高 等 数 学

（上 册）

刘景麟 等编

河海大学出版社

高等数学（上）

刘景麟等　编

河 海 大 学 出 版 社

责任编辑　龚　俊

高等数学(上)
刘景麟等　编

出版发行:河 海 大 学 出 版 社
(南京西康路 1 号,邮政编码:210024)
经　　销:江 苏 省 新 华 书 店
印　　刷:南 京 京 新 印 刷 厂
(地址:南京大桥北　邮政编码:210031)

开本 787×1092 毫米　1/16　　印张 17.75　　字数 454 千字
1996 年 9 月第 1 版　　1996 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—5000 册

ISBN7—5630—1002—5

O·62　　　　定价:(上、下册)39.50 元

1118S122

一、通用数学符号

N	自然数集	the set of positive integers
Z	整数集	the set of integers
Q	有理数集	the set of rational numbers
R	实数集	the set of real numbers
C	复数集	the set of complex numbers
$\varnothing$	空集	empty set
$\{x \in I \mid P(x)\}$		集合 I 中使命题 P 成立的元素组成的集合 set of elements of I such that proposition P holds
$\in$	属于…	belongs to, is an element of
$\forall$	对每一个…	for every, for each
$\exists$	存在…	there exists
$\Rightarrow$	推导出…	implies
$\Leftrightarrow$	当且仅当，充分必要条件是	if and only if(iff) is equivalent to
Σ	和号	sum
Π	乘积号	product

二、希腊字母表

Α α	alpha	阿耳法
Β β	beta	彼塔
Γ γ	gamma	伽马
△ Δ	delta	德耳塔
Ε ε	epsilin	厄普西隆
Ζ ζ	zeta	仄塔
Η η	eta	以塔
Θ θ	theta	西塔
Ι ι	iota	爱俄塔
Κ κ	kappa	卡帕
Λ λ	lambda	兰达
Μ μ	mu	缪
Ν ν	nu	纽
Ξ ξ	xi	克塞
Ο ο	omicron	俄密克戎
Π π	pi	珀
Ρ ρ	rho	洛

Σ σ	sigma	西格马
Τ τ	tau	陶
Υ υ	upsilon	宇普西隆
Φ φ	phi	斐
Χ χ	chi	凯
Ψ ψ	psi	普塞
Ω ω	omega	俄墨伽

三、科学家人名对照

Pythagoras	B.C.560—B.C.480	古希腊数学家、天文学家、哲学家
Euclid	B.C.300	古希腊几何学家
Archimedes	B.C.287—B.C.212	古希腊数学家、力学家、天文学家
F. Viète	1540—1603	法国数学家
G. Galileo	1564—1642	意大利物理学家、天文学家
R. Descartes	1596—1650	法国数学家、物理学家、哲学家
F. Cavalieri	1598—1647	意大利数学家
P. Férmat	1601—1665	法国律师、业余数学家
E. Torricelli	1608—1647	意大利物理学家
I. Newton	1643—1727	英国数学家、物理学家
G. Leibniz	1646—1716	德国数学家、哲学家
M. Rolle	1652—1719	法国数学家
Jakob Bernoulli	1654—1750	瑞士数学家
G. - F. - A. de L'Hospital	1661—1704	法国数学家
Johann Bernoulli	1667—1748	瑞士数学家
A. de Moivre	1667—1754	法国数学家
B. Taylor	1685—1731	英国数学家
J. Stirling	1692—1770	英国数学家
C. Maclaurin	1698—1746	英国数学家
L. Euler	1707—1783	瑞士数学家
T. Simpson	1710—1761	英国数学家
J. d'Alembert	1717—1783	法国数学家
C. Coulomb	1736—1806	法国物理学家
J. Lagrange	1736—1813	法国数学家
P. Laplace	1749—1827	法国数学家、天文学家
A. Legendre	1752—1833	法国数学家
J. Fourier	1768—1830	法国数学家
C. Gauss	1777—1855	德国数学家

S. Poisson	1781—1840	法国数学家
B. Bolzano	1781—1848	捷克数学家
F. Bessel	1784—1846	德国天文学家、数学家
A. Cauchy	1789—1857	法国数学家
A. Möbius	1790—1868	德国数学家、天文学家
G. Green	1793—1841	英国物理学家、数学家
N. Abel	1802—1829	挪威数学家
C. Jacobi	1804—1851	德国数学家、力学家
P. Dirichlet	1805—1859	德国数学家
W. Hamilton	1805—1865	英国数学家、物理学家
J. Liouville	1809—1882	法国数学家
E. Galois	1811—1832	法国数学家
K. Weierstrass	1815—1897	德国数学家
G. Stokes	1819—1903	英国数学物理学家
A. Cayley	1821—1895	英国数学家
C. Hermite	1822—1901	法国数学家
L. Kronecker	1823—1891	德国数学家
G. Riemann	1826—1866	德国数学家
J. Maxwell	1831—1879	英国物理学家
R. Lipschitz	1832—1903	德国数学家
J. Darboux	1842—1917	法国数学家
H. Schwarz	1843—1921	德国数学家
G. Cantor	1845—1918	德国数学家
F. Klein	1849—1925	德国数学家
H. Poincaré	1854—1912	法国数学家
D. Hilbert	1862—1943	德国数学家

前　　言

本书是在刘景麟教授1989年讲授计算机系高等数学课程(180学时左右)所写讲义的基础上经过两次修订整理,最后由刘景麟统稿而成．参加这两次修订的老师有丁莲珍、王京、王海鹰、陈寅、纽群、郁大刚、范锦芳和徐晓明．讲义在河海大学若干专业试用过多次．为了便于教学,每节都配有一定数量的习题．

高等数学是工科各专业的一门主课,为适应时代的发展、科学的进步,应当作相应的改革．本书作了一些初步的尝试,这些想法写在后记中,供使用本书的老师参考．

我们水平和经验有限,书中不妥和错误之处难免,诚恳地欢迎读者提出意见,批评指正,以便更好改进．

编者

1996年5月

目　　录

第一篇　一元函数的微积分

第一章　极　　限

第一节　函　　数

一、变量

在自然现象中我们常会碰到各种各样的量，它们在所考察的过程中呈现出不同的特性．有的量在整个过程中不发生变化，保持一个常值；另一些量却处在不断变化之中，随着过程的进展不断地改变着它们的取值．我们通常称保持常值的量为常量，称不断改变取值的量为变量．常量与变量是相对的，在一定的条件下会相互转化．例如重力加速度 g 是一个与地点和高度有关的变量，但是当我们考虑地表附近的物体运动时，由于 g 的变化微不足道，所以我们通常也将它当作常量来处理．而当我们考虑飞向太空的飞行器时，就必须将 g 当作变量来对待．

通常我们在习惯上用 a、b、c、α、β、γ 等字母表示常量，而用 x、y、z、t、ξ、η、ζ 等字母表示变量．

在考虑变量时，它的取值范围是考虑的重点之一．通常变量的取值范围是实数集合 R 的一个子集，这样的变量称之为实变量．不同的变量取值范围通常是不一样的，有些可以取到全部实数（例如时间 t），有些只能取到实数集合 R 的一部分（例如温度℃），有的甚至只能取到若干个孤立的数值（例如水的沸点℃）．变量取值范围的最基本形式是区间．集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$．显然，当 $a = b$ 时，开区间 (a, b) 是空集，闭区间 $[a, b]$ 是单点集．用类似的方法我们记：$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，称为半开半闭区间．开区间、闭区间、半开半闭区间简称为区间，a、b 称为区间的左、右端点，$b - a$ 称为区间的长度．当 a、b 是实数时，以 a、b 为左、右端点的区间称为有限区间．

为了更好地用区间来表示变量的取值范围，我们引入记号：$+\infty$，$-\infty$．$+\infty$ 表示正无穷大，$-\infty$ 表示负无穷大（$+\infty$、$-\infty$ 仅仅是一个记号，不表示任何实数值）．于是我们有 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$，$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$，类似的有 $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b]$，特别 $(-\infty, +\infty) = R = \{x \mid x$ 是实数$\}$．区间 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, +\infty)$ 的长度都是 $+\infty$，所以我们称它们为无穷区间．

区间是实数集合 R 的一部分，像实数集合 R 可以用实数轴来形象地表示一样，区间也有类似的表示方法．例如图 1-1：

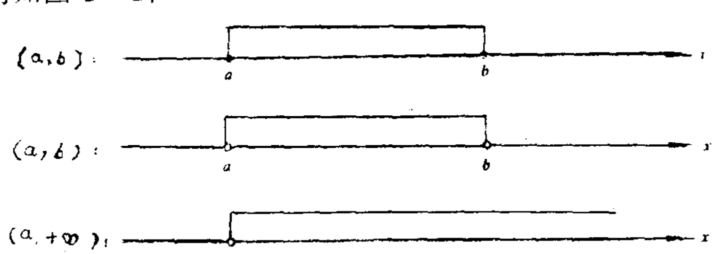

图 1-1

与区间有关的另一个重要概念是邻域．设 x_0 是任一实数($x_0 \in R$)，ε 是一个正实数，称开区间($x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon$)为 x_0 的 ε 邻域，记作 $N(x_0,\varepsilon)$．显然，$N(x_0,\varepsilon)$在几何上表示以 x_0 为对称中心，ε 为半径的开区间，区间长度为 2ε(图 1-2)．邻域内的任何一点到 x_0 的距离都小于 ε，所以 ε 起到一个刻划邻域内点 x 与 x_0 靠近程度的作用．ε 越小，邻域内的点 x 就与 x_0 的距离越小．显然，$x \in N(x_0,\varepsilon)$的充分必要条件是$|x-x_0|<\varepsilon$．用数学符号可以表示成 $x \in N(x_0,\varepsilon)(x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) \Leftrightarrow |x-x_0|<\varepsilon$．特别称$(-\infty, b)$和$(a,+\infty)$为 $-\infty$ 和 $+\infty$邻域．

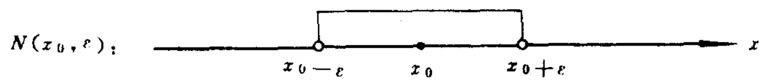

图 1-2

二、函数

定义 1　设有两个变量 x、y，如果当变量 x 在其变化范围内任取一个值，变量 y 就按照一定的对应法则 f 取得唯一的一个与之对应的值，则称 y 是 x 的函数，记此函数为 f(或 $f(x)$)．称 x 为函数 f 的自变量，y 为函数 f 的因变量，$y=f(x)$为函数 f 在 x 处的函数值．自变量 x 的变化范围称为函数 f 的定义域，记为 D_f，因变量 y 所有可能取到的值所构成的集合称为函数 f 的值域，记为 R_f．

显然，在函数的定义里，涉及到两个集合——定义域 D_f 和值域 R_f 和一个对应法则 f．其中定义域 D_f 和对应法则 f 在函数关系中起着决定作用，而值域 R_f 完全由 D_f 和 f 决定．

函数关系用数学符号可以表示为

$$f: D_f \longrightarrow R_f$$

$$x(\in D_f) \xrightarrow{f} y=f(x)(\in R_f)$$

前者表示函数 f 是 D_f 到 R_f 的一个确定的对应关系，后者表示对应法则 f 将 $x \in D_f$ 对应到 $y=f(x) \in R_f$．

例如正弦函数 sin 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,1]$．而函数 sin 是$(-\infty,+\infty)$到$[-1,1]$的一个确定的对应关系

$$\sin:(-\infty,+\infty) \longrightarrow [-1,1]$$

$\sin 0=0$ 和 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$则表示 0、$\frac{\sqrt{3}}{2}$是正弦函数 sin 在 0 和$\frac{\pi}{3}$处的函数值．

最后我们再次强调，在函数关系中起决定作用的是定义域 D_f 和对应法则 f 这两个基本要素．两个函数是否相等(即为同一个函数)，取决于函数的这两个要素是否完全相同．例如对应法则分别为 $f(x)=\lg(x^2)$、$g(x)=2\lg x$ 的函数 f 和 g 就是两个不同的函数，这是因为它们的定义域不同，分别为

$$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty), D_g=(0,+\infty)$$

例 1　$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

这是用一个表达式给出的函数．定义域 $D_f=[-1,1]$，对应法则 $f: x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$．

例 2　$f(x)=\begin{cases} -(1+x^2), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$

这是用若干个表达式分段定义的函数(通常称为分段函数).定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,对应法则为:当 $x<0$ 时,$f:x\to-(1+x^2)$;当 $x=0$ 时,$f:0\to0$;当 $x>0$ 时,$f:x\to1+x^2$.于是 $f(-2)=-[1+(-2)^2]=-5$, $f(3)=1+3^2=10$.

例 3 符号函数 sgn

这是一个特殊的分段函数.定义域 $D_{\text{sgn}}=(-\infty,+\infty)$,对应法则

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

于是 $\operatorname{sgn}(0.7)=1$, $\operatorname{sgn}(\pi-4)=-1$.

例 4 取整函数 E(或$[\cdot]$)

这也是一个特殊的常用分段函数.定义域 $D_E=(-\infty,+\infty)$,对应法则 $E:x\to$不超过 x 的最大整数.于是 $E(-\pi)=[-\pi]=-4$, $E(7)=[7]=7$, $E\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$, $E(-\sqrt{5})=[-\sqrt{5}]=-3$.

例 5 Dirichlet 函数 D

Dirichlet 函数是一个有着多种奇特性质的函数,它的定义域 $D_D=(-\infty,+\infty)$,而值域 $R_D=\{0,1\}$.它的对应法则是将有理数对应到 1,将无理数对应到 0,即

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数}\\ 1, & x\text{ 是有理数}\end{cases}$$

因此,只要我们能判定 x 是无理数还是有理数,就可以确定它所对应的函数值,于是 $D\left(-\frac{3}{7}\right)=1$, $D(\sqrt{2})=0$(尽管有一些实数,如 Euler 数 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$,我们至今还弄不清它究竟是有理数还是无理数,但 D 仍然是一个确定的函数).德国数学家 Dirichlet(1805—1859)在分析学方面是最早提倡严格化的数学家之一,1837 年,他放弃了当时流行的函数是用数学符号和运算组成的表达式的观点,首先提出函数 f 是自变量 x 与因变量 y 之间的一个对应这一现代数学观点.

三、函数的几何表示(函数的图形)

设 f 是给定的函数,称平面点集 $\{(x,f(x))\mid x\in D_f\}$ 为函数 f 的图形,记为 $G(f)$,实际上函数 f 的图形是那些满足函数表达式 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 在平面上形成的轨迹.

按照函数的定义,$\forall x\in D_f$,只有唯一的 $y=f(x)$ 与之对应,所以任何平行于 y 轴的直线与函数图形的交点至多只有一个(图 1-3).

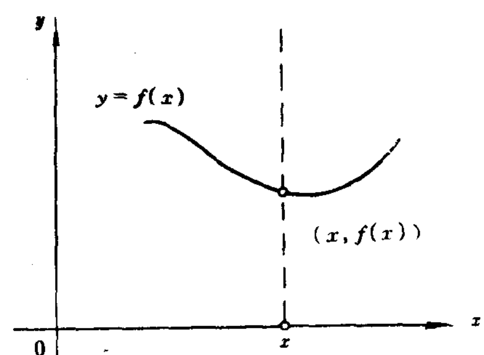

图 1-3

借助于函数的几何表示,建立起分析学研究对象——函数与几何学研究对象——曲线之间的关系.一方面,这个关系在研究函数性质时给我们一个直观的几何形象,另一方面,也使得我们可以利用分析学的工具去研究图形、曲线的几何性质.

现在我们来简单地看一下前面那些例子中函数的图形:

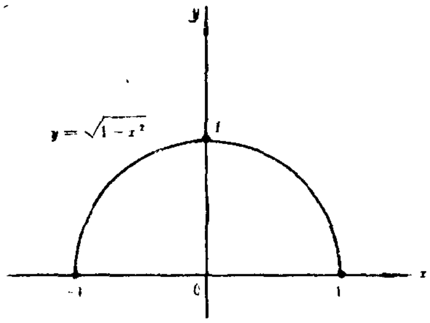

图 1-4

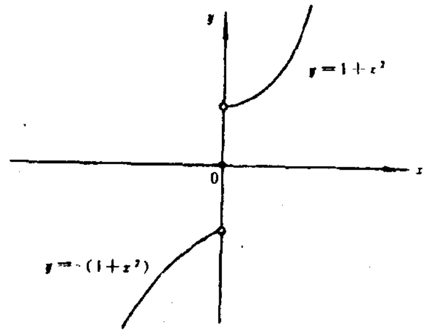

图 1-5

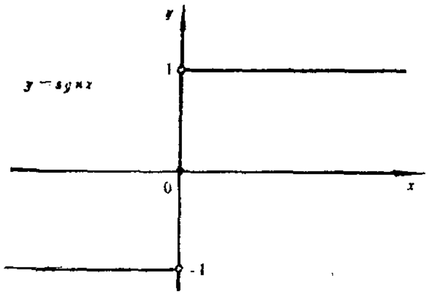

图 1-6

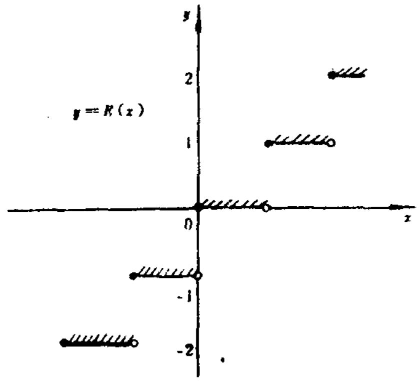

图 1-7

由于有理数和无理数在实数中都是稠密的，且任何两个无理数之间必有一个有理数，任何两个有理数之间也必有一个无理数，所以 Dirichlet 函数 D 的图形在平面上是两行密集的处处断开的点，没有任何一部分是连在一起的．

四、函数的运算

函数的四则运算与数的四则运算是相似的．设 f、g 是两个函数，则

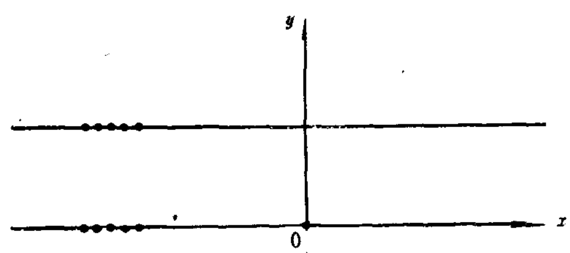

图 1-8

1．函数的和 $f \pm g$：

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g,\ (f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\quad x\in D_{f\pm g}$$

2．函数的积 $f\cdot g$：

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g,\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in D_{f\cdot g}$$

3．函数的商 f/g：

$$D_{f/g}=D_f\cap\{x\mid x\in D_g,\ g(x)\neq 0\},\ (f/g)(x)=f(x)/g(x),\quad x\in D_{f/g}$$

重要的是下面引入的复合函数的概念．

定义 2 设函数 f 和 g 满足 $R_f\cap D_g\neq\varnothing$，则可以在 $D_{g\circ f}=\{x\mid x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}$ 上定义一个新函数 $g\circ f$，其对应法则是

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\quad x\in D_{g\circ f}$$

称新函数 $g\circ f$ 为 f 与 g 的复合函数．

显然，当 $R_f\subset D_g$ 时，$D_{g\circ f}=D_f$．

例如 $\sin(x^2+5)$ 是 $f(x)=x^2+5$ 与 $g(x)=\sin x$ 的复合函数．因为 $D_g=(-\infty,+\infty)$，所以 $R_f\subset D_g$，$D_{g\circ f}=D_f=(-\infty,+\infty)$．且

$$g\circ f: x \xrightarrow{f} x^2+5 \xrightarrow{g} \sin(x^2+5),\ x\in(-\infty,+\infty).$$

$\lg(x^3+1)$是 $f(x)=x^3+1$ 与 $g(x)=\lg x$ 的复合函数．因为 $D_g=\{x\mid x>0\}$，所以 $D_{g\circ f}=\{x\mid x^3+1>0\}=\{x\mid x>-1\}=(-1,+\infty)$．且

$$g\circ f: x \xrightarrow{f} x^3+1 \xrightarrow{g} \lg(x^3+1),\ x\in(-1,+\infty).$$

按照定义 2，函数可以进行多次复合．例如 $\sin(\cos(\lg x+1))$是 $f(x)=\lg x+1$，$g(x)=\cos x$，和 $h(x)=\sin x$ 的复合函数 $h\circ g\circ f$．这里需要指出的是，当 $R_f\cap D_g=\varnothing$ 时，复合函数 $g\circ f$是没有实际意义的．

五、反函数

定义 3　设两个函数 f 和 g 满足

① $D_g=R_f$

② $g(f(x))=x,\ x\in D_f$

则称 g 为 f 的反函数(通常记为 f^{-1})．

定义 3 明确地给出了反函数 g 的两个要素．定义域 $D_g=R_f$，对应法则：$\forall u\in D_g=R_f$，$\exists x\in D_f$ 使得 $f(x)=u$，则 $g(u)=g(f(x))=x$．

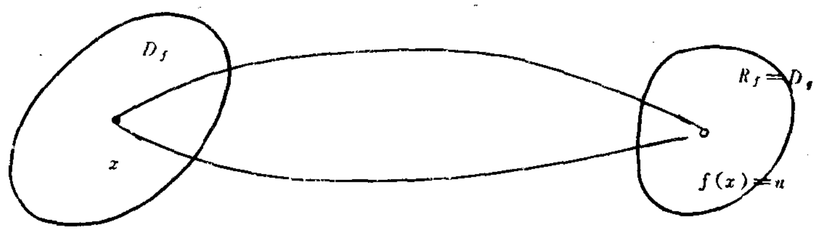

图 1－9

从图 1－9 可以领会到为什么把 g 称为是 f 的“反”函数．同时，从这张图上也不难发现 f 和 g 的地位是对称的．因此我们有：

定理 1　如果 g 是 f 的反函数，则 f 也是 g 的反函数．

证明：　要证明 f 是 g 的反函数，依据反函数的定义只要证明：①$D_f=R_g$，②$f(g(u))=u,\ u\in D_g$．利用 g 是 f 的反函数，我们有：

$\because\ \forall x\in D_f,\ f(x)\in R_f=D_g$，而 $x=g(f(x))\in R_g$

$\therefore\ D_f\subset R_g$

又 $\because\ \forall v\in R_g,\ \exists u\in D_g$，使得 $g(u)=v$，由 $u\in D_g=R_f$

$\therefore\ \exists x\in D_f$ 使得 $f(x)=u$

$\therefore\ v=g(u)=g(f(x))=x\in D_f$

$\therefore\ R_g\subset D_f$

$\therefore\ R_g=D_f$，①成立．

另一方面，$\forall u\in D_g$，$\because D_g=R_f$，$\therefore \exists x\in D_f$，使得 $f(x)=u\in D_g$，于是 $f(g(u))=f(g(f(x)))=f(x)=u$．②成立．

定理 2　如果 g 是 f 的反函数，则它们的图形 $G(f)$与 $G(g)$关于直线 $y=x$ 对称(图 1－10)．

证明：$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in D_f\}$，显然，$G(f)$关于直线 $y=x$ 对称的集合是$\{(f(x),$

$x) | x \in D_f\}$. 我们要证明 $G(g) = \{(f(x), x) | x \in D_f\}$.

由定理 1 知 f 与 g 互为反函数，且 $G(g) = \{(u, g(u)) | u \in D_g\}$. 故只需证明 $\{(u, g(u)) | u \in D_g\} = \{(f(x), x) | x \in D_f\}$.

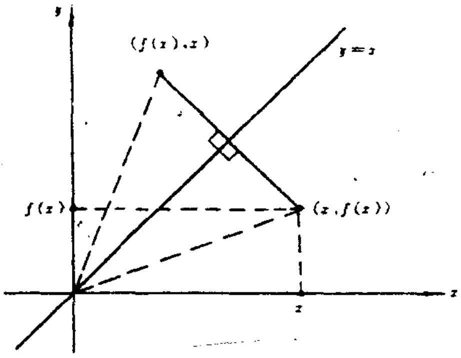

图 1-10

$\forall (f(x), x) \in \{(f(x), x) | x \in D_f\}$, $\because x \in D_f = R_g$, $\therefore \exists u \in D_g$，使得 $x = g(u)$，而 $f(x) = f(g(u)) = u$

$\therefore (f(x), x) = (u, g(u)) \in \{(u, g(u)) | u \in D_g\}$

$\therefore \{(f(x), x) | x \in D_f\} \subset \{(u, g(u)) | u \in D_g\}$

同理 $\forall (u, g(u)) \in \{(u, g(u)) | u \in D_g\}$, $\because u \in D_g = R_f$, $\therefore \exists x \in D_f$，使得 $f(x) = u$，且 $g(u) = g(f(x)) = x$

$\therefore (u, g(u)) = (f(x), x) \in \{(f(x), x) | x \in D_f\}$

$\therefore \{(u, g(u)) | u \in D_g\} \subset \{(f(x), x) | x \in D_f\}$

$\therefore \{(u, g(u)) | u \in D_g\} = \{(f(x), x) | x \in D_f\}$

上述两定理的证明过程还告诉我们，证明两个集合相互包含是证明两个集合相等的一种常用的有效方法．

例 6 指数函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, $D_f = (-\infty, +\infty)$ 与对数函数 $g(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, $D_g = (0, +\infty)$ 互为反函数(图 1-11).

例 7 三角函数 $f(x) = \sin x$, $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 与反三角函数 $g(x) = \arcsin x$, $D_g = [-1, 1]$ 互为反函数(图 1-12).

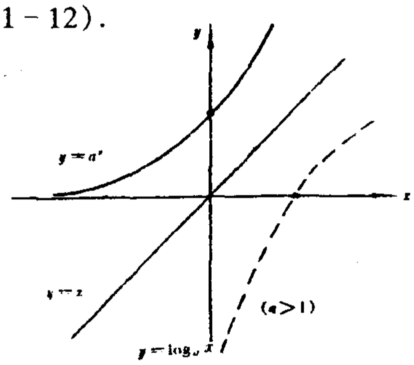

图 1-11

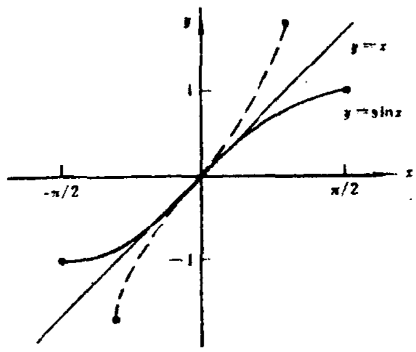

图 1-12

求函数 f 的反函数的一般方法是从方程 $y = f(x)$ 中反解出 $x = g(y)$，然后将它改写成 $y = g(x)$ 即可．

例 8 求 $y = x^2$ 的反函数．

解：由 $y = x^2$ 可反解出 $x = \pm\sqrt{y}$，将其改写，得两个函数

$$y = \sqrt{x} \text{ 和 } y = -\sqrt{x}$$

由于

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

所以，当 $x \geq 0$ 时，$\sqrt{x^2} = x$；当 $x \leq 0$ 时，$\sqrt{x^2} = -x$. 根据反函数的定义，g 是 f 的反函数应满足

$$g(f(x)) = x, x \in D_f$$

因此，$f_1(x) = x^2$, $D_{f_1} = [0, +\infty)$ 的反函数是 $g_1(x) = \sqrt{x}$, $D_{g_1} = [0, +\infty)$；而 $f_2(x) = x^2$,

$D_{f_2}=(-\infty,0]$的反函数是 $g_2(x)=-\sqrt{x}$，$D_{g_2}=[0,+\infty)$（见图 1－13）.

这个例子表明在讨论反函数时，要特别注意函数的定义域．同时并不是任何函数都有反函数的，就以 $f(x)=x^2$ 为例，当 $D_f=(-\infty,0]$或 $D_f=[0,+\infty)$时，它的反函数分别是存在的，但当 $D_f=(-\infty,+\infty)$时，它的反函数就不再存在了（图 1－13）．从几何上看，当 f 的图形 $G(f)$与平行于 x 轴的直线相交，交点不超过一点，则 f 的反函数 g 存在，否则 f 不存在满足定义要求的反函数．

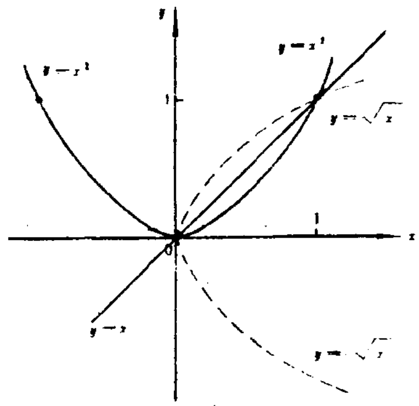

图 1－13

六、特殊的函数类

1．有界函数

定义 4　如果$\exists M>0$，使得$\forall x\in D_f$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 f 是有界函数，M 是 f 的一个界．

从图形上看（图 1－14），有界函数 f 的图形 $G(f)$在一条以 x 轴为中心线，宽度为 $2M$ 的带子里．

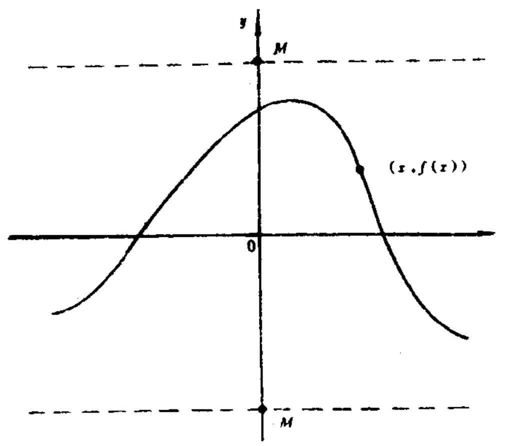

图 1－14

由于$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以 sin 和 cos 都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数．任何大于等于 1 的实数都是它们的界．

如果定义 4 中的 M 不存在，则称 f 是 D_f 上的无界函数，例如 tg 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是无界函数．

2．单调函数

定义 5　如果$\forall x_1、x_2\in D_f$，当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (f(x_1)<f(x_2),\ f(x_1)\geqslant f(x_2),\ f(x_1)>f(x_2))$$

则称 f 为单调增加（严格单调增加，单调减少，严格单调减少）函数．

所有这四类函数统称为单调函数．

从图形上看，单调增加函数随着自变量 x 的增加，对应的因变量 y 也随之增加（图 1－15）.

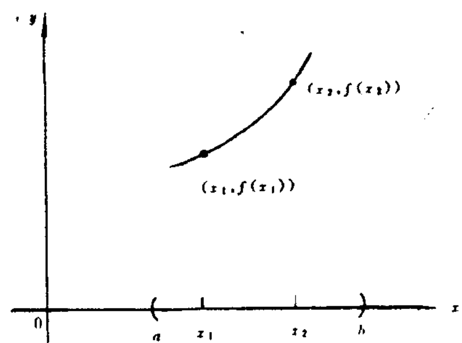

图 1－15

例如 sin 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$或$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上是严格单调增加的，在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是严格单调减少的，在整个$[0,2\pi]$上 sin 不是一个单调函数．

3．偶函数与奇函数

定义 6　设函数 f 定义在对称区间$(-a,a)$上，如果$\forall x\in(-a,a)$，都有

$$f(-x)=f(x)\qquad (f(-x)=-f(x))$$

则称 f 是$(-a,a)$上的偶（奇）函数．

从图形上看，偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1－16），奇函数的图形关于坐标原点对称（图 1－17）.

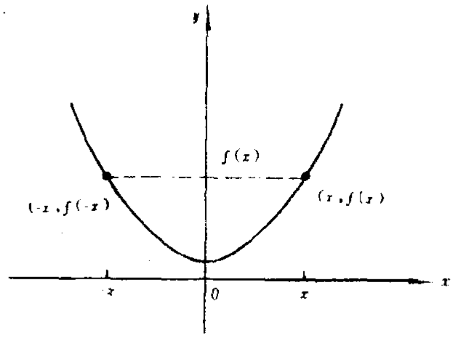

图 1-16

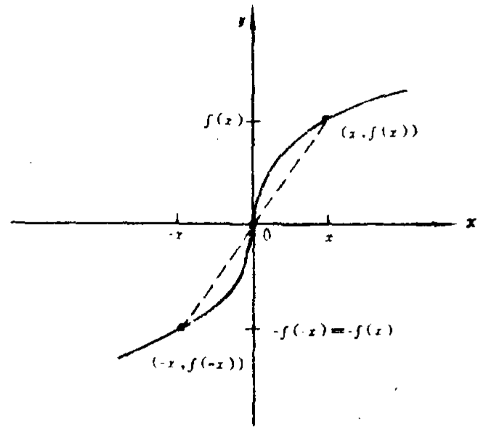

图 1-17

例如 sin 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,cos 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,$f(x)=x^3$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,而 $f(x)=|x|$和 $g(x)=x^2$ 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

4. 周期函数

定义 7 如果存在一个不为 0 的数 ω 使得 $\forall x\in D_f$,都有 $x+\omega\in D_f$,且 $f(x+\omega)=f(x)$,则称 f 是以 ω 为周期的周期函数.如果存在使上述等式成立的最小正数 ω,则称 ω 为周期函数 f 的最小正周期,简称为 f 的周期.

周期函数的图形在每一个周期上都是相同的,因此只需画出函数在一个周期上的图形,然后再向左、右两边延拓,即可得到函数 f 的全部图形.

例如 sin、cos 是以 2π 为周期的周期函数,而 tg 是以 π 为周期的周期函数.这里我们需要指出的是,有些周期函数它们的最小正周期 ω 是不存在的.例如常数函数 $f(x)\equiv 1$,显然任何非零实数都是 f 的周期,由于不存在最小正实数,故函数 f 也就不存在最小正周期.

七、初等函数

1. 指数函数

$$f(x)=a^x\quad(a>0,a\neq 1),D_f=(-\infty,+\infty)$$

2. 对数函数

$$f(x)=\log_a x\quad(a>0,a\neq 1),D_f=(0,+\infty)$$

以 10 为底的对数函数 $\lg x$ 称为常用对数,以 $e=2.7182818\cdots$(一个无理数)为底的对数函数 $\ln x$ 称为自然对数.

3. 幂函数

$f(x)=x^\alpha$($\alpha\in R$ 是常数),D_f 与 α 有关,当 α 为非负整数时,$D_f=(-\infty,+\infty)$;当 α 为负整数时,$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;当 $\alpha=n/m$ 为正有理数时,如果 m 是偶数,$D_f=[0,+\infty)$,如果 m 是奇数,$D_f=(-\infty,+\infty)$;当 $\alpha=-n/m$ 为负有理数时,如果 m 是偶数,$D_f=(0,+\infty)$,如果 m 是奇数,$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;当 α 是无理数时,以公式 $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ 作为 x^α 的定义,故定义域 $D_f=(0,+\infty)$.总之,无论 α 取何值,x^α 在$(0,+\infty)$内总是有定义的.

4. 三角函数

sin、cos、tg、ctg、sec、csc

sin、cos 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,周期为 2π.

tg、sec 的定义域为$\{x\mid x\neq n\pi+\pi/2,n\in Z\}$,tg 的周期为 π,sec 的周期为 2π.