

〔美〕R·洪斯贝格尔 著
伍登祥 译

数学瑰宝

第二辑

四川教育出版社

SHU XUE XIAO PIN YI CONG

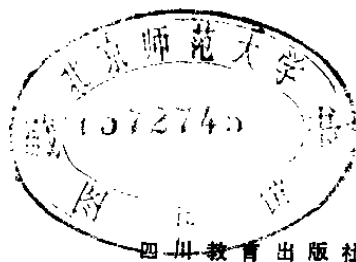
数学小品译丛

数 学 瑰 宝

第 二 辑

〔美〕R. 洪斯贝格尔 著

伍 登 祥 译



四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

封面设计：文小牛

版面设计：顾求实

数学瑰宝 (第二辑)

数学小品译丛

四川教育出版社出版发行

(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销

绵阳新华印刷厂印刷

开本787×960毫米1/32 印张9.375 插页2 字数156千

1990年12月第一版

1990年12月第一次印刷

印数：1—1345册

ISBN7—5408—0035—6/G·36

定价：3.12元

3411178/10

作者为中译本
写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的四卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情。我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）。

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸，相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情。这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西。

洪斯贝格尔

1983.4.18

前 言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的。

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼 (Mary P. Dolciani) 教授，本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界。

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的。

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，籍以实现她的目的。

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容。预期，各卷都有丰富的习题，很多卷还附有解答。因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料，我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻

心。

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠。她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然。管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意。

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F. Beckenbach)

序 言

数学里的美妙思想真是多，无论你多么艰辛多么持久地挖掘，数学中令人心花怒放的宝物好象永远也掘不尽挖不完似的。不仅在高级的深奥著作中这些瑰宝才耀眼夺目，就是在那些简单的题材中也显示出鬼斧神工，匠心独运。这册书讲了好几十个初等问题，主要是从1894年到1975年的美国数学月刊里收集来的。这些问题中包含了几十条巧妙构思，其中有二十来条真是令人赏心悦目，美极了。

保尔·厄尔迪什 (Paul Erdos) 兴了这么一种说法，就是上帝手头有一本书，所有的数学定理和它们的最漂亮的证明都在里面，每当他想赞赏某个定理时，他就说“这个定理是上帝那本书里的！”这里也许可以这么说，本书是从下述观点出发写成的：人生的一切财富都是上帝赐予的，我们应当怀着感恩的心情愉快地收下这份礼物。为了上帝的光荣，为了得到上帝的赞许，我们应分享这份礼物。

具有大学一年级的数学知识就足以读懂这册书的大部分内容了。偶尔也讲到别的内容，即使这

样，所讲的东西也几乎总是初等的。这些内容由于现在的课程表安排得太满而无法插进去，不得不延迟到后期才讲。我指的就是匹克 (Pick) 定理和圆反演的基本理论。如果你没有学过这些知识也不必害怕，因为需要用到它们时，很快就可以学懂的。有关的参考内容在本书正文中要讲到。

本书所讲的大部分问题都曾在著名的数学杂志的问题栏中登载过。每个问题的开头我们都指出来源、提问人、解答人^①。在问题流传过程中这些线索逐渐模糊甚至中断了，所以在说某个问题是某个人提出的，或者说某问题是某人解答的时候，或多或少是冒了一点风险说的。写出参考来源主要是指我碰巧见到这个问题的地方。指明下面一点对有关人士是公平的：我常常只采用了一个问题或解答的某一部分，而且一般来说我都把表述方式完全改写或大大地美化了。对很多问题的叙述方式进行修改，目的是想让它更引人注目。这不是一本出题让你做的书（尽管你先做一下题定会得到更大的乐趣），而是数学奇迹的小橱窗。不过在书末我们还是出了几十道练习题给大家做。

为了帮助读者查找某个具体问题或追溯某个感兴趣的题目，我们把全部问题归成下面三大类附于

^①在译文中略去——译者注。

书末：

(I) 代数，算术，数论，数列，概率。

(I) 组合论，组合几何（极大与极小）。

(II) 几何（极大与极小）

在参考文献中用了下列缩写符号：

AMM——美国数学月刊；

MM——数学杂志；

NMM——国家数学杂志（数学杂志的前身）。

我很感谢伊凡·尼文教授，他仔细审阅了手稿，使我能作出许多更正和改进。也感谢我的同事列罗衣·迪基，E.F. 贝肯巴赫教授，亨利·阿尔德，雷夫·波阿斯，唐纳·阿尔伯斯，G.L. 亚历山大逊，因为他们提出了许多建设性的批评。

罗斯·洪斯贝格尔

目 录

一、象棋比赛	(1)
二、 n 的有序分解	(4)
三、圆内的区域	(5)
四、渡船	(9)
五、鼓半圆	(11)
六、司机问题	(14)
七、屋角的帘子	(17)
八、给平面着色	(20)
九、一个显然的极大值	(22)
十、 $\cos 17x = f(\cos x)$	(24)
十一、正方形内的格点	(25)
十二、不透明正方形	(28)
十三、打叉与画圆	(32)
十四、直角三角形的一个惊奇性质	(33)
十五、 4444^{4444} 的位数	(36)
十六、方程 $6(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$	(38)
十七、关于 k 云	(41)
十八、极小和	(43)
十九、 7^{8888} 的最后三位数	(46)

二十、掷骰子 (一)	(48)
二十一、穿刺立方体	(49)
二十二、二重序列	(51)
二十三、分点圆	(55)
二十四、三角形的边长	(60)
二十五、请勿使用微积分	(61)
二十六、 a^b 与 b^a	(68)
二十七、一则趣味数学题	(70)
二十八、球面上的地图	(72)
二十九、平面上的凸区域	(76)
三十、联立丢番图方程	(82)
三十一、反射切线	(83)
三十二、拆得干净利落的方格棋盘	(85)
三十三、雪球	(90)
三十四、从1到10亿	(92)
三十五、邻接非交叠单位正方形	(93)
三十六、一个丢番图方程	(101)
三十七、斐波那契数列	(104)
三十八、厄尔迪什不等式	(109)
三十九、分格点	(112)
四十、完全数	(115)
四十一、四边形的边	(118)
四十二、算术级数中的素数	(120)
四十三、关于切伐线	(123)

四十四、牛和羊·····	(127)
四十五、平方序列·····	(129)
四十六、内接十边形·····	(130)
四十七、红点与蓝点·····	(134)
四十八、递尔法·····	(137)
四十九、关于 $\pi(n)$ ·····	(139)
五十、定长弦·····	(143)
五十一、内对角线的条数·····	(145)
五十二、掷骰子(二)·····	(148)
五十三、古怪的数列·····	(150)
五十四、长长的相邻自然数串·····	(155)
五十五、最小内接四边形·····	(158)
五十六、三角形数·····	(162)
五十七、关于正 n 边形·····	(171)
五十八、费马数·····	(173)
五十九、一个倒数不等式·····	(177)
六十、完全四次方·····	(178)
六十一、装方块·····	(180)
六十二、红球与绿球·····	(187)
六十三、算术级数中的复合数项·····	(189)
六十四、把等边三角形联结起来·····	(191)
六十五、测验·····	(194)
六十六、托勒密定理的一个应用·····	(196)
六十七、又一个丢番图方程·····	(201)

六十八、复数的一个不寻常的性质·····	(203)
六十九、圆链·····	(205)
七十、完全平方数末尾的重复数字·····	(209)
七十一、一条分角线·····	(211)
七十二、不等式组·····	(213)
七十三、正26边形的一个意想不到的性质···	(214)
七十四、再谈完全平方数·····	(217)
七十五、奇怪的多项式·····	(222)
七十六、形心圆·····	(224)
七十七、容易求出的余式·····	(228)
七十八、3 的一个奇特性质·····	(229)
七十九、正方形内的一个正方形·····	(230)
八十、永远是平方·····	(232)
八十一、将自然数分组·····	(234)
八十二、边长成算术级数的三角形·····	(236)
八十三、通过排列得出的分数·····	(238)
八十四、关于二项式系数·····	(239)
八十五、费马数 F_{73} ·····	(241)
八十六、圆内接四边形·····	(247)
八十七、自然数的特别三数组·····	(249)
八十八、一些素数的和·····	(250)
八十九、又一个古怪的数列·····	(253)
九十、椭圆与格子·····	(260)
九十一、阿基米德三角形·····	(269)
练 习·····	(277)

一、象棋比赛

假设纽约市的象棋大师比美国其他地方合起来的还多。计划举办一次象棋比赛，全美象棋大师都参加。经商定，举行比赛的地点应当设在使参赛的人走的路程最短的地方。纽约的棋手说，根据这条标准，棋赛地点应选在纽约市。西海岸的棋手们却争辩说，选在参加棋赛的棋手们的重心所在地或其附近更好些。问棋赛究竟该选在何处举行？

解答 纽约棋手的意见是正确的！用 $N_1, N_2, \dots, N_k$ 表示纽约的棋手，其他棋手为 $O_1, O_2, \dots, O_t$ 。因纽约棋手数目过半，故有 $k > t$ 。把棋手们一一配成对 $(N_1, O_1), (N_2, O_2), \dots, (N_t, O_t)$ 后，纽约大师 $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$ 不包含在内。

现在来考虑 (N_1, O_1) 。无论比赛在哪里举行，棋手 N_1 与 O_1 必须走的路程之和至少是“ N_1, O_1 ”（他们所在的两个城市间的直线距离）。于是，全体棋手走的总路程至少是

$$S = N_1 O_1 + N_2 O_2 + \dots + N_t O_t.$$

如果在纽约比赛， S 就是最短路程。如果比赛在别处举行，那么， t 对棋手至少必须走一段路程 S ，而棋手 $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_t$ 所走路程不再是零，从而增长了总路程。因此，纽约是最佳比赛地点。

J. H. 布恰 (Butchart) 与里奥·毛塞 (Leo Moser) 在《数学文稿》(Scripta Mathematica), 1952, 221—236页上写过一篇精彩的文章《请勿使用微积分》(No Calculus Please), 考虑了一个类似的问题：

在直线上依次给出了 n 个点： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ；试在此直线上求出一一点 x ，使得它与直线上已给各点的距离之和 S 最小 (图1)。



图 1

显然， x_1x 与 x_nx 之和至少必须是 x_1x_n 。现在“从外向内”将各点配成对，作成区间套 $(x_1, x_n), (x_2, x_{n-1}), \dots$ 。如果 n 是奇数，则点 $x_{(n+1)/2}$ 打单。由于各配对点距离之和在它们之间的任意一点 x 处达到最小，最内的区间中的一点 x 使各对之距离同时达到最小值，所以，当 n 为偶数时，

$$S \geq x_1x_n + x_2x_{n-1} + \dots,$$

无论 x 在最内区间中的何处，均取等号。当 n 为奇

数时，将 x 取成（属于最内的区间中的）已知点 $x_{(n+1)/2}$ 即可得到同样的最小值，此时，距离 $x - x_{(n+1)/2}$ 等于零。

二、 n 的 有序分解

数3可以用四种方法（要考虑项的次序）表成一个或几个自然数之和：

$$3, 1+2, 2+1, 1+1+1.$$

问数 n 有多少个这种表示法？

解答 考虑排成一列的 n 个1. 用个数不超过 $n-1$ 的插子插在 n 个1之间的 $n-1$ 个空格内，这样得到的任一排列都与 n 的一个表示法相对应，反之亦然. 例如

$$1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ \cdots 1\ 1$$

$$n = 2 + 3 + 1 + n - 6$$

因为在 $n-1$ 个空格的每一个中，既可以插入一个插子，也可以不插，所以共有 2^{n-1} 个插入插子的方法，因而 n 就有 2^{n-1} 种表示法.