北京大学数学丛书

H_p 鞅论

龙瑞麟 著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

H_p 鞅论

龙瑞麟 著

北京大学出版社

内 容 简 介

这是一本专著，它较系统、较完整地介绍了自七十年代初发展起来的有关鞅的各种各样的空间的理论。全书共分七章，包括：概率论基础，$H_p(p\geq 1)$空间，鞅的其它空间，Φ-不等式，BMO鞅，权与加权不等式，以及正规鞅论。其中包括许多古典情形于近几年才得到的重要结果的鞅论变形。

本书可作为大学数学系研究生选修课教材，也可供从事分析学或概率论等有关方面的教师，以及科研人员参考。

H_p 鞅 论

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
新华书店北京发行所发行
北京通县燕山印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本 11.875印张 278千字
1985年3月第一版 1989年10月第二次印刷
印数：1—11,000册

ISBN 7-301-00486-9/O·0095
定价：平装2.95元

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期三学时研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择、内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

前　言

1915 年，G. H. Hardy 在回答 H. Bohr 与 E. Landau 的一个问题时，研究了单位圆内解析函数 F 在圆周 $|z|=r(0<r<1)$ 上模 $|F|$ 的积分平均的性质，同时指出他的讨论对 $|F|^p(p>0)$ 也适用．自此以后，经过 Riesz 兄弟等人的努力，产生了 H_p 理论．但早期的 H_p 理论，主要仍然是讨论单个这样的函数的性质，如它的边界值、零点、泰勒系数、以及对它进行内函数与外函数的分解等．以后才逐步地将这样的函数的全体作为一个空间来研究，逐步地在对它的研究中注入泛函分析的内容，如 H_p 空间的对偶空间、其上定义的各种各样的算子、各种内插问题（空间内插、算子内插、以及给定点列数列的函数内插）、各种极值问题、以及 A. Beurling 的不变子空间问题等等．但是，不管怎样五花八门，这时的 H_p 理论仍然只是复变函数的一章．尽管由于单位圆内 H_p 的元素与它的在圆周上的边值之间存在着一一对应，因而似乎 H_p 也可看成是实变函数（或广义函数）的空间，但这并未能使 H_p 理论摆脱对复变理论的依赖性．为了判断一个定义在圆周上（一个实变量）的函数是否是 H_p 函数的边值，非得看看这个函数的共轭函数（这是复变理论派生的一个概念）是否有 L^p 可积性．对 $0<p\leqslant 1$，这是一个十分令人讨厌的问题．这个情况的改变发生在七十年代初期，其中关键的一步是 Burkholder-Gundy-Silverstein[1] 的发现：$F=u+iv\in H_p \Longleftrightarrow u^*\in L^p, 0<p<\infty$，其中 u^* 是调和函数 u 的角形（也称非切向）极大函数．他们的发现说明，单位圆周上一个实函数 f 是否是一个 H_p 中元素的边值的实部，只需看 f 的 Poisson 积分 u 的

角形极大的表现，而无需涉及 u 的共轭调和函数 v 的表现. 这说明 H_p 理论的复变因素不是本质的. 其后不久, Fefferman-Stein[1] 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上发展了 H_p 理论，并且指出 Poisson 核在 H_p 的极大函数刻划方面的作用也不是本质的，本质上它可被几乎任意一个逼近单位代替. 这样, 不仅 H_p 理论的纯实变结构是可能的，甚至更一般结构也是可能的. 因此毫不奇怪地，差不多是同时，鞅论中的 H_p 理论便应运而生, 竟至而成为现代鞅论中的重要一章.

本书介绍的"H_p 鞅论", 是概率论与分析学两者的结合. 更确切地说, 是鞅论与泛函分析、调和分析的结合. 这一领域的正确名称似乎应是"鞅空间论", 只不过因为 H_p 是这些空间中最著名的代表, 故以"H_p 鞅论"名之. 当然，这个交叉领域只是鞅论中的一部分，同时也只是 H_p 论的一个侧面. 但它相对于鞅论之其他部分则有分析性强的特色；而它相对于古典 H_p 论则又有概括与简洁的优点. 因此它既可使概率论学者，又可使分析学者有耳目一新的感觉，它同时受到这两方面人士的关注是不足为怪的. 十多年以来，这个领域的发展异常迅速，古典 H_p 论中的主要成果, 如 H_1 与 BMO 的对偶、H_p 的原子分解、许多算子之间的 Φ-不等式, 甚至加权 Φ-不等式以及 A_p 权等，大多已在鞅论中有令人满意的对应. 因此, 时至今日, 对这一领域写出较为完整的专著不仅是需要的, 而且也成为可能的. 本书便是适应这一需要的引玉之砖.

这个领域通常分为离散情形、连续情形以及多指标(离散)情形等部分. 从教育学的观点以及理论成熟程度的角度，我们选择了离散鞅的空间论作为对象，而对另外两部分几乎没有提及. 但是有了本书提供的基础，有兴趣的读者自然可以自行朝这两方面继续深入. 况且对连续鞅情形已有很好的参考书 (Dellacherie-Meyer[1,2]) 可以入门. 至于 H_p 鞅论与古典 H_p 论之间的关系, 已有 Petersen[1] 作了很系统的阐述. Varopoulos[1,2] 也对几个具体

问题作了如何将鞅论中的一般结果推出古典情况的对应事实的示范. 虽然在这个意义下可以说 H_p 鞅论是古典 H_p 论的某种概括与推广, 但是古典 H_p 论中的许多精细结果是很难在鞅论中得到体现的. 如关于 Carleson 测度的理论, 关于 A_∞ 权理论等至今在鞅论中还令人遗憾地缺乏, 关于 H_p 的奇异积分算子刻划也还有待完善.

最后是关于本书内容的简短说明. 第一章是概率论基础, 这是为从事分析学工作者而准备的; 第二章是 $H_p(p\geqslant 1)$空间, 其中包括了七十年代初期那本著名的, 也是迄今为止唯一的同类专著 (Garsia[1]) 的大部分内容; 第三章是平行于 H_p 的其他空间, 主要是介绍 Herz[1,2] 的工作; 第四章是讨论 Φ-不等式; 第五章是 BMO 空间专论, 收集在这章中的内容在本书中比其他章篇幅都少, 一因这方面理论本来薄弱(相对于古典情形, 应该说这不正常), 二因有些有关内容已见诸他处(如 H_1-BMO 对偶见第二章, BMO 与权见第六章); 第六章是加权不等式; 第七章是正规鞅论. 虽然, 作者已经尽力要在本书中反映迄今已发表的比较重要的成果, 但由于能力与偏见的局限, 挂一漏万的事是难免的. 至于作者要写好这本书的愿望, 更由于常常感到力不从心而大大打折扣. 如果本书能为有兴趣于这一领域的读者起到一点铺路石子的作用, 那么为此书而付去的劳动便不算白费了

本书的前身是作者 1981 年在北京大学研究生班上的讲课稿. 作者深深感谢老师程民德教授的鼓励与支持. 程先生不仅为作者提供了这一难得的教学实践机会, 使作者在与众多听众同志的共同磋商中获得了异常宝贵的教益, 而且还亲自为此书的完善付出了辛勤的劳动, 如修改与校阅. 此外, 北京大学邓东皋先生也为本书的改进付出了辛勤的劳动. 最后, 还应指出的是, 邱淑清同志为本书的文字润色与格式规范化也花费了大量的心血. 没有上

述这些帮助与支持，作者是很难完成这一任务的. 作者愿意借此机会一并表示由衷的感谢.

龙瑞麟

1983 年初于北京

目　录

第一章 H 鞅论的概率论基础

本章可视为对鞅论的一个入门准备. 将鞅论所需要的最基本的概率论基础, 如条件期望、停止时间、以及鞅的收敛与分解等基本知识收集在一起, 这对不太熟悉概率论的读者或许是方便的.

1.1 条件期望

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一完备概率空间, $\mathscr{F}_1$ 是$\mathscr{F}$的一个完备子 σ-代数. 则对每个 $f\in L^1$,

$$\nu(F)=\int_F f d\mu, \quad \forall F\in\mathscr{F}_1$$

定义了 $\mathscr{F}_1$ 上的一个关于 $\mu|_{\mathscr{F}_1}$ 绝对连续的测度. 根据 Radon-Nikodym 定理, 存在唯一的关于 $\mathscr{F}_1$ 可测、关于$\mu|_{\mathscr{F}_1}$可积的函数, 记为$E_{\mathscr{F}_1}(f)$或 $E(f|\mathscr{F}_1)$, 使得

$$\int_F E(f|\mathscr{F}_1)d\mu=\int_F f d\mu, \quad \forall F\in\mathscr{F}_1. \tag{1}$$

定义 1 对 $f\in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, 上述唯一存在的 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$称为f的关于子 σ-代数 $\mathscr{F}_1$ 的条件期望; 对 $F\in\mathscr{F}$, $E_{\mathscr{F}_1}(\mathrm{II}(F))$称为$F$关于 $\mathscr{F}_1$ 的条件概率, 其中 $\mathrm{II}(F)$表示F的指示(也称特征)函数.

例 1 设 $\mathscr{F}_1$ 是由Ω的有限剖分 $\{F_k\}_1^n$ 生成的子 σ-代数(F_k 都称为 $\mathscr{F}_1$ 的原子①), 则对所有 $f\in L^1$,

$$E_{\mathscr{F}_1}(f)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{|F_i|}\int_{F_i} f d\mu \mathrm{II}(F_i)②. \tag{2}$$

---

① 所谓$(\mathscr{F}, \mu)$的原子是 $\mathscr{F}$ 中那些正测集 A, 它们不包含子集 $B\in\mathscr{F}$, 使得 $0<|B|<|A|$.

② 当出现的测度不引起混淆时, $|F|$表示可测集F的测度.

这因为，既然 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 是关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的，则它在每个原子 F_i 上应为常数，故

$$E_{\mathscr{F}_1}(f)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{II}(F_i).$$

将上式两边在 F_i 上积分，利用式(1)，即得

$$c_i=\frac{1}{|F_i|}\int_{F_i}fd\mu.$$

例 2 特别设 $G\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}_1$ 由原子 G, G'① 生成．则对 $F\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}E(\mathrm{II}(F)|\mathscr{F}_1)&=\frac{1}{|G|}\int_G\mathrm{II}(F)d\mu\mathrm{II}(G)\\&\quad+\frac{1}{|G'|}\int_{G'}\mathrm{II}(F)d\mu\mathrm{II}(G')\\&=\frac{1}{|G|}|F\cap G|\mathrm{II}(G)+\frac{1}{|G'|}|F\cap G'|\mathrm{II}(G').\end{aligned}$$

其中 $|G|^{-1}|F\cap G|$ 正是古典意义下事件 F 在事件 G 出现时的条件概率．这验证了"条件期望(概率)"名称的由来．

现在讨论条件期望的基本性质．

a) $E_{\mathscr{F}_1}$ 是一个(复)线性算子．从而 $E_{\mathscr{F}_1}$ 与复共轭运算可交换，即 $\overline{E_{\mathscr{F}_1}}(f)=E_{\mathscr{F}_1}(\bar{f})$．(显然．)

b) $E_{\mathscr{F}_1}$ 是一个正算子，意即 $f\geqslant 0\Rightarrow E_{\mathscr{F}_1}(f)\geqslant 0$．(这只需考察集合 $\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<0\}\in\mathscr{F}_1$，利用式(1)即得 $|\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<0\}|=0$．)

c) $E_{\mathscr{F}_1}(1)=1$．(显然．)

d) 对一切 $f\in L^1$，

$$|E_{\mathscr{F}_1}(f)|\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|),\quad \text{a.e.}. \tag{3}$$

这是下面的 Hölder 不等式的特殊情况，也可直接给出证明．

① 本书中"$'$"，对于集合它表示补集；对于拓扑线性空间它表示对偶空间；对于实数 p 它表示相伴数，即 p 与 p' 满足下述关系：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

先考虑实函数 f. 记 $F=\{E_{\mathscr{F}_1}(f)>E_{\mathscr{F}_1}(|f|)\}$. 则 $F\in\mathscr{F}_1$, 且由

$$\int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)d\mu=\int_F f d\mu\leqslant\int_F |f|d\mu$$
$$=\int_F E_{\mathscr{F}_1}(|f|)d\mu,$$

知 $|F|=0$. 类似地, 记 $F=\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<-E_{\mathscr{F}_1}(|f|)\}$, 则也有 $|F|=0$. 这证明了实函数 f 时的断言. 当 f 为复函数时, 存在关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的 $\theta(\omega)$, 使

$$E_{\mathscr{F}_1}(f)e^{i\theta(\omega)}=|E_{\mathscr{F}_1}(f)|.$$

利用下面的性质 f), 此即

$$E_{\mathscr{F}_1}(fe^{i\theta(\omega)})=|E_{\mathscr{F}_1}(f)|.$$

于是利用对实函数的式(3)得

$$|E_{\mathscr{F}_1}(f)|=E_{\mathscr{F}_1}(\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)}))$$
$$\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)})|)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|).$$

e) 我们有

$$\|E_{\mathscr{F}_1}(f)\|_p\leqslant\|f\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{4}$$

这因, 若考虑所有那样的

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{II}(F_i),\quad F_i\in\mathscr{F}_1,$$

其中 n, $\{c_i\}$, 与 $\{F_i\}$ 都是任意的, 则

$$\|E_{\mathscr{F}_1}(f)\|_p=\sup_{g:\|g\|_{p'}\leqslant 1}|E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g)|$$
$$=\sup_{g:\|g\|_{p'}\leqslant 1}|E(fg)|\leqslant\|f\|_p.$$

f) 设 $f\in L^p$, $g\in L^{p'}$, 且 g 关于 $\mathscr{F}_1$ 可测, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则

$$E_{\mathscr{F}_1}(fg)=gE_{\mathscr{F}_1}(f). \tag{5}$$

找 $\mathscr{F}_1$-简单函数序列 $\{g_n\}$, 使 $g_n\to g$ 在 $L^{p'}$ 中. 则对每个 n, 显然有

$$E_{\mathscr{F}_1}(fg_n)=g_nE_{\mathscr{F}_1}(f).$$

而因等式两边在 L^1 中分别有极限 $E_{\mathscr{F}_1}(fg)$ 与 $gE_{\mathscr{F}_1}(f)$，这就证明了式(5).

g）軟性质．设 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，且 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$．则

$$E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_2}(f))=E_{\mathscr{F}_1}(f),\quad \forall f\in L^1. \tag{6}$$

既然上式两边均关于 $\mathscr{F}_1$ 可测，故只需证明式(1)．事实上，因 $\forall F\in\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$，我们有

$$\begin{aligned}\int_F E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_2}(f))\,d\mu&=\int_F E_{\mathscr{F}_2}(f)\,d\mu\\&=\int_F f\,d\mu=\int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)\,d\mu.\end{aligned}$$

h）Parseval 关系．$\forall f\in L^p,\ g\in L^{p'},\ 1\leqslant p\leqslant\infty$，有

$$E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g)=E(fE_{\mathscr{F}_1}(g)). \tag{7}$$

这因式(7)的两边都等于 $E(E_{\mathscr{F}_1}(f)E_{\mathscr{F}_1}(g))$．事实上，只看上式左端，有

$$\begin{aligned}E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g)&=E(E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_1}(f)g))\\&=E(E_{\mathscr{F}_1}(f)E_{\mathscr{F}_1}(g)).\end{aligned}$$

i）Hölder 不等式．$\forall f\in L^p,\ g\in L^{p'},\ 1\leqslant p\leqslant\infty$，有

$$|E_{\mathscr{F}_1}(fg)|\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}. \tag{8}$$

事实上，若记 $F=\{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)>0,\ E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})>0\}$．则在 F 上，

$$\begin{aligned}&\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}}\,\frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}}\\&\qquad\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)}+\frac{1}{p'}\,\frac{|g|^{p'}}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})}.\end{aligned}$$

既然 $F\in\mathscr{F}_1$，则

$$\begin{aligned}&E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}}\,\frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}}\right)\mathrm{II}(F)\\&\quad=E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}}\,\frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}}\mathrm{II}(F)\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)}\mathrm{II}(F)+\frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})}\mathrm{II}(F)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

此即

$$E_{\mathscr{F}_1}(|f||g|)\mathrm{II}(F)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}.$$

但在 $F_f=\{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)=0\}$ 上，f 必须为 0. 因

$$\int_{F_f}|f|^p d\mu=\int_{F_f}E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)d\mu=0.$$

类似地，在 $F_g=\{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})=0\}$ 上，g 也为 0. 故 fg 在 $F_f\cup F_g$ 上为 0. 既然 $\Omega=F_f\cup F_g\cup F$，从而证明了式(8).

在讲述条件期望算子的其他性质以前，先对条件期望的定义作一个平凡的推广. 前面已对一切 $f\in L^1$ 定义了条件期望算子. 但是由于条件期望算子的正性(从而有单调性)，对一切非负可测函数 f 也可以定义条件期望算子如下.

设 $f\geqslant 0$ 可测. 记

$$f^{(N)}=\begin{cases}f, & f\leqslant N,\\ N, & f>N.\end{cases}$$

则对任意的子 σ-代数 $\mathscr{F}_1$ 取定，$E_{\mathscr{F}_1}(f^{(N)})$ 为单调增加的，故有关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的极限存在，记之为 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$.

这样定义的 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 关于 $\mathscr{F}_1$ 可测，对一切 $F\in\mathscr{F}_1$，有

$$\int_F f d\mu=\int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)d\mu,$$

并且当 $f\leqslant g$ 时，也有 $E_{\mathscr{F}_1}(f)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(g)$，等等，所不同的只是此时 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 不必是 a. e. 有限的. 此外，对这样推广定义的条件期望算子，还有 Lebesgue 单调收敛定理、Fatou 引理等. 由单调收敛定理可附带地推出 $E_{\mathscr{F}_1}(\cdot)$ 定义中的单调增加收敛序列的选取可以是任意的.

j）单调收敛定理．设非负 f_n 单调增加地 a. e. 收敛于 f．则

$$\lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)=E(f|\mathscr{F}_1),\quad \text{a. e.}.$$

这因，由单调性，$E(f_n|\mathscr{F}_1)$ 有关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的极限 $h(\omega)$，且

$$h\leqslant E(f|\mathscr{F}_1),\quad \text{a. e.}.$$

于是，$\forall F\in\mathscr{F}_1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_F h\,d\mu&=\int_F \lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)d\mu\\&=\lim_n\int_F E(f_n|\mathscr{F}_1)d\mu\\&=\lim_n\int_F f_n d\mu=\int_F f d\mu\\&=\int_F E(f|\mathscr{F}_1)d\mu.\end{aligned}$$

由此即知 $h=E(f|\mathscr{F}_1)$．

k）Fatou 引理．设 f_n 非负可测，则

$$E(\underline{\lim}\, f_n|\mathscr{F}_1)\leqslant \underline{\lim}\, E(f_n|\mathscr{F}_1).$$

记 $g_n=\inf\limits_{m\geqslant n}f_m$．则 g_n 非负单调增加地收敛于 $\underline{\lim}\, f_n$．故

$$\begin{aligned}E(\underline{\lim} f_n|\mathscr{F}_1)&=E(\lim g_n|\mathscr{F}_1)\\&=\lim E(g_n|\mathscr{F}_1)\leqslant\underline{\lim} E(f_n|\mathscr{F}_1).\end{aligned}$$

l）控制收敛定理．设 $f_n\in L^1$，$f_n\to f$，a. e.，且 $|f_n|\leqslant g$，$g\in L^1$．则

$$\lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)=E(f|\mathscr{F}_1).$$

记 $h_n=\sup\limits_{m\geqslant n}|f-f_m|$，则 h_n 非负单调下降于 0，且有控制函数 $2g$，故 $E(h_n)\to 0$．同时，$E(h_n|\mathscr{F}_1)$ 也单调下降，故有点态极限 $h\geqslant 0$．但

$$|E(f|\mathscr{F}_1)-E(f_n|\mathscr{F}_1)|\leqslant E(|f-f_n||\mathscr{F}_1)\leqslant E(h_n|\mathscr{F}_1),$$

以及由 Fatou 引理，