线性代数

邓长寿　黎建兴　曹介南　杨松琪　编著

国防科技大学出版社

线 性 代 数

邓长寿　黎建兴
曹介南　杨松琪　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/邓长寿,黎建兴,曹介南,杨松琪. 长沙:国防科技大学出版社,1998.7

ISBN 7-81024-488-4

Ⅰ 线性代数

Ⅱ ①邓长寿 ②黎建兴等

Ⅲ 线性代数

Ⅳ O151.2

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:文 慧 责任校对:黄 煌

新华书店总店北京发行所经销

湖南大学印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张:10.25 字数:256 千

1998 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1—5000 册

*

定价:14.00 元

内 容 简 介

本书是为计算机专业本科线性代数课程编写的。主要讲述了行列式的计算、向量理论、矩阵理论、线性方程组的求解、线性空间与线性变换、特征问题与矩阵相似、内积空间、实对称矩阵与实二次型等方面的内容。为了使读者加深理解及巩固知识，本书列举了大量的例题，并在每小节后都安排了一定量的习题，最后给出了习题的答案和提示。

本书可作为高等院校本科计算机专业线性代数课程教材。

前　　言

本书是计算机专业的线性代数课教材。计算机专业对线性代数课的要求有两个特点：一是早，及早学完线性代数课，有利于开展专业基础课和专业课的学习。二是多，该专业比其它非数学专业所需的线性代数内容要多。

为满足这些要求且便于自学，我们在内容的安排和叙述方式上，采取了这样一些措施：

第一，补充了一些预备知识。例如几何向量知识等，使得只具备中学数学知识的人便可学懂，从而使线性代数课可在大学一年一期开设。对参加自考者更为方便，由于没有先导课的制约，便可视时机，随时参加这门课的考试。

第二，分散难点。例如向量组的相关性、矩阵的秩和线性方程组的一般理论，分散在三章中叙述。在文字叙述和内容安排顺序上，力求写得明白易懂，深入浅出。通过具体例子，从个别到一般，由低层次到高层次逐步展开。逐节安排习题，边学边巩固。这些都便利自学。

第三，内容的广度和深度都稍超过现有的工科专业类线性代数教材，这样可充分保证了后续课对线性代数理论知识的需要。同时，也可满足备考硕士研究生的学生的要求。

学习线性代数，首先要在基本概念上下功夫。线性代数中的概念多且抽象，是学习中的重点，也是难点。有些概念，要经过反复推敲，才能准确理解，如向量组的线性相关和线性无关等。有些概念，要结合具体模型去理解，要把高度抽象的概念与简明具体的例子结合起来，才能掌握牢靠，如线性（向量）空间和线性变换等。还要

注意通过比较去区别相近的、有密切联系的概念，如向量集合、线性空间和内积空间等。

习题和正文是一个有机整体。认真做好做完习题是复习、检查、巩固和加深对正文学习理解不可缺少的环节。难度较大的习题打了 * 号，可以选做。

错误和不妥之处，恳请批评指正。

国防科学技术大学计算机学院

邓长寿　黎建兴

曹介南　杨松琪

1998 年 8 月

目　录

第一章　行列式和线性方程组的两种解法

行列式与线性方程组联系十分密切。它们都是线性代数的主要内容。本章先讨论行列式的理论和计算，再介绍线性方程组的两个解法。至于线性方程组的一般理论，在掌握向量和矩阵知识之后，将在第四章讨论。本章的前三节介绍预备知识。

§1.1　数　　域

本书讨论问题时，常在一定的数集上进行，且希望知道对数进行运算后，得到的结果是否仍在此数集中。为此给出：

定义 1　如果从某一数集 K 中，任取两个数，经过某种运算，得到的结果仍是 K 中的数，则称数集 K 对此运算**封闭**。

例如，由所有整数作成的集合，常用 Z 表示此数集。任取 $m,n\in Z$，我们知道两个整数之和仍是整数，即 $m+n\in Z$，则 Z 对加法封闭。同理可知，Z 对减法和乘法也封闭。但 Z 对除法不封闭，虽然 $3,5\in Z$，但 $(3/5)\overline{\in} Z$.

定义 2　如果 K 是一个至少含有 0 与 1 的数集，且对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算都封闭，则称 K 是一个**数域**。

全体实数作成的实数集 R，其中含有 0 与 1，且任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数，即 R 对四则运算封闭，所以 R 是一个数域，并称为**实数域**。

同样，所有的复数作成的复数集 C 和所有的有理数作成的有理数集 Q，通过检验，知道它们都是数域。并分别称作**复数域**和**有**

理数域。

而整数集 Z，前面已说明它对除法不封闭，所以不是数域。又如正实数集 $R^+=\{x|x>0,x\in R\}$，因其中不含 0，所以不能成为数域。

实数域 R 和复数域 C 是两个最重要的数域。

部分实数作成的数集，部分复数作成的数集，也可能构成数域。

例 1 求证数集 $P=\{u|u=a+b\sqrt{2},a,b\in Q\}$ 是数域。

证明 $0=0+0\sqrt{2}$，$1=1+0\sqrt{2}$，所以 $0,1\in P$.

任取 $u,v\in P$，则 u,v 应形如

$$u=a+b\sqrt{2} \qquad a,b\in Q$$

$$v=c+d\sqrt{2} \qquad c,d\in Q$$

$$\begin{aligned} u+v&=(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) \\ &=(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \end{aligned}$$

因 Q 是数域，$a+c,b+d\in Q$，则 $u+v\in P$

同理 $$u-v=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}\in P$$

$$\begin{aligned} uv&=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) \\ &=(ac+2bd)+(ad+bd)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$ac+2bd,ad+bc\in Q$，则 $uv\in P$

设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，则 $c-d\sqrt{2}\neq 0$. 否则，如果 $c-d\sqrt{2}=0$，当 $d=0$ 时，$c=0$，那么 $c+d\sqrt{2}=0+0\sqrt{2}=0$，与所设条件相矛盾；而 $d\neq 0$ 时，则$\sqrt{2}=c/d\in Q$，与$\sqrt{2}$是无理数相矛盾。因 $c-d\sqrt{2}\neq 0$，便可对 u/v 进行分母有理化：

$$\begin{aligned} \frac{u}{v}&=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \\ &=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} \end{aligned}$$

$$= (\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}) + (\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2})\sqrt{2}$$

因 Q 是数域，$\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}, \frac{bc-ad}{c^2-2d^2} \in Q$，则 $\frac{u}{v} \in P$.

P 中含有 0 与 1，且对加、减、乘、除四则运算封闭，所以 P 是数域。

如果 M 和 K 同是数域，且 $M \subseteq K$，则称 M 为 K 的一个子域。例 1 中的 P 是实数域 R 的一个子域，由此不难推想 R 的子域是很多的。R 又是 C 的子域。还可证明有理数域是任何数域的子域，亦即 Q 是最小的数域。

在线性代数中，数的运算几乎全是四则运算，也就是总在某一数域上进行的。

习题　1—1

1. 说明下列数集对加、减、乘、除法中哪几种运算是封闭的。
   ① 偶数集；
   ② 奇数集；
   ③ 非负实数集；
   ④ $\{0\ 1\ 2\ 3\}$；
   ⑤ $P = \{x \mid |x| < 1\}$.
2. 指出下列哪些数集是数域，哪些不是数域，并说明理由。
   ① $\{0\ 1\}$；
   ② $P = \{u \mid a + b_i,\quad a, b \in R\}$；
   ③ $M = \{u \mid u = m + n, m, n \in Z\}$

§1.2　n 级排列的逆序数和奇偶性

在中学代数中，已经介绍过排列。这里只讨论一类特殊的排列，即由 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 作成的排列，称之为 **n 级排列**。

常用 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 表示 n 级排列的一般形式，其中 j_k 表示第 k 位上的数。例如在十一级排列 5 3 7 1 9 (11) 2 6 4 (10) 8 中，$j_1=5$，$j_6=11$，…等。

在一个 n 级排列中，如果处于两个位置上的一对数，大的排在小的前面，就称它们构成一个**逆序**。例如在三级排列 3 1 2 中，3 与 2，3 与 1 都构成逆序。一个排列中的逆序总个数称为这个排列的**逆序数**。排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数，常用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示。例如 $\tau(3\ 1\ 2)=2$，$\tau(1\ 2\ 4\ 3\ 5)=1$.

可以这样去计算一个排列的逆序数，从第一位上的数开始，依次写出每位上的数右边比它小的数的个数，然后将这些个数都加起来便得。例如

$$\begin{aligned}&\tau(3\quad 4\quad 1\quad 9\quad (10)\quad 2\quad (11)\quad 7\quad 6\quad 5\quad 8)\\ &=2+2+0+5+5+0+4+2+1+0+0\\ &=21\end{aligned}$$

定义 逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**；逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**。

因 $\tau(3\ 1\ 2)=2$，3 1 2 是偶排列。$\tau(4\ 1\ 2\ 3)=3$，4 1 2 3 是奇排列。按照数字自然顺序从小到大排起来的排列

$$1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

称为**自然排列**。因 $\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，所以自然排列是偶排列。

将一个排列中两个不同位置上的数相互调换，其余位置上的数不动，得到一个新的排列，这样做称为对排列进行了一次**对换**。对换前后两个排列的奇偶性有下述关系：

定理 1 每次对换都改变排列的奇偶性。

定理的意思是，奇排列经过一次对换变成偶排列，偶排列经过一次对换变成奇排列。

证明 分两步进行证明。

第一步，特殊情况：对换排列中的一对数 i 与 j 处在相邻位置上（这种对换简称**邻换**），即将排列

$$\cdots\ i\ j\ \cdots \tag{1}$$

中的 i 与 j 邻换后，得到排列

$$\cdots\ j\ i\cdots \tag{2}$$

这里的“…”表示不动的数。

在排列(1)与(2)中，i,j 与其他不动的数前后相对位置未变，逆序就不会变化；不动的数之间相对位置也未变，逆序也没有变化。而在 i 与 j 之间，当 $i<j$ 时，在(1)中不构成逆序，而在(2)中构成逆序；当 $i>j$ 时，在(1)中构成逆序，而在(2)中不构成逆序。因此(2)的逆序数比(1)的逆序数不是多 1 个，就是少 1 个。逆序数不论是多一个，或少一个，奇偶性都改变了。所以排列的奇偶性也跟着改变了，即(1)与(2)的奇偶性相反。

第二步，一般情形：在被对换的 i 与 j 之间有 s 个数。即在排列

$$\cdots\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ j\ \cdots \tag{3}$$

中，对换 i 与 j 后，得到排列

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ i\ \cdots \tag{4}$$

从(3)到(4)也可以通过一系列邻换来实现：从(3)出发，将 j 先与 k_s 对换，再与 k_{s-1} 对换，…，也就是将 j 一位一位依次向左移，经过 $s+1$ 次邻换，排列(3)就变成了排列

$$\cdots\ j\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ \cdots \tag{5}$$

再从(5)出发，将 i 一位一位地向右移，经过 s 次邻换，就得到排列

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ i\ \cdots \tag{6}$$

按上述作法，从(3)经(5)到(6)，总起来共经过 $2s+1$ 次邻换，根据第一步证得的结论，可知排列的奇偶性也改变了 $(2s+1)$ 次 (3)与(6)的奇偶性相反。(6)就是(4)，所以(3)与(4)的奇偶性相反。

定理 2　任何一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 总可以通过对换与自然排列相互转化；且 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与对换次数同奇偶性。

证明　任意给定一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$，如果 $j_1=1$，可以将 j 与在某位上的 1 对换，就得到 $1\ j_2' j_3' \cdots j_n'$；如果有 $j_2' \neq 2$，又可通过一次对换，将 2 调到第二位上，得到 $1\ 2\ j_3'' \cdots j_n''$；…。这样从左到右依次做下去，最多经过 $(n-1)$ 次对换，就将 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 化为自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$.

反过来，仿照上面的作法，从左到右通过对换，按照 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 形式的要求，使各位上的数逐个到位，便可将自然排列化为 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

如果是通过 s 次对换，将自然排列化为 $j_1 j_2 \cdots j_n$，由于自然排列是偶排列，在对换过程中，奇偶性又改变了 s 次，所以当 s 是奇数时，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列；s 是偶数时，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列，即 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 s 同奇偶性。

如果通过 t 次对换，将 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 化为自然排列，仿上可知，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 t 奇偶性相同。

推论　通过对换可将两个 n 级排列相互转化。

证明　任给两个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 和 $i_1 i_2 \cdots i_n$。可先通过对换将 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 化为自然排列，再通过对换将自然排列化为 $i_1 i_2 \cdots i_n$. 反之亦然。

例 1　通过对换将排列 4 6 2 5 1 3 化为自然排列。

解　先将 4 与 1 对换，得到　1 6 2 5 4 3；

再将 6 与 2 对换，得到　1 2 6 5 4 3；

再将 6 与 3 对换，得到　1 2 3 5 4 6；

再将 5 与 4 对换，得到　1 2 3 4 5 6；

共做 4 次对换。

$\tau(4\ 6\ 2\ 5\ 1\ 3)=10$，排列 4 6 2 5 1 3 与对换次数 4 同奇偶。

n 级排列是 n 个不同元素的全排列，所以一共有 $n!$ 个。我们不

加证明地指出，其中**奇偶排列各占一半**，即都是$\frac{1}{2}n!$ 个。

习题 1—2

1. 计算下列排列的逆序数，并指出其奇偶性。

   ① 5 2 3 1 4 6 8 7；

   ② 8 7 6 5 4 3 2 1；

   ③ $n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1$；

   ④ $(n-1)\ (n-2)\ \cdots\ 2\ 1\ n$.

2. 写出全部三级排列，并指出各个排列的奇偶性。
3. 试通过对换将自然排列 1 2 3 4 5 6 化为排列 5 3 4 1 6 2.
4. 试通过对换将排列 3 1 4 2 化为排列 2 3 1 4.

§1.3 连加与连乘

多个数 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 相加，为方便起见，常简记成

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n = \sum_{i=k}^{n} a_i \tag{1}$$

符号“$\sum$”称为连加号或求和符号，a_i 表示一般项，i 是一个整变量，称为求和指标；$\sum$ 上下的数字表示 i 取值的范围是从 k 逐一到 n. 因求和指标是一个整变量，用什么字母表示都可以，如

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{l=k}^{n} a_l = \sum_{j=k}^{n} a_j \\ = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n\end{aligned}$$

因将前面三个表达式展开，求和指标消失了，得到结果是一样的。

对于 $m \times n$ 个数

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n},$$
$$a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$$

相加。用 S 表示它们的和，利用求和符号，则

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots \\ &\quad + a_{2n}) + \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) \end{aligned}$$

这种有两个求和指标的和式，称为二重求和。

由于数的加法满足交换律，又有

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1}) + (a_{12} + a_{22} + \cdots \\ &\quad + a_{m2}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}) \end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij})$$

省去括号，又可写成

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

上式说明，二重求和的顺序可以交换。

求和范围的表示，可采用多种形式，例如(1)可写成

$$\sum_{k \leqslant i \leqslant n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n$$

又如

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n}+\cdots+a_{n-1n-1}+a_{n-1n}+a_{nn}=M$$

可以表示成

$$M=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}$$

也可表示成

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}=M.$$

在特殊情形，还需采用特殊的表示方式，例如

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=d$$

需要表示成

$$d=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1_{j1}}a_{2_{j2}}a_{3_{j3}}$$

这里的 $j_1\ j_2\ j_3$ 表示对三级排列求和，一个三级排列对应一项。三级排列共 6 个，恰好对应相加的 6 项。这种和式表示法，在行列式理论中起基础作用。

多个数相乘，可以利用求积符号 $\prod$ 表示为

$$a_l\,a_{l+1}\,a_{l+2}\cdots a_s=\prod_{i=l}^{s}a_l \tag{2}$$

称

$$\prod_{i=l}^{m}\prod_{j=l}^{n}a_{ij}=a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}$$

为二重求积。

对于连乘积，有时也可采用几种表示法，例如

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$

$$=\prod_{i=l}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

在(1)中，如果 $a_i=cb_i$，c 是与 i 无关的数，因相加各项可提取公因子，则有