迟到后期才讲。我指的就是匹克(Pick)定理和圆反演的基本理论。如果你没有学过这些知识也不必害怕，因为需要用到它们时，很快就可以学懂的。有关的参考内容在本书正文中要讲到。

本书所讲的大部分问题都曾在著名的数学杂志的问题栏中登载过。每个问题的开头我们都指出来源、提问人、解答人①。在问题流传过程中这些线索逐渐模糊甚至中断了，所以在说某个问题是某个人提出的，或者说某问题是某人解答的时候，或多或少是冒了一点风险说的。写出参考来源主要是指明我碰巧见到这个问题的地方。指明下面一点对有关人士是公平的：我常常只采用了一个问题或解答的某一部分，而且一般来说我都把表述方式完全改写或大大地美化了。对很多问题的叙述方式进行修改，目的是想让它更引人注意。这不是一本出题让你做的书（尽管你先做一下题定会得到更大的乐趣），而是数学奇迹的小橱窗。不过在书末我们还是出了几十道练习题给大家做。

为了帮助读者查找某个具体问题或追溯某个感兴趣的题目，我们把全部问题归成下面三大类附于

①在译文中略去——译者注。

书末：

（Ⅰ）代数，算术，数论，数列，概率。

（Ⅱ）组合论，组合几何（极大与极小）。

（Ⅲ）几何（极大与极小）

在参考文献中用了下列缩写符号：

AMM——美国数学月刊；

MM——数学杂志；

NMM——国家数学杂志(数学杂志的前身)。

我很感谢伊凡·尼文教授，他仔细审阅了手稿，使我能作出许多更正和改进。也感谢我的同事列罗衣·迪基，E.F.贝肯巴赫教授，亨利·阿尔德，雷夫·波阿斯，唐纳·阿尔伯斯，G.L.亚历山大逊，因为他们提出了许多建设性的批评。

罗斯·洪斯贝格尔

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor

一、象棋比赛

假设纽约市的象棋大师比美国其他地方合起来的还多．计划举办一次象棋比赛，全美象棋大师都参加．经商定，举行比赛的地点应当设在使参赛的人走的路程最短的地方．纽约的棋手说，根据这条标准，棋赛地点应选在纽约市．西海岸的棋手们却争辩说，选在参加棋赛的棋手们的重心所在地或其附近更好些．问棋赛究竟该选在何处举行？

解答 纽约棋手的意见是正确的！用N_1，$N_2\cdots$，N_k表示纽约的棋手，其他棋手为O_1，O_2，$\cdots O_t$．因纽约棋手数目过半，故有$k>t$．把棋手们一一配成对(N_1, O_1)，(N_2, O_2)，$\cdots$，(N_t, O_t)后，纽约大师N_{t+1}，N_{t+2}，$\cdots$，N_k不包含在内。

现在来考虑(N_1, O_1)．无论比赛在哪里举行，棋手N_1与O_1必须走的路程之和至少是"N_1O_1"（他们所在的两个城市间的直线距离）．于是，全体棋手走的总路程至少是

$$S=N_1O_1+N_2O_2+\cdots+N_tO_t.$$

如果在纽约比赛，S就是最短路程．如果比赛在别处举行，那么，t对棋手至少必须走一段路程S，而棋手N_{t+1}，N_{t+2}，…，N_k所走路程不再是零，从而增长了总路程．因此，纽约是最佳比赛地点．

J.H.布恰（Butchart）与里奥·毛塞（Leo Moser）在《数学文稿》（Scripta Mathematica），1952，221—236页上写过一篇精彩的文章《请勿使用微积分》（No Calculus Please），考虑了一个类似的问题：

在直线上依次给出了n个点：$x_1, x_2, \cdots, x_n$；试在此直线上求出一点x，使得它与直线上已给各点的距离之和S最小（图1）．

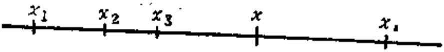

图 1

显然，x_1x与x_nx之和至少必须是x_1x_n．现在"从外向内"将各点配成对，作成区间套（x_1，x_n），（x_2，x_{n-1}），…．如果n是奇数，则点$x_{(n+1)/2}$打单．由于各配对点距离之和在它们之间的任意一点x处达到最小，最内的区间中的一点x使各对之距离同时达到最小值，所以，当n为偶数时，

$$S \geqslant x_1x_n + x_2x_{n-1} + \cdots,$$

无论x在最内区间中的何处，均取等号．当n为奇

数时，将 x 取成（属于最内的区间中的）已知点 $x_{(n+1)/2}$ 即可得到同样的最小值，此时，距离 x $x_{(n+1)/2}$ 等于零。

二、n的有序分解

数3可以用四种方法（要考虑项的次序）表成一个或几个自然数之和：

$$3,\ 1+2,\ 2+1,\ 1+1+1.$$

问数n有多少个这种表示法？

解答 考虑排成一列的n个1．用个数不超过$n-1$的插子插在n个1之间的$n-1$个空格内，这样得到的任一排列都与n的一个表示法相对应，反之亦然．例如

$$1\ 1\,|\,1\ 1\ 1\,|\,1\,|\,1\ 1\ 1\ \cdots 1\ 1$$

$$n=2+3+1+n-6$$

因为在$n-1$个空格的每一个中，既可以插入一个插子，也可以不插，所以共有2^{n-1}个插入插子的方法，因而n就有2^{n-1}种表示法．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor