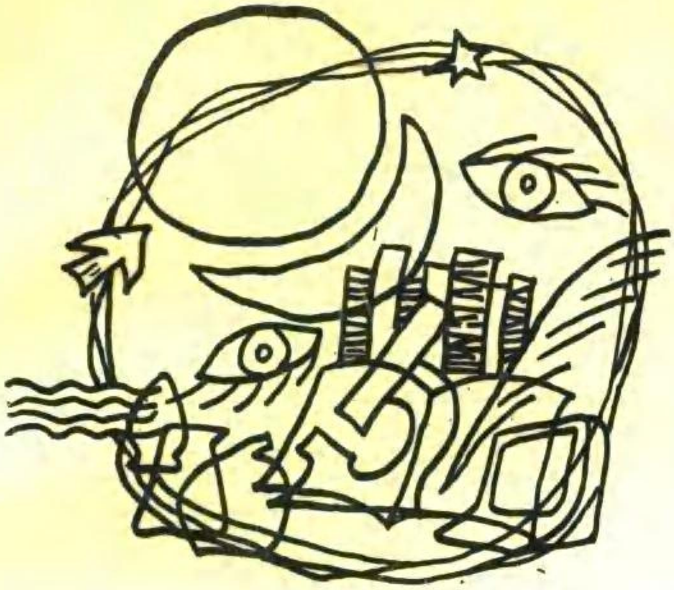

华东师范大学中青年学术著作出版基金会

光滑动力系统

朱德明　韩茂安　编著

朱德明　韩茂安　编著

光滑动力系统

（沪）新登字第201号

光 滑 动 力 系 统

朱德明　韩茂安　编著

华东师范大学出版社出版发行

（上海中山北路 3663 号）

新华书店上海发行所经销　　上海译文印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：10　插页：2　字数：255千字

1993 年 3 月第一版　1993 年 3 月第一次印刷

印数：001—1,500

ISBN7-5617-0853-X/N·078　　定价：8.00元

序　言

动力系统理论是现代“大范围分析”(global analysis)这一综合性数学分支的一个重要组成部分，它以确定的随时间演变的系统的全局动力性态为其研究对象，又在物理、力学、化学、生物和经济等许多学科分支中得到广泛的应用. 随着微分流形、微分拓扑等数学分支的发展，动力系统的研究也日益深入和广泛，微分动力系统理论应运而生，并立即在国际范围内引起广泛重视.

80年代以来，在我国涉足这一领域的数学及其他学科的研究人员日趋增多，而与之不相适应的是，适合于我国情况与读者口味的有关这一论题的教材与专著问世很少，这种情况甚不利于此重要研究领域的工作的展开以及对青年一代科学家的培养. 令人庆幸的是，不少国内同仁以及出版部门正在努力改变这种状况.

为了系统地介绍微分动力系统理论的基本内容，朱德明等同志在自身研究与教学工作的基础上写就了这本书稿. 它取材丰富，既涉及到这一理论的基本概念、方法与一些经典的结论，又引进了一些优秀的新成果，读后使人能对这一领域有一个基本的了解. 在内容安排上也力求做到由浅入深、先易后难，对一些较抽象的困难定理给出了简洁明瞭的证明，使读者易于接受. 这就使得此书既可成为有关研究人员的一本有益的参考书，又可作为研究生课程的适用的教材. 相信广大读者将会喜爱这本书.

罗定军

一九八九年一月

符 号 表

$\boldsymbol{R}^n$	n 维欧氏空间
$\boldsymbol{R}$	实数集
$\boldsymbol{Z}$	整数集
$\boldsymbol{Z}^+$	非负整数集
$\boldsymbol{N}$	自然数集
$\#$	连通和
$:=$	定义
$\forall$	对一切
$\Rightarrow$	隐含
$\dot{\times}$	扭曲乘积
$\pitchfork$	横截相交
$\pitchfork_q$	在点 q 处横截相交
$\mathrm{Cl}(E)$	集合 E 的闭包
$F(\varphi)$	φ 的不动点集
$P(\varphi)$	φ 的周期点集
$T(\varphi)$	φ 的周期集合
$\Omega(\varphi)$	φ 的非游荡点集
$R(\varphi)$	φ 的回归点集
$L(\varphi)$	φ 的极限集
$\omega(x)$	过 x 的轨道的 ω-极限集
$\alpha(x)$	过 x 的轨道的 α-极限集
$L(x)$	$\omega(x)\cup\alpha(x)$
$\mathrm{Orb}_f(x)$	f 过点 x 的轨道
$\mathrm{Orb}_f^+(x)$	f 从点 x 出发的正半轨道
$\mathrm{Orb}_f^-(x)$	f 从点 x 出发的负半轨道
S^2	二维球面
T^2	二维环面
K^2	Klein 瓶

$f \circ g$	f 和 g 的复合
$C^r(M, N)$	从M到N的 C^r 映射空间
$Diff^r(M)$	由M上 C^r 同胚的全体赋以 C^r 拓扑构成的空间
$\mathfrak{X}^r(M)$	由M上 C^r 向量场的全体赋以 C^r 拓扑构成的空间

目　　录

第一章 基本概念

§1 概 述

1927年,大数学家 G. D. Birkhoff 首先用"动力系统"为名发表了他的专著[11]. 实际上,动力系统的理论,最早起源于天体力学问题(特别是三体问题)中常微分方程定性理论的研究. 早在上世纪末,法国大数学家 H. Poincaré 在其著名的经典著作《Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste》中,创立了微分方程定性理论.

一个随时间演变的系统 S,如果它的运动可归结为一常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=\Phi(x), \tag{1.1.1}$$

其中 $x\in\boldsymbol{R}^n$,$\Phi\in C^1(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$,则称系统 S 为古典动力系统.

给定了初始条件

$$x(0)=x_0, \tag{1.1.2}$$

方程组(1.1.1)的满足初始条件(1.1.2)的解记为 $\varphi(t,x_0)$. 如对每一个 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$,初值问题的解 $\varphi(t,x_0)$ 的存在时间均可延拓至 $\pm\infty$,则映射 $\varphi:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 应对一切 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 及 $t,s\in\boldsymbol{R}$ 满足

(1) $\varphi(0,x)=x$,

(2) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$.

满足条件1)和2)的映射 $\phi:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$,有时亦称为 C^1 流,并记作 φ_t.

集合 $\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\{\varphi(t,x):t\in\boldsymbol{R}\}$ 称为系统 S 的经过初始点 x 的轨道,或称为流 ϕ_t 的经过 x 点的轨道.

系统S的运动轨道$\gamma=\mathrm{Orb}_{\varphi}(x)$的性质（特别是$\gamma$的渐近性态）的研究，用H. Poincaré的方法，往往又归结为研究一个光滑流形上的微分同胚（更一般地，一个度量空间上的连续映射）的轨道的性态或者一个保测变换的遍历性质. 前者往往被称为微分动力系统（更一般地，半拓扑动力系统），而后者则被称为遍历性理论.

继H. Poincaré之后，G. Birkhoff, E. Hopf, A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, D. V. Anosov, J. Moser, S. Smale, Y. G. Sinai, C. Pugh和我国数学家廖山涛等人对遍历理论和微分动力系统的研究都作出了杰出的贡献.

一般来说，拓扑动力系统及遍历理论早在G. Birkhoff时代就已取得了相当的成就（[10]、[11]），而微分动力系统的研究则是从本世纪60年代巴西数学家M. Peixoto研究二维流形上流的结构稳定性问题（[12]）开始的. 而仅仅经过十来年时间，S. Smale学派就大致奠定了离散的微分动力系统关于结构稳定性理论的框架. 我国廖山涛教授以其独特的体系，为动力系统结构稳定性理论的建立作出了重大的贡献. 其后，动力系统理论的发展有两个值得注意的新趋向. 其一是微分动力系统与遍历理论的互相渗透、融合，将紊动（Chaos）现象和拓扑熵、Lyaponov特征指数等结合起来研究，力图更深入地揭示紊动现象的数学、物理本质；其二是动力系统数学理论的研究与自然科学中的其它分支日益紧密地结合起来，出现了多种学科的理论研究和应用研究工作者协同作战的局面.

动力系统理论是多学科的交叉，它在力学、统计物理、电学、流体力学、化学工程、生物学和生态学等方面有着日益广泛的应用. 正因为如此，动力系统的理论所使用的方法涉及到了数学的几乎所有的分支. 特别地，动力系统的理论与常微分方程、偏微分方程、泛函分析、微分几何、微分拓扑、代数拓扑、测度论、概率论和数论等数学分支有着格外密切的联系. 因此，动力系统理论的发展

将给数学其它众多分支的发展提出新的问题和提供新的动力．同时，这也要求本书的读者对上述几门数学学科的基础理论和基本方法有一定的基础或相当的了解．当然，对于必需的其它数学分支的基础知识，本书将尽可能地在适当的章节给以简略的介绍．

§2 动力系统的定义

动力系统的理论是研究某个空间X上的连续变换(半)群G的作用的，而其中最重要的是G为流形上的微分同胚群或保测变换群这两种情况．

下面，我们给动力系统下一个严格的定义，并按惯常的说法给以适当的分类．

定义 1.2.1 设X是一个相空间，$T=\boldsymbol{R}^+$或$\boldsymbol{Z}^+$，对任意$x\in X$，x称为一个“状态”，而$t\in T$称为时间．

连续映射$\varphi:T\times X\to X$若满足半群性质：

(1) $\varphi(0,x)=x,\forall x\in X$；

(2) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x)),\forall s、t\in T,x\in X$，

则称(X,φ)为半动力系统．当$T=\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{Z}$，且φ是可逆映射时，称(X,φ)为动力系统．当$T=\boldsymbol{R}$(或$\boldsymbol{R}^+$)时，称(X,φ)为连续(半)动力系统或连续(半)流．当$T=\boldsymbol{Z}$(或$\boldsymbol{Z}^+$)时又称(X,φ)为离散(半)动力系统．

为叙述方便计，记$\varphi(t,x)$为$\varphi^t(x)$，则$\varphi^t:X\to X$，(半)群性质可改写为

(1) $\varphi^0=\mathrm{id}$；

(2) $\varphi^{s+t}=\varphi^s\circ\varphi^t,\forall s、t\in T$．

定义 1.2.2 在定义 1.2.1 中，若$T=\boldsymbol{Z}^+$(或$\boldsymbol{Z}$)，而$(X,\mathscr{B},m)$是一个正则化测度空间(即$\mathscr{B}$是X的子集的σ-代数，而m是X上的概率测度)，φ^t是(可逆)保测变换(即对任意$A\in\mathscr{B}$，$\varphi^{-1}(A)\in\mathscr{B}$且$m(\varphi^{-1}(A))=m(A)$)，则$(X,\mathscr{B},m,\varphi)$称为抽象半动力系

统(抽象动力系统)或度量半动力系统(度量动力系统).

研究抽象或度量动力系统的理论称为遍历理论.

在第九章中，本书将围绕着所谓的 Lyapunov 特征指数的存在性问题，扼要地介绍几个重要的遍历定理.在那里，对定义1.2.2中的有关概念将给出更明确的定义.

定义 1.2.3 在定义 1.2.1 中，若X是紧致的可度量空间，$T=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{Z}$($\boldsymbol{R}^+$ 或 $\boldsymbol{Z}^+$)，φ^t 为同胚(连续映射)，则(X,φ)称为(半)拓扑动力系统.

定义 1.2.4 在定义 1.2.1 中，若X是一个 C^r 微分流形，φ^t 是 C^r 同胚(映射)，则当 $T=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}^+)$时$(X,\varphi)$称为 C^r(半)流；当 $T=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}^+)$时，$(X,\varphi)$称为 C^r(半)动力系统.

紧致的 $C^r(r\geqslant1)$ 微分流形X上的一个 C^r 向量场，总能产生X上的一个 C^r 流.

当 $r\geqslant1$ 时，C^r 流和 C^r 动力系统又常称为光滑动力系统.

§3 嵌入和扭扩

现在，我们来讨论流和离散动力系统的关系.

设(X,φ)是一个流. 为确定起见，设对任意 $t\in T=\boldsymbol{R}$，$f=\varphi^t$: $X\to X$ 是 C^r 同胚. 于是，

(1) $f^0:=\varphi^0=\mathrm{id}$,

(2) $f^{n+m}=f^n\circ f^m=\varphi^{nt}\circ\varphi^{mt}, \forall n,m\in\boldsymbol{Z}$,

即$\{f^n\}$是X上的一个 C^r 同胚群. 故(X,f)是一个 C^r 离散动力系统.

这就是说，任意一个 C^r 流，都可以经任意地离散化(相应于任意指定一个时刻 t)而产生一个离散动力系统.

反过来，设(X,f)是一个 C^r 离散动力系统，其中 f 是 C^r 同胚.

定义 1.3.1 若存在 C^r 流(X,φ)及 $t\in\boldsymbol{R}$，使得 $f=\varphi^t$，则称

同胚 f 可以嵌入 C^r 流.

一般来说，一个 X 上的 C^r 同胚 f（从而确定了一个 C^r 离散动力系统 (X,f)）不一定能嵌入 C^r 流.

但是，我们可以通过扭扩(suspension)的办法，将任意一个离散动力系统 (X,f) 同所谓的扭扩流 $(\widetilde{X},\widetilde{\varphi})$ 联系起来，即可以将 f 嵌入到高一维的流形上的 C^r 流中去.

具体做法如下.

设 X 是一个 C^r 流形，$f:X\to X$ 是 C^r 同胚. 在积流形 $\boldsymbol{R}\times X$ 上定义一个单位向量场，方向指向 $\boldsymbol{R}$ 的方向. 此向量场在 $\boldsymbol{R}\times X$ 上产生一个 C^r 流 φ^t，满足

$$\varphi^t((s,x))=(t+s,x),\forall x\in X,\quad s、t\in \boldsymbol{R}.$$

在 $\boldsymbol{R}\times X$ 上定义等价关系"$\sim$"：

$(t,x)\sim(s,y)$ 当且仅当 $t-s\in \boldsymbol{Z}, y=f^{t-s}(x)$.

记 $\widetilde{X}=\boldsymbol{R}\times X/\sim$，$I=[0,1]$. 由图 1.3.1 和 1.3.2 易见商空间 $\widetilde{X}$ 是由粘合 $I\times X$ 的两端而得到的，即将 $(1,x)$ 与 $(0,f(x))$ 相等同. 于是，$\boldsymbol{R}\times X$ 上的流 φ^t 诱导出 $\widetilde{X}$ 上的 C^r 流 $\widetilde{\varphi}^t$. 从直观上看，流 $\widetilde{\varphi}^t$ 是由横截于截面 $\{0\}\times X$ 的连接点 x 与 $f(x)$ 的曲线组成其轨道族的(图 1.3.2)，而 f 则恰好是流 $\widetilde{\varphi}^t$ 在截面 $\{0\}\times X$ 上的首次回归映射或 Poincaré 映射.

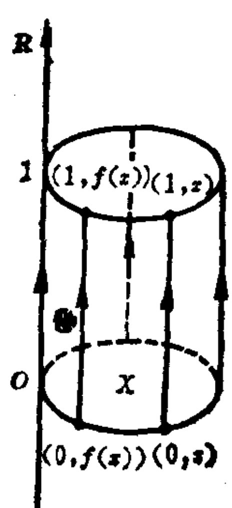

图 1.3.1

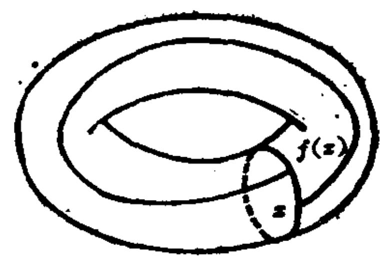

图 1.3.2

注意，由扭扩得到的流不存在奇点．另外，扭扩流形$\widetilde{X}$可以是不可定向的．例如，当X是单位圆，而f是关于x轴的对称变换时，$\widetilde{X}$就是一个 Klein 瓶．

§4 不变集、拓扑分类和结构稳定性

设(X,φ)是一个拓扑(或C^r)动力系统，$T=\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{Z}$．为方便计，用T^+表$\boldsymbol{R}^+$或$\boldsymbol{Z}^+$，T^-表$\boldsymbol{R}^-$或$\boldsymbol{Z}^-$．

对任意$x\in X$，集合

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\{\varphi^t(x):t\in T\},$$
$$\mathrm{Orb}_\varphi^+(x)=\{\varphi^t(x):t\in T^+\},$$
$$\mathrm{Orb}_\varphi^-(x)=\{\varphi^t(x):t\in T^-\}$$

分别称为系统(X,φ)或φ的过点x的轨道、正半轨和负半轨．

当(X,φ)为半动力系统时，则称$\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\mathrm{Orb}_\varphi^+(x)$为系统$(X,\varphi)$或$\varphi$的过$x$点的轨道．

定义 1.4.1 设(X,φ)是离散动力系统，若存在$n\in\boldsymbol{N}$，使得$\varphi^n(x)=x$，则称x为φ的周期点，并把使得$\varphi^n(x)=x$成立的最小正整数n称为x的周期．周期为1的点x通常称为φ的不动点．φ的周期点和不动点的集合分别记为$P(\varphi)$和$F(\varphi)$．φ的所有周期点的周期集合记为$T(\varphi)$．对任意$x\in P(\varphi)$，轨道$\mathrm{Orb}_\varphi(x)$称为φ的周期轨道．

当(X,φ)为流时，可类似地定义周期和周期轨道．

当(X,φ)为半动力系统时，则可以存在非周期的有限轨道．即存在$x\overline{\in}P(\varphi)$，但对某个$n\in\boldsymbol{N}$，成立$\varphi^n(x)\in P(\varphi)$．一般地，若存在$n\in\boldsymbol{Z}^+$，使得$\varphi^n(x)\in P(\varphi)$，则称$x$和$\mathrm{Orb}_\varphi(x)$分别为$\varphi$的准周期点和准周期轨道．

定义 1.4.2 对任意$x\in X$，集合

$$\omega(x)=\{y:\exists t_n\in T,t_n\to+\infty,\text{使得 }\varphi^{t_n}(x)\to y\},$$
$$\alpha(x)=\{y:\exists t_n\in T,t_n\to-\infty,\text{使得 }\varphi^{t_n}(x)\to y\}$$

及

$$L(x)=\omega(x)\bigcup\alpha(x)$$

分别称为动力系统(X,φ)的轨道 $\mathrm{Orb}_\varphi(x)$的 ω-极限集、α-极限集和极限集.

记 $L(\varphi)=\bigcup\limits_{x\in X}L(x)$. 并称其为 φ 的极限集.

定义 1.4.3 对 $x\in X$，若存在 x 的邻域 U，使得对任意 $t\in T,|t|\geqslant 1$，均成立

$$\varphi^t(U)\bigcap U=\varnothing,$$

则称 x 为 φ 的游荡点. 不是游荡点的点称为非游荡点. 即若 x 是 φ 的非游荡点，则对 x 的任意邻域 U，均存在 $t\in T,|t|\geqslant 1$，使得 $\varphi^t(U)\bigcap U\neq\varnothing$.

φ 的非游荡点的集合记为 $\Omega(\varphi)$.

命题 1.4.1 $F(\varphi)\subset P(\varphi)\subset L(\varphi)\subset\Omega(\varphi)$.

定义 1.4.4 若 $\mathrm{Orb}_\varphi(\Lambda):=\bigcup\limits_{x\in\Lambda}\mathrm{Orb}_\varphi(x)\subset\Lambda$，那么称集合 $\Lambda\subset X$ 为 φ 的不变集.

命题 1.4.2 若(X,φ)是动力系统，则 $\Lambda\subset X$ 为 φ 的不变集的充分必要条件是 $\varphi(\Lambda)=\Lambda$.

命题 1.4.3 对任意 $x\in X$，$\mathrm{Orb}_\varphi(x)$、$\omega(x)$、$\alpha(x)$、$L(x)$及$P(\varphi)$、$F(\varphi)$、$\Omega(\varphi)$均为不变集，且当X为紧致空间时，$\omega(x)$、$\alpha(x)$、$L(x)$和 $\Omega(\varphi)$均是非空闭集合.

定义 1.4.5 若 $\Lambda\subset X$ 是 φ 的非空、闭的不变集，且不含具有同样性质的真子集，则 Λ 称为 φ 的极小集. 当X是极小集时，称(X,φ)为极小动力系统.

定义 1.4.6 两个(半)动力系统(X,f)，(Y,g)称为拓扑共轭的，如果存在同胚 $h:X\to Y$，使得对任意 $t\in T$，下面的图表可交换.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^t"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g^t"] & Y \end{tikzcd}$$

换言之，对一切 $t\in T$，成立

$$h\circ f^t = g^t\circ h.$$

易见，当 $T=\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}^+$ 时，上面的条件等价于

$$h\circ f = g\circ h.$$

命题 1.4.4 拓扑共轭是等价关系.

命题 1.4.1—1.4.4 的证明作为练习(习题 1.1).

若 h 是将(X,f)拓扑共轭于(Y,g)的同胚，则 h 将系统(X,f)的轨道变成系统(Y,g)的轨道，将 f 的 n-周期轨道变为 g 的 n-周期轨道. 并且，h 把 f 的不变集变为 g 的相应的不变集.即(X,f)与(Y,g)有完全相同的轨道结构，两者之间仅差一个同胚.

因此，我们可将两个互相拓扑共轭的系统视为等同.

定义 1.4.7 设(X,f)和(Y,g)是两个动力系统，$p\in X$，$q\in Y$，若存在分别包含 p、q 的开集 $U\subset X$、$V\subset Y$ 及同胚

$$h: U\cup f(U)\to V\cup g(V),$$使得

(1) $h(p)=q$,

(2) $h(U)=V$,

(3) $h\circ f|_U = g\circ h|_U$,

则称 f 在 p 点与 g 在 q 点是局部拓扑共轭的.

微分动力系统的最主要的研究内容之一是结构稳定性.

定义 1.4.8 设 X 为 C^r 流形，(X,f)是 C^r 动力系统，称 f 是 C^r 结构稳定的，若存在 f 在 X 的 C^r 自同胚空间 $\mathrm{Diff}^r(X)$中的邻域 U^*，使对任意 $g\in U^*$，g 与 f 拓扑共轭.

定义 1.4.9 设 $U\subset X$ 为开集，$f\in C^r(U,X)$是从 U 到 $f(U)$ 的 C^r 同胚，其中 X 为 C^r 流形. 对点 $p\in U$，称 f 在 p 点是局部结构稳定的，若存在 p 点的邻域 $V\subset U$，及 f 在 $C^r(U,X)$中的邻域