怎样解数学题

刘远图　黄建生　范振惠　编译

地质出版社

怎样解数学题?

刘远图　黄建生　范振蕙　编译

地质出版社

1981·北京

怎样解数学题？

刘远图　黄建生　范振蕙　编译

*

地质部书刊编辑室编辑

责任编辑：唐静轩

地 质 出 版 社 出 版

（北京西四）

张家口地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32　印张：143/8　字数：375,000字

1982年6月北京第一版　1982年6月　第一次印刷

印数：1—72,700 册　定价：1.30元

统一书号：7038·新 29

编 译 者 的 话

本书是一本探讨初等数学解题方法的书.

近年来，国内出版了许多数学习题集和题解书籍，但是摆在我们面前的这一本《怎样解数学题？》，具有其独特的风格和鲜明的特点. 它注重分析题意，启发思路，探索解法，以期使读者能循序前进，逐步掌握解答初等数学习题的一般思想方法，提高解题的技能和技巧. 本书中具体地运用了美国著名数学教育家G·坡里亚《怎样解题？》一书中提出的解题思考方法和原则. 举例典型，数量不多，但类型齐全，各具特点. 同时它的内容同我国现在中学数学的教学内容基本一致. 因此，本书不仅可以作为我国高中学生和广大数学爱好者学习数学的一本良好的参考书，而且也是中学数学教师的一本有益的教学参考书.

本书共分四部分：代数，三角，几何（包括平面几何和立体几何），平面解析几何. 前三部分是根据苏联C·И·杜曼诺夫编的《怎样解数学题？》由刘远图同志译出的. 平面解析几何部分是由黄建生和范振蕙同志根据多年从事中学数学教学的经验，并按照我国中学平面解析几何部分的要求增写的. 增写这一部分时，尽可能注意保持原书的风格和体例.

由于时间仓促，且限于水平，错误和不妥之处在所难免，希望读者批评指正.

1981年9月

致 读 者

本书通过例题讨论和研究解答各种数学问题的途径和方法．因此，在本书中将看到，怎样求出一个问题的解答，需要经过怎样的过程才能找到这个解答．同时，在本书某些部分还将看到解题方法的指导，这在某种程度上对于一般解数学题都是有益的．

本书中附有一些习题，供读者练习．这些习题均用小号字排印．

对于解答代数、几何和三角方面较难的题目来说，本书也许会帮助读者获得更大的独立性和更多的创造性．

自然，你可能会想，这本书里会给出一种可靠的方法，用它一定能猜想到任何问题的解题途径．这种方法现在没有，而且也不可能有．解难题，这是一个极其复杂的过程．任何方法论指导书都不可能详细讨论这种过程的各个方面的种种情况．任何指导性意见都不会是完全适用的，而只能是原则性的意见．因此，对于解难题来说，除了理论以外，还需要方法方面的指导，以及推想和创造性．

下面几点建议，对于解题通常是有益的，提出来供读者参考．

1．首先必须仔细研究题意，直至完全理解为止．对问题的条件和应当达到的目的没有完全理解以前，不要匆匆忙忙动手解题．在动手解题以前，你应当会回答下面的问题：已知什么？问题的条件是什么？需要求什么或者需要证明什么？

当问题已经弄得很清楚而且已经牢牢记住的时候，才能开始去解题．要解题，就应当满怀信心，而且准备作出必要的不屈不挠的努力．

2．如果问题和某种几何图形有联系，那么就应当作图，同时用最恰当和最方便的符号，尽可能将已知数据和要求的数在图上标示出来．应当记住，错误的或者不准确的图，有时会引导你走向错误的道路，而得出不正确的结论．如果第一次作的图有些不

理想，应当仔细想好了以后重新再画一张．

但是，必须知道，解题过程中作出结论的根据不是图形，而是逻辑联系．因此，不允许用任何图形（甚至很准确的图形）代替问题的解答．

在某些情况下，解答非几何问题时，用图作为直观的手段是有益的．

3．解题时，必须检查每一步计算和每一个图形．要记住，你应当会证明你完成的每一步是否正确．

4．在解题过程中，应当注意检查一次，是不是所有条件或已知数据都已经得到应用．

5．解题时，如果你不能继续作下去，而且不知道进一步应当做什么，你应当将已经得到的同应当得到的作一番比较．在多数情况下，这样作一次比较以后，就足以发现进一步演算的正确途径．

6．我们还要注意事实上很少出现的一种情况．你会想到有这种情况：由于出题的错误，甚至有时故意要你证明一个错误的命题，但是事先又没有告诉你这是错误的命题．当然，这种题实际没有意义，也不可能有解．如果你发现命题是错误的，而去证明它为什么错了，那么证明这个问题的结果，是问题根本不存在解，这就是说，对于这个错题，你给予了正确的回答，也就是解对了．但是，如果你没有发现命题是错误的，而动手去证明，那么再努力也不可能达到目的．但是，这种努力也不见得就是白费力气，因为在这个过程中你可能发现命题是错误的．举一个例子．

假如要求证明：当字母 a 和 b 取任意正值时，不等式$10(a+b)>ab$成立．

在着手证明这个命题以前，我们来看看这个命题是不是对呢？例如，取 $a=10$，$b=10$，得出不等式成立，而取 $a=100$，$b=100$，不等式左边得2000，右边得10000，也就是说，我们发现这个命题是错误的．

现在假设我们并没有发现命题是错误的．如果我们力求证明这个结论，而且毫不怀疑它是错误的，那么我们自然要将不等式

$10(a+b)>ab$ 变形．例如变形为$10\cdot\frac{a+b}{ab}>1$，即$10\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)>1$．但是这里我们马上就会发现，当字母$a$和$b$取充分大的值时，分式$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$将变成十分接近于零的数．于是，数$10\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$也将十分接近于零，当然要小于1．这样就证明了所给命题是错误的．

请你想想看，下面的命题对还是不对？

“当n是任意自然数时，n^2+n+41的值是质数”（参看第16页）．

只能被1和它本身整除的数（不包括1），叫做质数．质数的序列是：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97，…．

7．再举一个问题的条件不够而无法求解的例子．

问题．一汽艇顺流而下，由A到B行驶距离为10公里，再逆流而上，由B到A，往返共花一个小时．如果汽艇本身的速度不变，在静水的湖面上行驶20公里需要多少时间？

要找出这个问题的答案，必须知道汽艇本身的速度．

设汽艇本身的速度为v公里/小时，水流速度为h公里/小时．那么根据题设条件有$\frac{10}{v+h}+\frac{10}{v-h}=1$．于是，$v^2-20v-h^2=0$，即$v=10\pm\sqrt{100+h^2}$．汽艇的速度不能是负的，所以，$v=10+\sqrt{100+h^2}$．从这个式子可以看出，由于水流速度不知道，所以不可能确定汽艇本身的速度．因此，解这个题的已知条件不够．

8．关于数学问题，再作几点一般的说明．有的题在求解时，只须运用合理的思维去作逻辑的讨论就行了．但也有一些题，单作逻辑的讨论还解不出来，还必须推想和创造性．

有一些由世界著名的大数学家提出的问题，至今尚未解决．而且这样的题往往显得很简单，就连六年级的学生也能理解题意．下面举几个例子．

1）一个很久没有解决的问题是关于完全数的问题．首先说明什么叫做“完全数”．一个自然数，如果它等于它的所有因数（包括1，但不包括这个数本身）的和，这个自然数就叫做完全数．例如，6和28就是完全数，因为$6=1+2+3$，$28=1+2+4+7+14$．已经证明这样一个事实：对于使得$2^{n+1}-1$是质数的n值来说，数$N=(2^{n+1}-1)\cdot 2^n$一定是完全数．但是到目前为止，还没有人知道哪一个奇数是完全数．这个问题至今尚未得到解决．

2）到目前为止，在三个多世纪当中，既没有人证明，也没有人推翻所谓大费马定理．这个定理叙述如下：“当自然数$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$在自然数范围里无解．”（当$n=2$时，方程有解，例如$x=3$，$y=4$，$z=5$，或者$x=5$，$y=12$，$z=13$）．对于n等于3到100各自然数的情况，德国数学家库密尔（1810～1893）和他的学生曾经证明了费马的结论．

3）世界上最著名的数学家从事研究的其他最难的数学问题当中，特别引人注目的是欧拉-哥德巴赫*问题．这个问题叙述如下：“任何大于2的偶数，都等于两个质数的和．”

举例说明如下：

$$4=2+2,$$
$$6=3+3,$$
$$8=3+5,$$
$$10=3+7=5+5,$$
$$12=5+7,$$
$$14=3+11=7+7,$$
$$\cdots\cdots$$
$$40=3+37=11+29=17+23.$$

---

* 欧拉（1707～1783），大数学家，彼得堡科学院院士．

哥德巴赫（1690～1764），数学家，也是彼得堡科学院院士．

在很长一段时间里，没有找到研究这个问题的任何途径．有的数学家曾经想用举例验证结论的办法得出矛盾的情况，但是毫无结果．经过仔细地研究欧拉-哥德巴赫问题以后，在二十世纪初，对于这个问题能不能解，出现了悲观的论点．二十世纪初期著名的数论专家之一兰道，在1912年召开的国际数学会议上说过下面一句话："欧拉-哥德巴赫问题超出现代数学家的能力．"但是，1937年苏联科学院院士维诺格拉多夫，对于所有相当大的数（即对于所有大于$3^{3^{16}}$的数）的情形证明了这个问题．这样一来，欧拉-哥德巴赫问题只剩下有限种情况没有得到证明．但是，$3^{3^{16}}$虽然是有限数，但却非常之大，要对这么多种情况检验问题的结论是否成立，实际上根本不可能做到．关于$3^{3^{16}}$这个数有多大，我们可以形象地用银河系中物质的原子数同它作比较，它比这原子数还要大得不知道有多少倍．尽管如此，维诺格拉多夫的成就，国内外一致认为是本世纪上半世纪在数论方面最重大的成就之一．*

上面提到的欧拉-哥德巴赫问题、完全数问题、大费马问题，都属于数论方面的问题．初看也许会认为，数论方面的问题仅仅具有理论方面的意义，而对于实际没有什么用处．但是，对于数论的这种看法是极其错误的．现在，数论的方法和结果，在编制抗干扰电码，研究密码，概率论的研究，织布生产，以及解决其他许多实际问题当中，都有应用．

这些问题是很早以前就提出的，但至今仍未得到解决．另外，还有许多问题，经过几百年、甚至几千年都未曾解决，但最后还是解决了．下面举几个例子．

1）用圆规和直尺作一个正方形，使它的面积等于已知圆的问题（化圆为方问题），三等分一任意角的问题（三等分角问题），在四千年当中，一直没有得到解决．致力于解这个题的任何

---

* 我国数学家陈景润对哥德巴赫问题的研究，取得了更新的成果．他证明了：每一个充分大的偶数都是一个素数与一个素因数个数不超过2的殆素数之和．[参见《科学通报》，17(1966)；《中国科学》，2(1973)．]——译者注

尝试，都没有取得结果．最后，于1837年，法国数学家万泽尔证明用圆规和直尺不可能三等分一任意角．1887年，德国数学家林德曼证明π（圆周对直径的长度比）是超越数，就是说，π不满足任何整系数代数方程．这样也就证明了不能用圆规和直尺作正方形，使它的面积等于已知圆．这样一来，古希腊数学提出的两个古典问题，直到十九世纪才得到解决．

2）一般形式的三次和四次方程，直到十六世纪才被意大利数学家卡当、塔尔塔利亚、费尔拉里等解决．

3）高于四次的方程，直到十九世纪挪威数学家阿贝尔和法国年青的数学家伽罗华才证明这种方程不能求出一般形式的解．

4）在1900年召开的国际数学大会上，二十世纪最著名的数学家之一希尔伯特提出了二十三个数学问题．到目前为止，大部分问题已经解决．同时，其中许多问题的解答是由苏联数学家柯尔莫柯洛夫、格里芳德、彭特里亚根和阿尔诺里德提出的．

最后，我们还要就怎样使用这本参考书作一些说明．每次读完本书中已经作出解答的题目以后，不要马上就去看“解法分析和解”．首先，哪怕用几分钟试一试能不能独立想出解题的步骤．如果你觉得实在做不到，那就去看一看书中讲的解法分析和解答本身，并且作出研究．

掌握了问题的解法以后，一定要想一想，为什么你不能独立地作出解答：是因为你忘记了必要的定理和公式，还是因为对题意理解得太肤浅或者根本就没有看懂，还是因为认为自己解不了这个题就不想动手解题，最后也可能是由于没有一定的毅力坚持作下去．如果你每一次都能正确地回答这个问题，你就会在某种程度上提高独立解题的技能．

你回想一下过去在作题时是不是有这种情况，当你知道问题（或定理的证明）的正确解答以后，你仍然感到不满意，因而向自己提出这样的问题：“怎样找到或者发现这个解（或者证明）呢？找这个解（或者证明）的过程是怎样的呢？”对于每一个善于思考问题和勤奋学习数学的读者来说，提出这样的问题是完全

自然而且合理的.因为这样的读者渴望着学会独立地解题的技能.

基于这些理由，本书特别注意解法的分析. 学习这些分析不要被动地学，而要积极地、有批判地学；每次都应当提出问题：你能不能用别的方法解这个题，甚至用更好的方法解这个题呢？掌握了解法分析和解法以后，应当努力分清这一部分哪些东西对你来说是新的而且是应当学会的，然后一一记住. 在解答供练习用的题目时，你可以检验和巩固已经获得的经验.

“伟大的科学发现可以解决重大的问题，但是在解答任何一个问题时都包含着发现的颗粒. 你解答的也许是很普通的题目，但是如果它能唤起你求知的欲望，驱使你去创造，如果题目又是你自己解出来的，你就会经历从事发现所必需的智力的紧张，同时体验到胜利的欢乐. ”（坡里亚：《怎样解题？》俄文版第 5 页）

本书中的题目，大部分是苏联各高等学校入学试题和数学竞赛题.有些题引自各种杂志.

目　录

致读者
第一部分　代数……1
代数知识简述……1
§1．　整数方程……18
§2．　多项式因式分解……28
§3．　无条件等式和条件等式……39
§4．　一元方程……52
§5．　方程组……71
§6．　求和问题……82
§7．　不等式……94
§8．　复数……115
§9．　求变量（函数）的最大值和最小值的问题……129
§10．　整除性问题……152
§11．　与“数的整数部分”的概念有关的问题……166
§12．　参数消去法……182
§13．　列方程的问题……185
§14．　杂题……194

第二部分　三角……205
三角知识简述……205
§1．　三角方程……210
§2．　三角不等式……218
§3．　与反三角函数有关的问题……224
§4．　杂题……229

第三部分　几何……242
平面几何知识简述……242

§1. 证明题……244
§2. 计算题……263
§3. 作图题……276
立体几何知识简述……283
§4. 不用三角求解的问题……289
§5. 用三角求解的问题……301

第四部分 平面解析几何……312
§1. 直线……312
§2. 圆锥曲线……329
§3. 极坐标与参数方程……366
§4. 求轨迹方程……391
答案和提示……422

第一部分 代 数

代数知识简述

1.任一有理数都可以写成$\frac{p}{q}$的形式，其中p和q是互质的整数，且$q \neq 0$.当$p=0$，而q不等于零时，如前所述，$\frac{p}{q}$表示有理数零.

2.正数的代数平方根有两个值，一个是正值，另一个是负值.代数平方根用符号$\pm\sqrt{a}$表示.设a是正数，通常把$\sqrt{a}$只看作是正数.正数的方根的正值，叫做这个方根的算术根.如果$a>0$，则$\sqrt{a^2}=a$.如果$a<0$，则$\sqrt{a^2}=-a$.如果$a=0$，则$\sqrt{a}=0$.不管a取什么值，有$\sqrt{a^2}=|a|$.

如果$a \geqslant b$，则$\sqrt{(a-b)^2}=a-b$.如果$a<b$，则$\sqrt{(a-b)^2}=b-a$.不管什么条件下，总有$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$.

3.关于二次三项式.

1）从二次三项式中分出一个线性函数的完全平方(配方)：

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.\end{aligned}$$

2）关于二次三项式的最大值和最小值.如果$a>0$，则二

次三项式ax^2+bx+c没有最大值，但当$x=-\frac{b}{2a}$时，有最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.如果$a<0$，则二次三项式ax^2+bx+c没有最小值，但当$x=-\frac{b}{2a}$时，有最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3）关于函数$y=ax^2+bx+c$的图象. 这个函数的图象是抛物线，顶点是$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.如果$a>0$，双曲线向上伸展；如果$a<0$，则向下伸展. 双曲线的对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$.

4）关于不等式$ax^2+bx+c>0$.如果$a>0$，且$4ac-b^2>0$，则对于任何x值，不等式$ax^2+bx+c>0$一定成立（参看图1上函数$y=ax^2+bx+c$的图象）.如果$a<0$，且$4ac-b^2>0$，

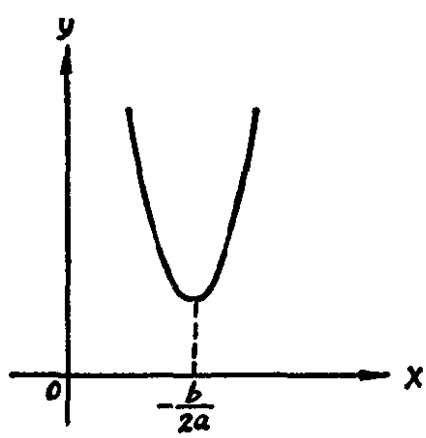

图 1

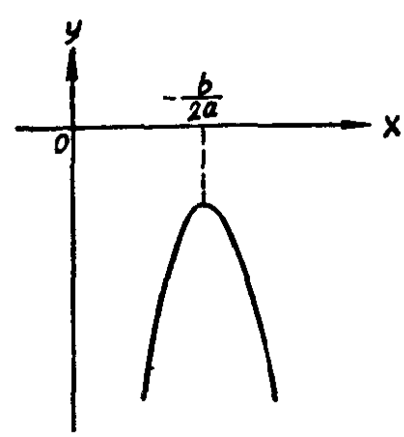

图 2

则对于任何x值，不等式$ax^2+bx+c>0$都不可能成立（图2）. 如果$a>0$，且$4ac-b^2<0$，则使不等式$ax^2+bx+c>0$成立的x值是所有小于x_1和大于x_2的x值（图3），其中x_1是二次三项式较小的一个根，x_2是较大的一个根. 如果$a<0$，且$4ac-b^2<0$，则当x的值满足不等式$x_1<x<x_2$时，不等式$ax^2+bx+c>0$成立（图4），其中x_1是二次三项式较小的根，x_2是较大的根.如果$a>0$，且$4ac-b^2=0$，则当x取

除$x=-\dfrac{b}{2a}$以外的任何值时，不等式$ax^2+bx+c>0$成立（图5）．如果$a<0$，且$4ac-b^2=0$，则对于x取任何值，不等式$ax^2+bx+c>0$都不可能成立（图6）．

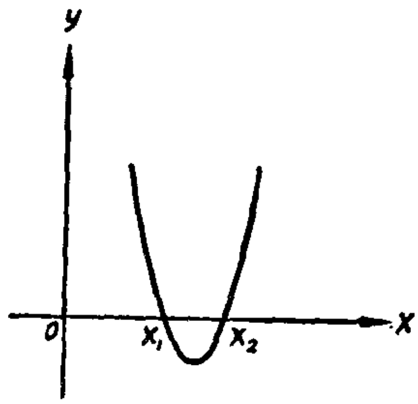

图 3

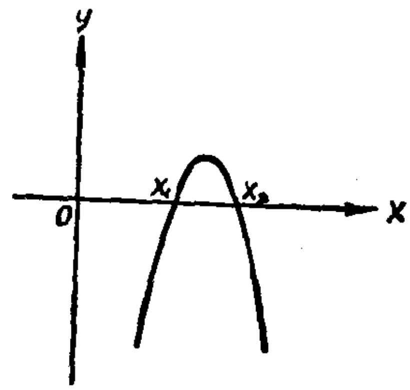

图 4

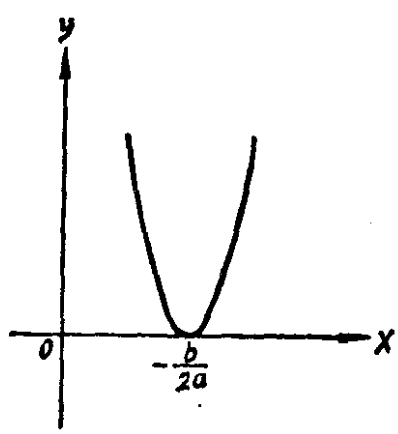

图 5

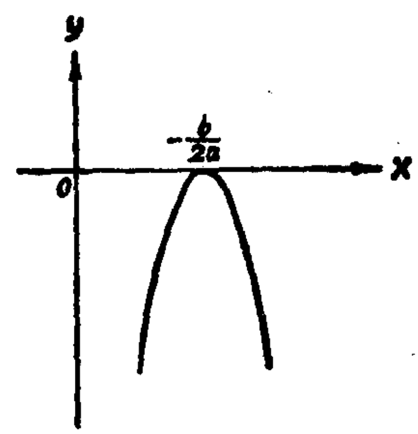

图 6

4.我们知道，当x_1和x_2是二次三项式ax^2+bx+c的根时，有$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$．

当$a>0$，且$x_1=x_2$时，有

$$ax^2+bx+c=[\sqrt{a}(x-x_1)]^2.$$

由此可以得出，当且仅当$a>0$且$b^2-4ac=0$时，二次三项式ax^2+bx+c（a,b,c是实数）是实系数线性函数的完全平方．

5.复合根式的变形公式：

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

当a^2-b是完全平方数时，复合根式$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$可以表示成$\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$.当$a>0$，$b>0$且$a^2-b>0$时，复合根式公式的左边和右边是正数.因此，当$a>0$和$b>0$时，从公式左边的平方等于右边的平方可以推出，这个公式是成立的.

6.方程$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$的每一个根的$n$次幂等于1.这个结论可以简单地从下一事实得出：这个方程的根一定是方程$x^n=1$的根.

7.函数的概念.当变量x取一个集合内的每一个值时，如果变量y有唯一确定的值与之对应，则称y是x在这个集合上的函数.

这时，变量x叫做自变量.

自变量取值的集合，即函数定义的集合，叫做函数的定义域.

y是x的函数这一事实，通常记作：$y=f(x)$.

字母f的意义和字母x和y的意义不同，它不是表示变量，而表示确定y作为自变量x的函数的那种法则（或规则）.例如，函数$Q=\pi R^2$，如果把这个函数用等式写成$Q=f(R)$，那么字母f表示下面这个法则：对于给定的R，要求出对应值Q，必须将R乘平方，再乘以π.当然，我们也可以不用字母f，而用其他任一字母，例如写成：$Q=\psi(R)$.如果我们需要同时讨论几个不同的函数，那么就必须用不同的字母来表示.

如果$f(x)=\sqrt{x^2+1}$，那么$f(5)=5\sqrt{5^2+1}$，$f(-4)=-4\sqrt{(-4)^2+1}$.

如果$f(x,y)=x^2-xy+y^2$，那么$f(a,b)=a^2-ab+b^2$，$f(2,3)=2^2-2\cdot3+3^2$.

8.幂的一些性质.

1）如果a是不等于1的正数，而N是任意正数，则方程$a^x=N$有一个且只有一个实数根——有理根或无理根.

2）设$a>1$.如果$x>0$，则$a^x>1$；如果$x<0$，则$a<1$.

3）设$0<a<1$.如果$x>0$，则$a^x<1$；如果$x<0$，则$a^x>1$.