力学的物理基础

下册

〔苏〕С. Э. Хайкин 著
应知言 张光畤 译 雷祖献 校

高等教育出版社

力学的物理基础

下　册

〔苏〕С. Э. Хайкин 著

应知言　张先畴 译　雷祖猷 校

高 等 教 育 出 版 社

本书根据苏联国家物理数学书籍出版社(Физматгиз)出版的С.Э.Хайкин所著《Физические основы механики》1962年版译出.

原书共二十章,中译本分上、下两册出版.下册包括后八章,内容为刚体力学、弹性体力学、液体静力学与气体静力学、液体动力学与空气动力学、单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、波、声学等.

下册十三——十六章由应知言译,十七——二十章由张先畴译,全书由雷祖猷校订.

本书可作为高等学校理工科普通物理学课程的教学参考书,也可供中学物理教师及有关科技人员参考.

力学的物理基础

下　册

〔苏〕С.Э.Хайкин 著

应知言 张先畴 译

雷祖猷 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 13.25　字数 310,000

1982年10月第1版　1983年10月第1次印刷

印数 00,001--10,000

书号 13010·0822　　定价 2.00 元

目　录

第十三章 刚体力学

§87. 作为质点系的刚体

在前面研究过的问题中，运动物体的尺寸与形状都无关紧要，因而在解答我们所讨论的问题时可以把物体看作质点．但在许多情形下，那样做是不可能的，因为我们所讨论的运动的特性正是由物体的尺寸与形状所决定的．而这时如果物体足够刚劲，以致它在该运动中产生的形变可以忽略，那么，物体的弹性性质就不起作用（这同刚性约束的情况十分相似；参阅§39.）．在这种情况下，我们能把物体看成是不可变形的，即绝对刚性的．**可以把物体当作不可变形体进行研究的那些问题，构成了刚体力学的研究对象．**

在刚体力学问题中，刚体的尺寸与形状起着重大作用．但是，我们总能设想把刚体分成许多如此小的单元，使每个单元的尺寸与形状在该单元的运动中不起作用．这些单元应该小到什么程度，要由问题的条件来决定；通常应该比所论问题中各个重要距离小得多．例如，当研究刚体绕轴转动时，每个单元的尺寸应比该单元到转轴的距离小得多．如果整个刚体的尺寸可与到转轴的距离相比拟，我们总可以把刚体分成如此小的单元，使每一个单元的尺寸远小于到转轴的距离．

甚至当转轴穿过刚体时，我们也能这样做．设想在刚体中沿轴钻出一条很细的孔道．当然，这不会改变刚体运动的特性．而这时刚体上任何单元到转轴的距离已经是有限的了．因而我们总能选定该单元的各个尺寸，使它们远小于到转轴的距离．刚体上每一个这样的单元，都能看作是一个质点．这样一来，我们就能够

把刚体的运动问题归结为大量单个质点的运动问题，即归结为我们在§26和§70中已经研究过的问题. 由于我们认为刚体是不可变形的，所以在用来代替刚体的质点系中，各个质点间的距离都必须当作是不可变的. 于是，这样的新质点系将不同于以前所研究的各质点间距离可变的质点系.

我们把一个刚体分为许多单元，各相邻单元可能以某些力互相作用. 这首先是弹性力，也还有各单元所带电荷之间的作用力，等等. 既然把物体看作刚体，我们就必须假定，当物体的形变还是极其微小时，弹性力就已经大到足以中止物体继续变形. 我们假定，刚体各单元间作用力的性质同绝对刚性约束的作用力的性质一样. 同时，象在绝对刚性约束的情形下一样，要想根据位形(根据物体的形变)来确定这些作用力，是不可能的. 然而，这不会引起任何麻烦，因为作用在一个刚体各个部分之间的这种内力，在这个刚体的整体运动中并不起任何作用.

前面已经讲过，根据牛顿第三定律可以证明，一个质点系的一切内力之和等于零，因而这些内力的力矩之和也等于零. 须知在质点系运动方程中，所出现的内力与内力矩总可写成刚体各单元之间的全部内力之和或全部内力矩之和；所以，内力与内力矩就从运动方程中消去了. **为了求一个刚体的运动，不必知道这刚体中的内力**. 当刚体的运动确定以后，我们就能(象在刚性约束的情形下一样)根据所确定的运动，求出作用在刚体各单元之间的内力.

同以前一样，只是由于这种不能根据位形确定的力(我们把物体的形变忽略掉了，所以，我们就不能根据位形来计算内力)从运动方程中一下子消去了，我们才能引入这种力. 否则，引入了这种力就不能求解运动问题，因为这种未知力，在求解运动方程以前，我们无法加以确定.

当把有限尺寸的刚体分成各个单元时，我们总能取足够小的，

然而是有限的单元. 但是, 这样一来, 单元的数目往往很大, 解题时需要处理很麻烦的求和过程. 如果用无穷多的无限小单元之和来代替有限个数的有限单元之和, 并利用积分法, 则此求和手续便可简化. 每一个这样的无限小单元, 可以看作是质量无限小的质点(因为刚体密度是有限的, 而刚体单元的体积无限小, 所以, 刚体单元的质量是无限小的).

在以后研究的一切运动中, 我们将局限于刚体所有单元的速度都远小于光速的情形, 因而刚体所有单元的质量都将被当作是恒量.

§88. 刚体重心的运动

刚体运动方程对刚体上一切点的运动都应能给以说明. 在把牛顿定律用于刚体各个单元时, 我们首先要确定刚体上一个特定点的运动规律, 即其质心(即重心)的运动规律.

把刚体分为各个小单元以后, 我们就能把每一个这样的小单元看作是质点, 并对它应用牛顿第二定律. 用 Δm_i 来表示第 i 个单元的质量, 并用 $\boldsymbol{v}_i$ 来表示其速度, 我们就能对每个单元把牛顿第二定律写成如下形式:

$$\frac{d}{dt}(\Delta m_i \boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\Phi}_i,$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 是刚体上其余各单元作用在该单元上的内力之和, 而 $\boldsymbol{F}_i$ 是作用在该单元上的外力之和.

对于一个刚体的全部单元, 把这样的方程加起来, 我们就得到(因为按牛顿第三定律 $\Sigma\boldsymbol{\Phi}_i=0$):

$$\frac{d}{dt}\Sigma(\Delta m_i \boldsymbol{v}_i)=\Sigma\boldsymbol{F}_i. \tag{13.1}$$

同任何质点系一样, 刚体总动量对时间的导数, 等于作用在刚

体上的一切外力之和．然而我们将会看到，用这个方程说明刚体的运动比前面用它说明质点系的运动要有力得多．这是因为，刚体中各质点间（刚体各个单元之间）的距离总是不变的，而在一般质点系中，各质点间的距离是可变的．

为了由方程（13.1）得出关于刚体运动特性的较详尽的说明，我们来看一看，刚体总动量跟刚体质心运动有什么联系．

刚体质心的位置，可按下述方式确定．用 x_i, y_i, z_i 来表示质量单元 Δm_i 的坐标．写出式子 $\Delta m_i x_i$; $\Delta m_i y_i$; $\Delta m_i z_i$，并对刚体的全部质量单元取这些式子之和，即求 $\sum_i \Delta m_i x_i$; $\sum_i \Delta m_i y_i$; $\sum_i \Delta m_i z_i$．最后，把这些和各除以 $\sum_i \Delta m_i$，即除以刚体总质量。得到的值

$$x=\frac{\Sigma\Delta m_i x_i}{\Sigma\Delta m_i};\ y=\frac{\Sigma\Delta m_i y_i}{\Sigma\Delta m_i};\ z=\frac{\Sigma\Delta m_i z_i}{\Sigma\Delta m_i} \tag{13.2}$$

就是刚体质心的坐标．不难证明，刚体上这样确定的点，就是施加在刚体全部单元上的这样一个平行力系的合力作用点，各平行力的大小跟受该力作用的单元质量成正比．而在均匀引力场中，重力正是这样作用在刚体各个单元上的，所以质心与重心是重合在一起的．

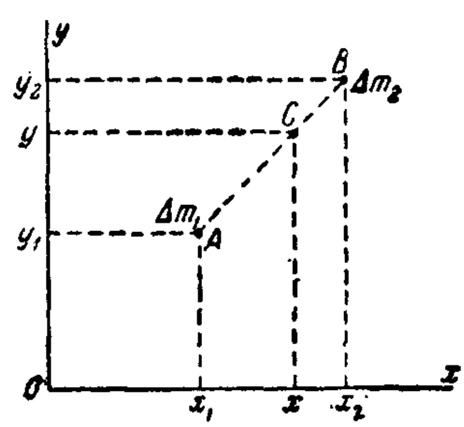


图 189

今试证如下：设有两个平行力 F_A 与 F_B 分别作用在 A 点与 B 点上（图 189），则这两力的合力作用点 C 位于直线 AB 上，且 $\frac{AC}{CB}=\frac{F_B}{F_A}$．如果 F_A 与 F_B 两力为重力，那么它们正比于刚体单元的质量 Δm_A 与 Δm_B．所以，$\frac{AC}{CB}=\frac{\Delta m_B}{\Delta m_A}$，即两质点的重心内分两质点的连线为两线段，这两线段的长度跟两质

点的质量成反比．因此，如果我们分别用 x_1, y_1, z_1 与 x_2, y_2, z_2 来表示两个刚体单元 Δm_A 与 Δm_B 的坐标，那么这两个刚体单元的重心坐标 x, y, z 将满足关系式

$$\frac{x_2-x}{x-x_1}=\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2};\quad \frac{y_2-y}{y-y_1}=\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2};\quad \frac{z_2-z}{z-z_1}=\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2}. \tag{13.3}$$

由这些关系式我们得到：

$$\left.\begin{aligned}(\Delta m_1+\Delta m_2)x&=\Delta m_1x_1+\Delta m_2x_2\\(\Delta m_1+\Delta m_2)y&=\Delta m_1y_1+\Delta m_2y_2\\(\Delta m_1+\Delta m_2)z&=\Delta m_1z_1+\Delta m_2z_2\end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

即，坐标值 x, y, z 跟决定两质量 Δm_1 与 Δm_2 的质心坐标的式子(13.2)相符合．

如果在这两个质量元的基础上再添加第三个，第四个等等质量元，则我们同样可以证明，其坐标由关系式(13.2)所决定的质心，也是与重心重合在一起的．

质心概念比重心概念更普遍，因为质心概念中所牵涉到的力，不限于作用在刚体单元上一种特定类型的力．而重心概念中所牵涉到的力，却是作用在均匀的引力场中的一种特定类型的力．质心不仅是重力的合力作用点，而且也是任何质力(Массовая сила)的合力作用点．质力就是作用在刚体各单元上且与各该单元质量成正比的平行力，例如，在平动的非惯性坐标系中的惯性力．所以，质心也叫做惯性中心．后文中我们也利用以前的术语"重心"．

将(13.2)式对时间求导，我们就得到：

$$\left.\begin{aligned}\left(\sum_i \Delta m_i\right)\frac{dx}{dt}&=\sum_i \Delta m_i\frac{dx_i}{dt}\\\left(\sum_i \Delta m_i\right)\frac{dy}{dt}&=\sum_i \Delta m_i\frac{dy_i}{dt}\\\left(\sum_i \Delta m_i\right)\frac{dz}{dt}&=\sum_i \Delta m_i\frac{dz_i}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

这三式的右边是质点系的总动量沿三坐标轴的分量，而左边是刚

体质量与质心相应分速度$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$的乘积．因此，

$$m\boldsymbol{v}=\Sigma\Delta m_i\boldsymbol{v}_i. \tag{13.6}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为质心的速度矢量，而m为整个刚体的质量．**刚体具有的动量，就是质量等于刚体质量的一个质点在以刚体质心的速度运动时所具有的动量．**换句话说，当论及刚体的动量时，我们总能用放在刚体质心处的一个质点来代替该刚体．

把(13.6)式代入方程(13.1)，我们就得到：

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\Sigma\boldsymbol{F},$$

而当刚体质量恒定时，得到

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\Sigma\boldsymbol{F}, \tag{13.7}$$

这方程跟质点运动方程完全相似．

刚体的质心的运动，等同于跟刚体同样质量的一个质点在该刚体所受一切外力作用下所发生的运动．

方程(13.7)决定了刚体质心的运动，即决定了该刚体上一个完全确定的点的运动．这一方程也可用于质点系，以决定质点系质心的运动．但是，对于一般质点系来说，质心并不是该系统中什么确定的点．因为一般质点系中各质点间的距离会改变，所以质心在质点系中的位置也会改变．即使知道了质心怎样运动，我们还不能说明质点系中任意确定的一个质点怎样运动．不过，用于质点系的质心运动规律，毕竟能在一定的程度上说明质点系运动的特性．例如，根据质心运动规律可知，在地球绕太阳的周年运动中，沿着椭圆轨道运动的并不是地球的质心，而是地球与月球共同的质心．

§ 89. 刚体的定轴转动 转动惯量

我们来研究约束在定轴上并可绕该轴自由转动的刚体的运动(图 190)；O 点是转轴的迹. 在刚体的 A 点上作用着外力 $\boldsymbol{F}$. 除了外力 $\boldsymbol{F}$ 以外，在刚体上还作用有来自约束的力(约束的反作用力)——在本情形下就是约束刚体的轴的轴承压力. 而只要没有摩擦力，这压力便通过转轴. 所以，如果我们选取转轴为矩轴，那么反作用力对该轴的力矩就等于零. 只有外力 $\boldsymbol{F}$ 产生对转轴的力矩. 把刚体分为各个小单元 Δm_i 以后，我们就能把刚体看作是质点系. 象对质点系一样，在本情形下也可应用方程(10.5)：

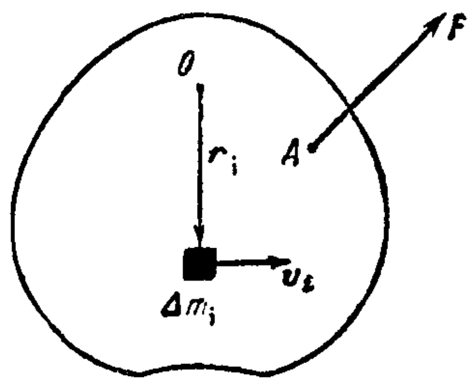


图 190

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}=\boldsymbol{M} \tag{13.8}$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 是刚体的动量矩，而 $\boldsymbol{M}$ 是外力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴的力矩.

在所论定轴转动的情形下，刚体的动量矩容易通过转动角速度来表示. 质量元 Δm_i(图 190)具有元动量矩

$$\Delta \boldsymbol{N}_i=[\boldsymbol{r}_i\Delta m_i\boldsymbol{v}_i].$$

刚体的总动量矩 $\boldsymbol{N}=\Sigma\Delta\boldsymbol{N}_i$，式中对刚体所分成的全部单元取和. 由于物体是刚体，所以每一单元到转轴的距离永远保持不变，且任何单元的线速度都垂直于引向该单元的矢径. 所以，$v_i=\omega r_i$ 而

$$\Delta N_i=r_i^2\Delta m_i\omega.$$

由于一切单元的动量矩方向都沿着转轴，且 ω 对于一切单元都是一样的，所以，刚体的总动量矩

$$N=\Sigma(\Delta m_i r_i^2\omega)=(\Sigma\Delta m_i r_i^2)\omega=I\omega, \tag{13.9}$$

式中 $I=\Sigma\Delta m_i r_i^2$ 是依赖于刚体质量(相对于转轴)分布的量;这就是我们已经介绍过的——刚体对所选轴的转动惯量. 由于在本情形下全部 r_i 都是恒定的,所以

$$\frac{dN}{dt}=\sum_i(\Delta m_i r_i^2)\frac{d\omega}{dt}=I\frac{d\omega}{dt},$$

从而矩方程(13.8)采取形式

$$I\frac{d\omega}{dt}=M. \tag{13.10}$$

转动刚体的动能,也可很方便地用转动惯量来表示:

$$T=\frac{1}{2}\sum_i\Delta m_i v_i^2=\left(\sum_i\Delta m_i r_i^2\right)\frac{\omega^2}{2}=I\frac{\omega^2}{2}, \tag{13.11}$$

式中 v_i 为质量元 Δm_i 的线速度.

动量矩和动能的表达式都类似于以前我们研究某些质点系时所得到过的表达式, 在那些质点系中各质点离转轴的距离保持不变.但是,在本情形下,转动惯量的计算是较复杂的问题,因为我们要研究的是连续刚体而不是一个个的质点. 所以,为了计算 I,必须对大数目的小单元取和 $\Sigma\Delta m_i r_i^2$. 这一和式可以用积分法来计算. 用无限小的微元来代替有限小的单元,我们就得到:

$$I=\int r^2 dm,$$

式中积分范围应该包括刚体的全部微元. 这样一来, 刚体转动惯量的计算就归结为体积分. 下面我们只计算几种最简单的转动惯量.

设有一连续的匀质圆柱体,其高为 h. 我们来求这一圆柱体对其几何轴线的转动惯量. 把圆柱分成许多厚度为 dr 的无限小的同心圆筒元, 其内径为 r 而外径为 $r+dr$(图 191). 在计算每个这样的圆筒元的转动惯量时, dr

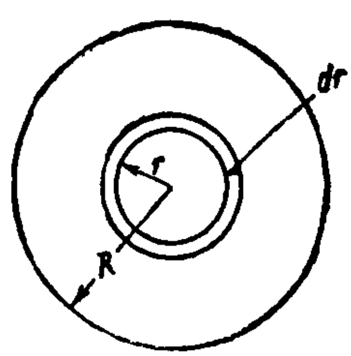


图 191

跟 r 比起来可以忽略掉，也就是说，可以认为同一个圆筒元上一切点到轴的距离都等于 r. 所以，每个圆筒元的转动惯量等于 $dI=\Sigma\Delta mr^2=r^2\Sigma\Delta m$，这里 $\Sigma\Delta m$ 是整个圆筒元的质量. 圆筒元底截面为 $2\pi rdr$，而壁高为 h，所以圆筒元体积等于 $2\pi rhdr$，又如果材料是均匀的，那么整个圆筒元的质量为 $\Sigma\Delta m=\rho 2\pi rhdr$，这里 ρ 为材料的密度. 因此，圆筒元的转动惯量等于 $dI=2\pi h\rho r^3dr$，而整个圆柱的转动惯量等于

$$I=\int dI=2\pi h\rho\int_0^R r^3dr,$$

式中 R 是圆柱半径. 进行积分并把上下限代入，我们就得到

$$I=\frac{1}{2}\pi hR^4\rho,$$

而 πhR^2 是圆柱的体积. 所以，圆柱的质量 $m=\pi hR^2\rho$，而其转动惯量

$$I=\frac{1}{2}mR^2. \tag{13.12}$$

其他刚体的转动惯量，原则上能用同样的方法求得. 但是，实际上算起来足够简单的只有回转体，特别是回转柱体. 例如，空心圆柱对其几何轴线的转动惯量的计算，同实心圆柱类似，所不同的只是在上面所做的计算中，积分下限不取零，而改取空心圆柱的内径，积分上限则取空心圆柱的外径. 在质量相同且外径相同的条件下，空心圆柱的转动惯量总是大于实心圆柱的转动惯量. 所以，如果在这样两个回转体上作用着相同的力矩，那么实心圆柱

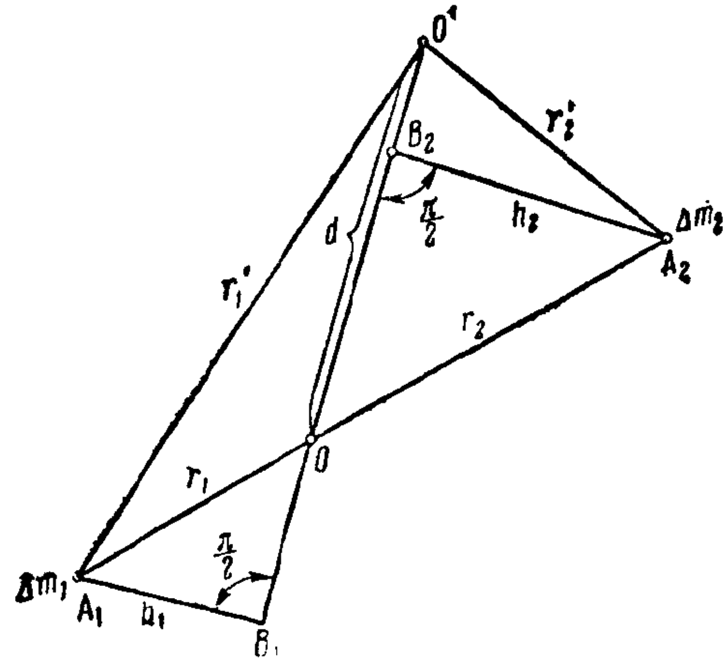


图 192

具有的角加速度要大于空心圆柱的角加速度.

对于形状不规则的或不匀质的(带有空洞的)刚体,转动惯量算起来很复杂. 我们不准备做这样的计算. 对于质量相同但质量分布不同的两个刚体,其转动惯量大小的比较,常常利用下述方法. 如果同样的质量元,在一刚体中比在另一刚体中位于离轴较远的地方,那么前一刚体的转动惯量就大于后一刚体的转动惯量. 例如,这种想法可应用于匀质长方体的转动惯量. 分别通过长方体三组相对面的中心作三根对称轴. 分别对这三轴取长方体的转动惯量. 这三个转动惯量中最大的是对最短轴的转动惯量. 这一点一下子就能弄清楚,只要我们注意到, 同一质量元离最短轴的距离要比离最长轴的距离来得大①.

如果我们已经知道了刚体对通过其重心的轴的转动惯量,那么就容易求得该刚体对任一与该轴平行的轴的转动惯量. 我们先来研究由两个质量元 Δm_1 与 Δm_2 组成的刚体(图 192). 刚体重心位于 O 点,该点离两质量元的距离分别为 r_1 与 r_2,且 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\Delta m_2}{\Delta m_1}$. 刚体对通过 O 点且垂直于图面的轴的转动惯量是

$$I_0=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2.$$

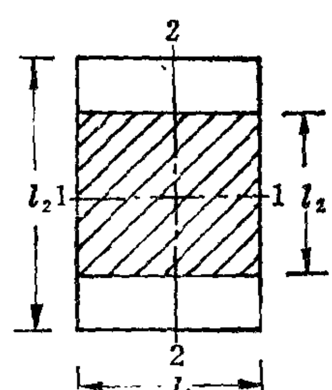
这两个质量元对通过 O' 点且垂直于图面的轴的转动惯量是

$$I'=\Delta m_1 r_1'^2+\Delta m_2 r_2'^2,$$

由图可见

$$r_1'^2=h_1^2+(d+\sqrt{r_1^2-h_1^2})^2=d^2+r_1^2+2d\sqrt{r_1^2-h_1^2},$$
$$r_2'^2=h_2^2+(d-\sqrt{r_2^2-h_2^2})^2=d^2+r_2^2-2d\sqrt{r_2^2-h_2^2}.$$

① 为了要使这个论证方法适用,我们还需要用一些数学方面的技巧. 设一个长方体的两根轴不等长,譬如说,$l_1<l_2$(附图 1). 那么, 对于底边长为 l_1 的贯通方柱来说,它对 1-1 轴与对 2-2 轴的转动惯量因对称性而相等(图中加阴影线部分). 所余部分的任一质量元,到 1-1 轴的距离不小于 $l_1/2$,而到 2-2 轴的距离不大于 $l_1/2$. 所以, 一长方体对较短轴的转动惯量大于对较长轴的转动惯量. 然后,我们才能推得原文的结论: 对最短轴的转动惯量最大. ——译者注



附图 1

因此

$$I'=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+(\Delta m_1+\Delta m_2)d^2+2d\,(\Delta m_1\sqrt{r_1^2-h_1^2}-\Delta m_2\sqrt{r_2^2-h_2^2}).$$

但由于三角形 OA_1B_1 与 OA_2B_2 相似，而 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\Delta m_2}{\Delta m_1}$，所以

$\Delta m_1\sqrt{r_1^2-h_1^2}=\Delta m_2\sqrt{r_2^2-h_2^2}$. 因此

$$I'=I_0+(\Delta m_1+\Delta m_2)d^2.$$

实际上刚体由许多单元组成. 但由于 O 点是重心，所以我们总能这样把单元配成对子 Δm_i 与 Δm_k，使各对单元的公共重心都位于 O 点. 所以，由两个配对质量元组成的每个对子，对 O' 轴的转动惯量跟对 O 轴的转动惯量相差一个值 $(\Delta m_i+\Delta m_k)d^2$. 而质量为 m 的整个刚体对 O' 轴的转动惯量跟对 O 轴的转动惯量就相差一个值 md^2. 由此可见，刚体对任意轴的转动惯量

$$I=I_0+md^2, \tag{13.13}$$

式中 I_0 为对平行于该轴且过重心的轴的转动惯量，d 为两轴间距离，而 m 为刚体的质量. 这就是所谓史坦纳(Steiner)定理[①].

在许多机构中，机构各部分的运动与各个辅助轮子、滑轮等的转动是联系在一起的，这些轮子的质量往往对机构的加速度基本上没有影响. 在这些情形下，我们就可以不考虑这些辅助轮子的转动惯量. 为了说明什么时候能够这样做，我们举出用来演示加速运动规律[②]的阿特武德 (Atwood) 机作为一个具体例子. 在阿特武德机中，绕过定滑轮的一根线的两端，各悬挂着质量等于 m 的一个重物. 重物能沿着竖直放置的刻度尺而运动. 如果在一个重物上放上一个不大的附加小负载 Δm，那么重物就要开始作加速运动[③]. 在刻度尺上固定着一个环，该环能在半途中把附加小负载卸掉. 卸荷后重物穿过环以卸荷时刻的速度作匀速运动. 测量这个速度，就可以确定质量 Δm 与所达到的速度之间的关系.

我们来研究阿特武德机中重物在附加负载 Δm 卸去以前的运动，而先不略去滑轮的转动惯量.

---

① 有时称为 Huygens-Steiner 定理. 通常称为"平行移轴定理"，或简称为"平行轴定理". ——译者注

② 主要用来演示牛顿第二定律. ——译者注

③ 这里要假定摩擦阻力不存在. 实际上，摩擦阻力总是或多或少地存在着的. 所以，做实验时先要用一个可调整的补充负载来抵消机构的摩擦阻力. 也就是说，加上补充负载后，轻推一下，重物就作匀速运动. ——译者注