组合数学 ·理论与题解·

编者 王元元 王庆瑞 黄纪麟 李振国 方世昌

上海科学技术文献出版社

组合数学理论与题解

编　者　王元元　王庆瑞　方世昌
　　　　黄纪麟　李振国

上海科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书介绍组合数学基本内容及解题方法。全书共十一章，包括组合学问题解法入门，基本计数问题，二项式系数，包含-排斥原理，递推关系，生成函数，鸽笼原理与 Ramsey 定理，Polya 定理，相异代表系，组合设计，最优化问题。书中给出了有关这些内容的504道习题的详细解答，它包括了计算机专业适用的现行组合数学教材中的所有基本问题。

本书主要适用于计算机科技工作者及计算机专业的研究生、本科生。也可用作组合数学教师的教学参考书，或作为中学教师，其它专业的大专学生和优秀中学生学习组合数学的辅助读物。

组合数学理论与题解

王元元 王庆瑞 黄纪麟 李振国 方世昌 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号）
新华书店经销
昆山亭林印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 16.75 字数 405,000
1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷
印数：1—3,300

ISBN 7-80513-293-3/O·26
定价：8.50元
《科技新书目》181-223

前　　言

组合数学源远流长，但在远古时代这类问题往往联系着数的神秘主义出现，例如：

1．我国《易·系辞上》中说“河出图，洛出书，圣人则之。”，宋朝理学家朱熹在《周易本义》一书中指出，河图为图 0.1 形式所示。用现代术语来说，这不过是一个简单的 3 阶魔方(见本书题 10.3)

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

但二、三千年前却作为祥瑞。

2．据说古代印度婆罗门教寺庙内的僧侣们玩着一种称为“河内宝塔问题”的游戏，他们认为如果一场游戏能玩到结束，就意味着世界末日的来临。游戏的器具是在一块黄铜平板上装三根金钢石细柱，在一根细柱上放有 64 个大小不等环形金盘，大的在下小的在上。问题是若一次只能移动一个盘，并且不允许大盘放在小盘上，如何把这64个金盘从一根柱上全部移到另一根柱上？

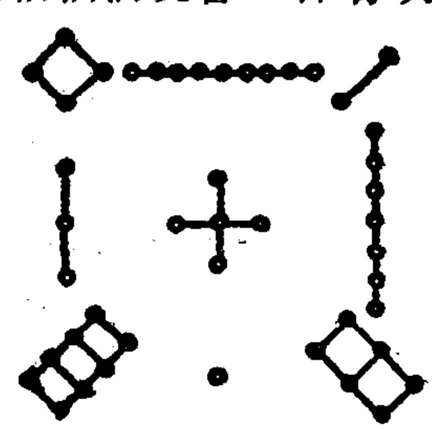


图　0.1

这是一个简单的解递推关系式问题。诚然，一个人若用手工移动，几辈子也完不成，但描述出它的解法过程，现在却是容易的事(见本书题 5.35)。

及至近代，组合数学虽有所发展，但仍以消遣性的数学游戏形式在民间流传，或以智力测验性的形式被一些学者研究。例如：

1．欧洲民间流传着“结婚问题”。说的是某社团中有许多未婚青年妇女和男士，妇女们都渴望结婚，但也不愿随便嫁给任一个人，实际上她们心中都有一张可接收为配偶的男士名单，问该社团中每个青年妇女都嫁给可接受的男士，这可能吗？（即本书第九章相异代表系问题）。

2．1850年，Rev. Thomas 和 P. Kirkman 提出下述“Kirkman 女生问题”：一位女教师带着她的15个女学生散步。女生排成5行，每行3人。所以每个女生有两个同伴。若计划散步7天，使得没有一个女生和她同班同学在同一行中超过一次，这可能吗？（见本书题10.34）。

组合数学被系统地研究，并有惊人的发展是近几十年的事，特别是电子计算机出现以后的事。一方面组合数学中过去需要成年累月才能计算出来的问题，现在借助于计算机1～2分钟就可解决。使得过去仅以游戏形式出现的组合分析技术进入了严肃的理论和应用范围。另一方面，计算机技术广泛应用，面临着复杂繁多的计算任务，使传统的以微积分和微分方程为中心的模拟数学理论鞭长莫及，这促使了离散数学，包括组合数学的迅速发展。现在组合数学已成为一门内容丰富、有自己特色的严谨的科学，并仍在蓬勃发展之中。

组合数学对计算机科学技术人员至关重要，它是计算机科学和工程某些分支的基础，特别和计算机科学理论关系更为密切，我们知道计算机科学的核心是算法研究，而组合算法是算法的主要内容。没有组合数学的基础，就无法深入研究算法和分析算法。此外，组合学的思想和技术也在社会科学、生物学等其

它领域得到日益广泛的应用，就是传统上应用模拟数学的物理和力学范围，许多场合也为组合数学所取代。值得一提的是，组合数学中的许多问题很能推动人们去思索，它们的解法也常常是机智和精巧的，因此，它也是一门提高思维分析能力的极好课程。

本书含有对进入组合数学来说最为基本的概念和方法，和对计算机专业最为需要的组合思想和算法。它们大多环绕着计数问题、存在性问题、组合设计问题和最优化问题给出。组合数学中较高深内容，如组合矩阵论、复杂的区组设计等，没有列入。对原属组合数学范围、现已独立成为一个数学分支的内容，或习惯上已归入其它学科范围的内容，如图论、线性规划等也未列入。

每章都由两部分构成，一是内容提要。纲要性地介绍本章内容，使读者对它们有一个清晰的轮廓。许多重要定理，在题解中都有证明，这样就使得有经验的教师，可利用本书作教材；自学者也可仅应用本书钻研这些内容而毋需其它教材。二是题解及评注。主要介绍解题方法，简短的评注是提请读者注意问题的某些特点及某些事项。全书共十一章，包含504个问题的详细解答。第一章也可在其它各章学完后再读。

本书第一、三、七、九章由王元元编写，第二、四、十、十一章是由王庆瑞编写，第五、六章由黄纪麟编写，第八章由李振国编写。方世昌同志审阅校订了全书内容并参加了部分章节的编写。在本书编写过程中，还得到南京大学张克民教授的指导和帮助，在此表示谢意。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1986年11月于南京

目　　录

第一章　组合学问题解法入门

内容提要

本章是全书的一个导论，旨在对组合学问题求解方法作一点介绍。

1-1　什么是组合学

组合学是数学的一个分支，它研究事物在给定模式下的配置，研究这种配置的存在性，所有可能配置的计数和分类，以及配置的各种性质。组合学在计算机科学中有着极其广泛的应用。

1-2　组合学基本解题方法

组合学问题求解方法层出不穷、千变万化，很难给出一个纲领式的概括。本书将通过大量问题的求解向读者展示组合学的基本解题方法。这些方法大致可以分为两类。一类是从组合学基本概念、基本原理出发解题的所谓常规方法，例如，利用容斥原理、二项式定理、Polya 定理解计数问题；解递推关系式的特征根方法、生成函数方法；解存在性问题的鸽笼原理、相异代表系定理等等。这类方法通常比较容易掌握，读者将在以后各章里分别读到并学会它们，因此本章只提供若干例子作为索引。另一类方法则不同，它们通常与问题所涉及的组合学概念无关，而对多种问题均可使用。例如：

1．数学归纳法。

2．一一对应技术。它的应用是多方面的，在组合学中最常见的是利用它将问题的模式转化为一种已经解决的问题模式。

因此，一一对应技术的此种应用也可称为模式化归方法。

3．数论方法，特别是利用整数的奇偶性、整除性等数论性质进行分析推理的方法。

4．殊途同归方法，即从不同角度讨论计数问题以建立组合等式。

本章将对组合学的这两类基本解题方法给出一些实例作为导引。尤其因后一类方法运用范围甚广，而它们的正确使用又需要一定的技巧，我们将在下文给出较多数目的例题，以期较深刻地揭示这些方法的要领，从而使读者在以后各章问题的阅读中能自如地运用它们。

题解及评注

1.1 证明　有 n 个元素的集合，其子集恰为 2^n 个。

证　对 n 归纳。

当 $n=0$ 时，该集合为一空集，它只有一个子集(自身)，而 $1=2^0$，故命题真。

设 $n=k$ 时命题成立。现证 $n=k+1$ 时命题也成立。先从该集中取出一个元素，例如 a，于是据归纳假设，有 2^k 个不含 a 的子集。我们知道该集的全体子集可以分为两类：一类为不含 a 的子集(已知 2^k 个)，另一类为含 a 的子集。后者也是 2^k 个，因为含 a 的子集与不含 a 的子集是一一对应的(前者中去掉 a 便是后者之一；反之，后者中加进 a 便是前者之一)。因此该集的子集总数应是 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 个。这就是说，命题在 $n=k+1$ 时亦真。根据归纳原理，对一切 n 原命题成立。

评注　这是应用**第一数学归纳法**的一个例子。第一数学归纳法在初等数学中常用于自然数性质的证明，其实它也可用于

其它对象的借助于自然数来刻划的性质的证明(如本例)。更有甚者,可以说它适用于一切"象自然数"的集合,这种集合具有以下性质:集合中有基础元素(或最小元素),而其它元素均可从它出发,相继用同一操作(类似于自然数的后继运算)来生成。

1.2 证明 任何大于1的整数或者自身为一质数,或者可以写作若干个质数的乘积。

证 对整数 n 归纳。

$n=2$ 时它自身为一质数。

设对一切小于 n 大于1的整数命题真,欲证 n 满足本命题。若 n 为一质数,显然真。否则 n 有因子 i, j, 使 $n=i\cdot j$, $1<i$, $j<n$。据归纳假设,i, j 或为质数,或可写成若干质数的乘积,不妨设 $i=i_1\cdot i_2\cdot\cdots\cdot i_l$, $j=j_1\cdot j_2\cdot\cdots\cdot j_h$, 其中 $l\geqslant1$, $h\geqslant1$, 且 $i_1, i_2, \cdots, i_l, j_1, j_2, \cdots, j_h$ 均为质数。因此

$$n=i\cdot j=i_1\cdot i_2\cdot\cdots\cdot i_l\cdot j_1\cdot j_2\cdot\cdots\cdot j_h$$

即 n 可写成若干质数的乘积。命题归纳证得。

评注 本题运用了**第二数学归纳法**,而用第一归纳法就很难如愿以偿。由于第二数学归纳法采用较强的归纳假设,因而应用起来有其独到之处。第二数学归纳法还有更广的适用范围,它适用于一切良序集合。

1.3 下列结论和归纳证明都是错误的,请指出其错误所在。

结论 任何数目(n 个)的一群人都具有相同的身高,进而有结论:所有的人一般高。

证 当 $n=1$ 时结论显然成立。

设任何 $k(k<n)$ 个人均一般高。现证 n 个人也一般高。将 n 个人分成两组 G_1, G_2, 而使其中一人,例如 m 先生,同时在两个组中,且每一组的人数均小于 n, 这是可以做到的(*)。据归纳假设,G_1 中人都同 m 先生一般高,G_2 中人也都同 m 先生一

般高，因此，所有 n 个人都一般高。

解 错误原因是断言(*)对 $n=2$ 时不能成立。

评注 注意，应用归纳法时，不仅基础步骤的证明要正确，并且归纳步骤的证明也要正确，两者缺一不可。特别是在归纳过程中所引用的性质（象本例中的性质(*)）必须对归纳变元(上述 n)的一切可能值(除基础步骤中 n 所取值外)均成立。

***1.4** 求证 $n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}\geqslant(n+1)^n$。

证 我们证明一个更一般的结论：

当 $u\geqslant n\geqslant 3$ 时 $\quad nu^n\geqslant(u+1)^n$

在该结论中命 $u=n$ 便得原命题。把 u 看作任意的，对 n 作归纳。当 $n=3$ 时我们有(注意：此时 $u\geqslant 3$)

$$3u^3=u^3+2u\cdot u^2\geqslant u^3+3u^2+3u+1=(u+1)^3$$

现设 $nu^n\geqslant(u+1)^n$。而

$$\begin{aligned}(n+1)u^{n+1}&=(nu+u)u^n\geqslant(u+1)n\cdot u^n\\&\geqslant(u+1)(u+1)^n\text{(归纳假设)}\\&=(u+1)^{n+1}\end{aligned}$$

归纳完成，原命题得证。

评注 这种归纳证明方法可称为**拆裂法**，因为它的特点是：用新变元将处于两种不同地位的同一变元(本题中处于底数及指数地位的变元 n) 区分开来。这是一种较高级的归纳证明技巧。

归纳法并不限于对一个变元进行，还可以对多个变元联列归纳，例如，欲证性质 $P(m, n)$ 对一切自然数 m, n 成立，那么只需证明

(1) $P(1, 1)$ 成立。

(2) 若 $P(m-1, n)$，$P(m, n-1)$ 成立，则 $P(m, n)$ 成立。

1.5 有 101 个人参加乒乓球淘汰赛(每一轮比赛在参加人

数是奇数时，让一人轮空），共需进行多少场比赛方可决出优胜者（一场比赛指两人的一次对垒）。

解 由于一场比赛对应一个被淘汰者，并且反之也真，那么比赛场数与被汰者人数应当是相等的。由于优胜者只有一人，全部被淘汰者是100人，因此要进行100场比赛方可决出优胜者。

评注 本题使用了一一对应技术。若不用这一技术，而对每轮比赛的场数逐步进行计算，其笨拙是可以想象的：第一轮赛50场，赛后留下50名优胜者和一名轮空者；第二轮赛25场，赛后留下25名优胜者和一名轮空者；第三轮赛13场；第四轮赛6场；第五轮赛3场；第六轮赛2场，第七轮赛1场，共计

$$50+25+13+6+3+2+1=100(\text{场})$$

下面题1.6～1.11都是一一对应技术应用的例题。在这些例题中，一一对应技术都用于模式化归。

1.6 将八个“车”放在8×8的国际象棋棋盘上，如果它们两两均不能“互吃”，那么称八个车处于一个“安全状态”。问共有多少种不同的安全状态。

解 八个车处于安全状态当且仅当它们处在不同的八行和八列上。我们可以用1，2，3，4，5，6，7，8的一个排列a_1，a_2，…，a_8对应于一个安全状态，使a_i表示第i行的第a_i格上放置一个车。这种对应显然是一一的，因此安全状态的总数恰等于这八个数的排列总数$8!=40320$。

评注 本题当然可以用乘法原则直接求解，即第一行车有8种放置方式，第二行则有7种，……，而最后一行只有一种放法。因此放置成安全状态的放法共计$8\cdot7\cdot\cdots\cdot1=40320$种。这里使用一一对应来解这么个简单的问题，目的在于介绍模式化归的意义和方式。

1.7 从 k 个元素 $1, 2, \cdots, k$ 中取 r 个元素，允许各个元素重复选取。证明共有 $C(k-1+r, r)$ $\left(即\binom{k-1+r}{r}\right)$种不同的选取样本。

证 设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是取自 $1, 2, \cdots, k$ 的一种选取样本，并设$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$。令

$$b_i = a_i + i - 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

从而 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3 + 2, \cdots, b_r = a_r + r - 1$。显然

$$1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant k + r - 1$$

即 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是取自 $k+r-1$ 个元素 $1, 2, \cdots, k, k+1, \cdots, k+r-1$ 的一个样本。反之，对任一这样的选取样本 $b_1, b_2, \cdots, b_r$，总可作出取自 $1, 2, \cdots, k$ 的一个选取样本 $a_1 = b_1, a_2 = b_2 - 1, \cdots, a_r = b_r - r + 1$。这就说，两种选取方式的选取样本是一一对应的，也就是说，从 k 个元素里允许重复地选取 r 个元素的选取样本总数等同于从 $k+r-1$ 个元素里选取 r 个不同元素的选取样本总数 $C(k+r-1, r)$。

评注 这是重复组合计数公式的一种推导方法。由于用了一一对应的技术，推导显得简明优美。其它推导方法见第二章。

1.8 设集合 A 有 n 个元素，证明集合 A 上的偏函数（即部分函数）共计$(n+1)^n$个。

证 我们知道集合 A 到集合 B 的函数（全函数）个数是 $|B|^{|A|}$（建议读者证明这个结论，这里$|A|$，$|B|$表示集合 A，B 中元素的个数）。现设

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\},\ B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b\}$$

以下建立 A 上偏函数与 A 到 B 的函数之间的一一对应。

对任一 A 上偏函数 f，定义函数 $g: A \to B$，有

$$\begin{cases} g(x)=f(x), & \text{当 } f(x) \text{ 有定义时} \\ g(x)=b, & \text{当 } f(x) \text{ 没有定义时} \end{cases}$$

反之，对任一函数 $g: A\to B$，定义 A 上偏函数 f，

$$\begin{cases} f(x)=g(x), & \text{当 } g(x)\neq b \text{ 时} \\ f(x) \text{ 无定义}, & \text{当 } g(x)=b \text{ 时} \end{cases}$$

不难理解，对应是一一的，因此 A 上偏函数的个数等于 A 到 B 的函数个数，即 $|B|^{|A|}=(n+1)^n$ 个。

评注 利用本题的术语，题 1.4 可以表述为一个典型的组合学命题。若集合 A，B 满足：$|A|=n$，$|B|=n+1$，$n\geqslant 3$，那么 A 上偏函数的个数不多于从集合 B 到集合 A 的函数(即以 B 为定义域，A 的子集为值域的函数)个数。因为据本题结论，A 上偏函数的个数恰等于从集合 A 到集合 B 的函数个数。

1.9 称$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$为正整数 n 的一个**剖分**，如果$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数，$n=m_1+m_2+\cdots+m_k$ 并且 $n\geqslant m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$。这里，$m_i$ 称为剖分中的一项，k 称为剖分的**项数**。不同剖分的个数称为**剖分数**。

(1) 证明：把 n 分拆成不多于 k 项的剖分数，等于把 n 分拆成最大项不大于 k 的剖分数。

(2) 证明：把 n 分拆成最大项为 k 的剖分数等于把 n 分拆成 k 项的剖分数。

证 (1) 显然每一项数不多于 k 的 n 的剖分，对应于一个形如图 1.1 的图象，当我们将该图象翻转成图 1.2 中的图象时，它表示另一个剖分。不难看出，这后一剖分的每一 m_i（即图象中每一行的方格数）都不大于 k，因为原剖分项数不大于 k，而该项数是后一剖分的最大项。反之，给定各项 $m_i\leqslant k$ 的剖分，可作出形如图 1.2中的图象，若将它翻转成图 1.1 中的形式，便可得到一个相应的项数不多于 k 的剖分。上述对应的一一性是直观

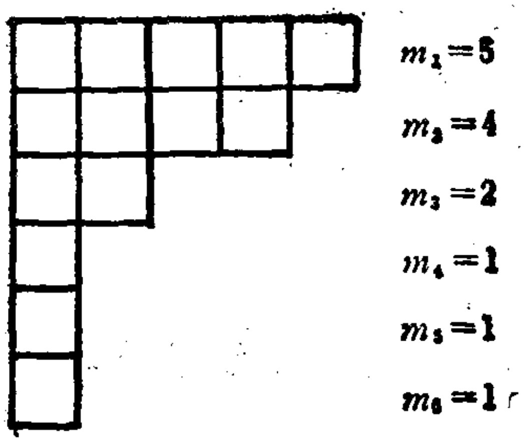


图 1.1

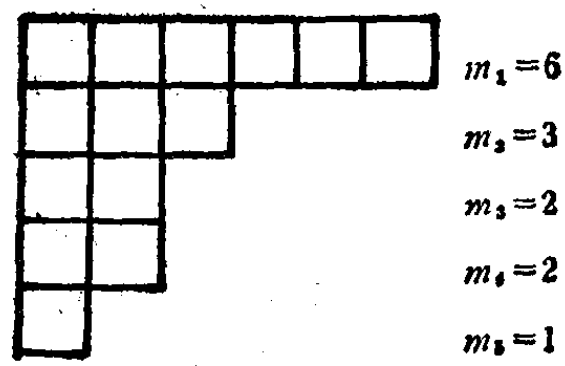


图 1.2

的，因此命题(1)得证。

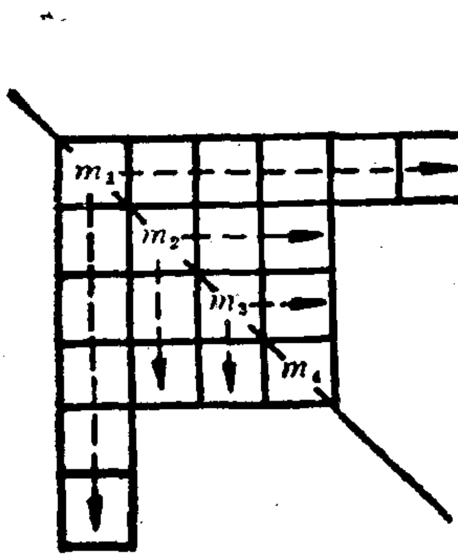
(2) 当剖分满足 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0$ 时，它所对应的图象必定恰有 k 行，因而翻转后的图象的第一行恰有 k 格，翻转后的图象对应于 $m_1=k$ 的一个剖分，且其它各项小于 k。反之，一个 $m_1=k$ 的剖分所对应的图象的第一行必有 k 格，那么该图翻转后便是一个恰有 k 行的图象，它对应于一个 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 均非零的有 k 项的剖分。命题(2)得证。

评注 上述图象称为 **Ferrer 图象**。

1.10 我们把一些剖分称为是**自共轭的**，如果它们的 Ferrer 图象翻转后所对应的剖分与原剖分相同。证明自共轭的剖分个数等于限定诸 m_i 均不等且均为奇数的剖分数。

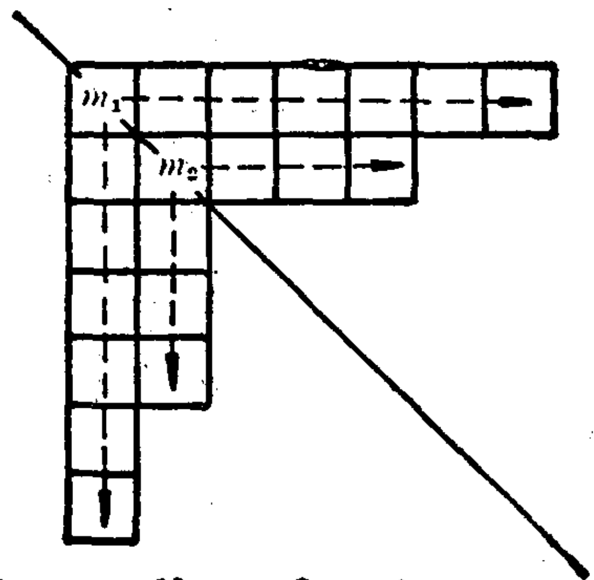
证 很明显，一个剖分是自共轭的当且仅当它的 Ferrer 图象是关于对角线对称的，如图 1.3 所示。给定一自共轭剖分的 Ferrer 图象，可如下构作唯一的各项不等且均为奇数的剖分：取 m_1 为第一层方格数，m_2 为第二层方格数，如此等等(每层方格数是横向方格数加上竖向方格数减 1，参阅图 1.3，那里 $m_1=11$, $m_2=5$, $m_3=3$, $m_4=1$)。反之，给定各项均不等且均为奇数的剖分(例如 $m_1=13$, $m_2=7$)，可用诸 m_i 构成各个层次的方格，由于 m_i 均为奇数，可使各层的横向方格数等于竖向方格

数$\left(\dfrac{m_i+1}{2}\right)$。又由于 m_i 递减，可使各层自上而下迭合构成 Ferrer 图象(参阅图 1.4)，因而所得图象是关于对角线对称的，从而对应于一个自共轭的剖分。这里建立的一一对应证明了本命题的结论。



$m_1=11$，$m_2=5$，$m_3=3$，$m_4=1$，$n=20$

图 1.3



$m_1=13$，$m_2=7$，$n=20$

图 1.4

评注 剖分问题在第六章中将得到更加详尽的讨论。

***1.11** 一个售货亭前排着 $2n$ 个人的队伍等候购物，假定他们都购买价值五分的同一货物。其中 n 个人持 5 分货币，n 个人持一角货币，而售货员开始发售货物时没有零钱。问有多少种排队方式，可使得售货员能依次顺利出售货物，而不出现找不出钱的尴尬局面。

解 依照一一对应的观点，本问题等价于下列问题：

用 n 个 0 和 n 个 1 排成一列，有多少种排列方式，能使这种 0, 1 序列的任意前 i 个$(1\leqslant i\leqslant 2n)$数字中 0 的个数总不少于 1 的个数(我们称序列的这一性质为前束性质)。

再用一一对应的观点将问题转化为图 1.5 中从(0, 0) 点到