不定方程浅说

夏圣亭

BU DING FANG CHENG QIAN SHUO

$$x^n+y^n=z^n,\quad x^2-Dy^2=\pm c$$

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=b$$

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

$$3x+2=5y+3=7z+2$$

不定方程浅说

夏 圣 亭

天 津 人 民 出 版 社

不定方程浅说

夏圣亭

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷二厂印刷　天津市新华书店发行

*

开本 787×1092毫米 1/32 印张 6 1/2 字数 130,000

一九八〇年五月第一版

一九八〇年五月第一次印刷

印数 1—100,000

统一书号：13072·5

定价：0.46 元

内容提要

本书从历史上的不定方程问题引入，由浅入深地讲述了二元一次不定方程，一次不定方程组，无零勾股，贝尔方程，一般二元二次不定方程等的整数解，以及不定方程的某些应用。

前　言

不定方程具有悠久的历史，它的发展与整数论密切相关。古今中外不少优秀的数学家对此进行了探讨，直至今日仍是方兴未艾。

在这本书中，运用初等方法和连分数的一些浅近知识来处理二次以下的不定方程。读者只要具备二次方程等初等数学的知识就能阅读。不定方程的研究并不是初等方法所能解决的，如果初学的读者通过阅读本书，能够收到扩大眼界，增强思维能力的效果，并且提高了进一步钻研数学的兴趣，那就是作者最大的希望了。为此目的，书中提供了不少例题和练习题，供读者参考练习，书末附有解答。

由于水平有限，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

作　者

1979年8月

目　录

一、“五家共井”

大家在上初中的时候就学习过代数方程，例如一元一次方程，一元二次方程，二元一次方程组等等，这些方程和方程组一般都是未知数的个数与方程式的个数相等。然而，还有一类方程，这类方程的个数少于未知数的个数，解这类方程往往就比较困难，因为有时有无穷多组解。我们把这一类的方程叫做不定方程。

例如方程 $2x+3y=5$ 有二个未知数，却只有一个方程。在实数范围内，对于变化着的每一个 x 值，可以由关系式：$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ 获得对应的 y 值。这样得出的每一实数对 (x,y) 都是方程的解，因而有无穷组解。

但若把不定方程的解限制在整数或正整数范围内，这样方程的解就具有相对的稳定性。如上面这个不定方程的正整数解就只有 $x=1$，$y=1$ 一组。

一般我们把不定方程的解定义在整数或正整数范围内，下面就此范围介绍一些不定方程的解法。

不定方程已有很悠久的历史，在我国最早的几部数学著作《算经十书》中就有叙述。如《九章算术》中就有这样的题目，现在流传下来的《九章算术》是公元263年刘徽编辑

的，其中“五家共井”一题是我国最古老的不定方程问题之一。题意是这样的：

有五家合用一口井，汲取井水的绳子各家不一样长。井很深，甲家绳子长度的二倍还差一截，差的一截正好等于乙家的绳长。但乙家的绳子放到井里去差得更多，乙家绳长的三倍还差一截，这一截正好等于丙家的绳长。丙家的绳子更短，绳长的四倍还差一截，这一截恰等于丁家的绳长。丁家绳长的五倍还差一截，这一截恰巧等于戊家的绳长。戊家的绳最短，放到井里去，绳长的六倍还差一截，这一截正巧等于甲家的绳长，问井深多少？又各家的绳子长是多少？

这里有六个未知数，却只有五个方程可列。

此外在《算经十书》中的《孙子算经》和《张丘建算经》里也有这类问题的记载，并对解答的方法作了研究，如《孙子算经》卷下所载的“求一术”。《孙子算经》著作年代已无从考查，大约是第三世纪。所载问题是：

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

根据这个题目，如果设物的数目为N，则列出的方程有三个，

$$
\begin{cases}
N=3a+2 \\
N=5b+3 \quad (N.a.b.c\text{都是正整数}) \\
N=7c+2
\end{cases}
$$

四个未知数N，a，b，c，却只有三个方程，是为不定方程。

《孙子算经》上所载的解法是："三三数之剩二，置一百四十。五五数之剩三，置六十三。七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三，以二百十减之即得。"答案是"有物二十三"

《孙子算经》的这种算法曾被编成诗歌在民间广泛流传，诗歌是：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，除百零五便得知。

宋朝时，数学家秦九韶在《孙子算经》的基础上，发明了解这类问题的"大衍求一术"。"孙子算法"和"大衍求一术"不但在我国古代是很有名的，而且流传国外，在世界数学史上有相当的位置，被称为"中国剩余定理"。

我国古代解不定方程问题，除了"大衍求一术"外，还有"百鸡术"。《张丘建算经》卷末有一题：

公鸡一只值钱五。母鸡一只值钱三。小鸡三只值钱一。今有一百钱，买鸡一百只。问公鸡，母鸡，小鸡各买几只？

算经上的解法是从"母鸡每减少七只，就要增加公鸡四只和小鸡三只"出发的。答案很完整，有三组，其一为"公鸡四只，母鸡十八只，小鸡七十八只。"其二为"公鸡八只，母鸡十一只，小鸡八十一只。"其三为"公鸡十二只，母鸡四只，小鸡八十四只。"这是一个凑合相当的算法，称为"百鸡术"。

其后，有许多人对此进行了探讨，并编了不少新题目。清朝时，有个嘉庆皇帝编了一道百牛题：

有银百两，买牛百头。大牛每头十两，小牛每头五两，牛犊子每头半两。问买的一百头牛中大牛、小牛、牛犊子各有几头？

他把这道题交给旁边的一个大臣去做，大臣做来做去做不出，就带回家去，结果被他的儿子解了出来。用的也是凑合相当的办法。

你能知道答案么？那末，这类不定方程问题究竟怎样解才好呢？

二、二元一次不定方程的正整数解

二元一次不定方程可以写成 $Ax \pm By = C$ 的形式（A，B 是正整数、C是整数）。当 x，y 二项的系数A，B不是互质，而是有大于 1 的公约数K时，若 C没有约数K，那末不定方程 $Ax \pm By = C$ 就没有整数解。

证明：如果方程 $Ax \pm By = C$ 有整数解，将方程二边除以K，方程左边必定是整数，而方程右边就成为分数了，这显然是矛盾的。

所以，此时不定方程 $Ax \pm By = C$ 无整数解，也就是不定方程$Ax \pm By = C$ 只有当C也有约数K时才有整数解。

若 C也有公约数 K，我们通过将方程各项除以最大公约数的办法，总可以得到一个 x，y 项的系数不再有大于 1 的公约数的不定方程。

因此，我们将二元一次不定方程归结为 $ax \pm by = c$ 的形式。（这里a，b是互质的正整数，c是整数）

为了说明二元一次不定方程的解法，让我们先来看二道例题。

例 1　求不定方程$5x + 3y = 22$的正整数解。

解法是先用x，y系数中较小的一个 3 去除方程式的各项，并解出 y。得

$$y=\frac{22-5x}{3} \qquad (1)$$

再把 x 项的系数 $-\frac{5}{3}$ 和常数项 $\frac{22}{3}$ 的整数部分和分数部分加以分离,成为 $y=7+\frac{1}{3}-x-\frac{2}{3}x$ 即 $y=7-x+\frac{1-2x}{3}$

由于 x,y 都是整数，$7-x$ 也是整数，故 $\frac{1-2x}{3}$ 也一定是整数。

设 $\frac{1-2x}{3}=K_1$ 则 $3K_1+2x=1$ 即得又一不定方程。（K_1 为整数）

仍按前法用 x,K_1 系数中较小的一个 2 去除方程式的各项，解出 x。得

$$x=\frac{1-3K_1}{2} \qquad (2)$$

分离 K_1 系数 $-\frac{3}{2}$ 的整数部分和分数部分：

$$x=-K_1+\frac{1-K_1}{2}$$

同上 $\frac{1-K_1}{2}$ 必为整数。

设 $\frac{1-K_1}{2}=K_2$（K_2 为整数） 得

$$1-K_1=2K_2 \qquad (3)$$

其中 K_1 的系数为 1，较 K_2 的系数为小。到此就不必再按前法除下去了。

从(3)式解出 $K_1=1-2K_2$代入(2)式和(1)式，得

$$\begin{cases} x=3K_2-1 \\ y=9-5K_2 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数}) \qquad (4)$$

这就是原不定方程整数解的通式。至于正整数解，我们这样来思考：由于$x>0$，$y>0$，也就是

$$\begin{cases} 3K_2-1>0 \\ 9-5K_2>0 \end{cases} \quad \text{解得}\frac{1}{3}<K_2<1\frac{4}{5}$$

而K_2为整数，因此只能取$K_2=1$，代入通式（4）即得原不定方程的唯一正整数解，为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

例 2　求不定方程$5x-14y=11$的正整数解。

解：先用系数中较小的5除方程式各项，并解x。得

$$x=\frac{11+14y}{5} \qquad (1)$$

将y的系数$\frac{14}{5}$和常数项$\frac{11}{5}$的整数部分与分数部分分离成为

$$x=2+2y+\frac{1+4y}{5}$$

因为x，y，$(2+2y)$等都是整数，所以形式上的分数部分$\frac{1+4y}{5}$实质上也必定是整数。

设$\frac{1+4y}{5}=K_1$ 得又一不定方程$5K_1-4y=1$（K_1为整数）。

按前法处理：

$$y=\frac{5K_1-1}{4}=K_1+\frac{K_1-1}{4}\qquad (2)$$

设$\frac{K_1-1}{4}=K_2$ 则$K_1=4K_2+1$（K_2为整数）

代入（2）式和（1）式，即得整数解的通式。

$$\begin{cases}x=14K_2+5\\ y=5K_2+1\end{cases}\qquad (K_2\text{为整数})$$

这里K_2是一个整值参数，对于每一个确定的整数K_2，有(x,y)的一组整数对与之对应，从此再求正整数解。

由于$x>0$，$y>0$故K_2需满足不等式组：

$$\begin{cases}14K_2+5>0\\ 5K_2+1>0\end{cases}\qquad \text{解得}K_2>-\frac{1}{5}$$

取整数$K_2=0，1，2，3\cdots$可得无穷组正整数解，其中最小正整数解(x,y)为（5，1）。

把上面二个例子的解法归纳起来，可以得到解二元一次不定方程$ax\pm by=c$的有效方法。（a,b是互质正整数，c是整数）步骤如下：

（1）先用二未知数的系数a,b中较小的一个去除方程式的各项，解出相应系数较小的一个未知数。

（2）在解出的一未知数表达式中，将另一未知数的系数和常数项分离成整数部分和分数部分。实际上这个分数部分也是整数，设分数部分为K_1，得到又一个不定方程。

（3）继续按（1）（2）所叙的方法处理，并设逐次的分数部分为K_2，$K_3\cdots\cdots K_n$由于相应的不定方程中K的系数一次

比一次小，而原先的a，b互质，所以经过有限次变换，最后不定方程二个未知数中必有一个系数等于1，得到整式

$$K_{n-1}=dK_n+e\ (d，e\text{为整数})$$

式中n代表变换的次数。

（4）将$K_{n-1}=dK_n+e$按顺序倒代上去，解出K_{n-2}，$K_{n-3}\cdots K_2$，K_1，x，y，即得原不定方程整数解的通式。这种通式是原不定方程的一种参数方程。

（5）要求正整数解，可按$x>0$，$y>0$分析整数解通式中K_n的取值范围，从而得正整数解，并推知解的组数有限或无限。

下面四题读者可先自己试试看，然后再对一对书后的解答。

练　　习

（1）求$\frac{x}{3}-3y=1$的正整数解。

（2）求$x=102-9.8y$的正整数解。

（3）求$24x+15y=20$的整数解。

（4）求$5x-14y=-11$整数解的通式。

三、辗转相除法和连分数

前一节提到的二元一次不定方程的解法实际上是将二未知数的系数辗转相除。辗转相除法以及连分数与解不定方程有密切联系。现在我们讲一讲辗转相除法和连分数的概念。

对于二个正整数，先以小的一个数去除大数，后以第一次余数去除小数，再以第二次余数去除第一次余数……如此继续相除叫辗转相除。

设二个正整数a，b辗转相除（$a>b$）

用b除a，商为a_1，余数为K_1，则

$$a=a_1b+K_1 \qquad 0\leqslant K_1<b \qquad (1)$$

当$K_1=0$时，b为a的约数，即b是a和b的最大公约数。

当$K_1\neq 0$时，用K_1除b，商为a_2，余数为K_2，则

$$b=a_2K_1+K_2 \qquad 0\leqslant K_2<K_1 \qquad (2)$$

当$K_2=0$时，K_1是b的约数，由(1)式可知K_1也是a的约数。反过来从(1)式又可知a,b的任一公约数一定是b，K^1的公约数，这就是说K_1是a,b的最大公约数。

当$K_2\neq 0$时，再用K_2除K_1，商为a_3，余数为K_3，即

$$K_1=a_3\cdot K_2+K_3 \qquad 0\leqslant K_3<K_2 \qquad (3)$$

当$K_3=0$时，K_2是K_1的约数，由(1)(2)式可知K_2也是a,b的约数。反过来由(1)(2)式又可知a,b的任一公约数

一定是b，K_1的公约数，b,K_1的任一公约数一定是K_1,K_2的公约数，也就是说K_2是a,b的最大公约数。

当$K_3\neq 0$时，再用K_3除K_2。继续下去，经过n次辗转相除，得商$a_1,a_2,a_3\cdots\cdots a_n$，余数$K_1>K_2>K_3>\cdots\cdots>K_n$，由于余数$K$是逐次减小的非负整数，故经有限次（例如$n$次）辗转相除，最后余数$K_n=0$，即除尽。此时$K_{n-1}$为$a$，$b$的最大公约数，如$a$，$b$互质，则$K_{n-1}=1$。

以上所述就是辗转相除法，为运算方便可采用竖式：

$$
\begin{array}{r|c|l}
a & & \\
\underline{a_1\cdot b} & a_1 & b \\
K_1 & a_2 & \underline{a_2\cdot K_1} \\
\underline{a_3\cdot K_2} & a_3 & K_2 \\
K_3 & \vdots & \vdots \\
\underline{\vdots} & \vdots & K_{n-2} \\
K_{n-1} & a_n & \underline{a_n\cdot K_{n-1}} \\
 & & K_n=0
\end{array}
$$

上面所示的竖式为n是偶数的情况，若n为奇数，竖式的最后部分左右正好相反。竖式中间一列a_1，$a_2\cdots a_n$为商数。

利用辗转相除法很容易求出二个正整数a与b的最大公约数，同时还能将分数$\frac{a}{b}$表示成繁分数的形式。

由于$\frac{a}{b}=a_1+\frac{K_1}{b}$ （见(1)式）

$\frac{b}{K_1}=a_2+\frac{K_2}{K_1}$ （见(2)式）

$\frac{K_1}{K_2}=a_3+\frac{K_3}{K_2}$ （见(3)式）

……