谈谈不定方程

TANTAN BUDING FANGCHENG

柯召　孙琦

上海教育出版社

谈谈不定方程

柯召　孙琦

上海教育出版社

内 容 提 要

不定方程（又称丢番图方程）是数论中一个古老而又有趣的分支．迄今未获彻底解决的费马大定理就是属于不定方程的．由于近年来对不定方程研究有很大进展，这一学科与代数几何、代数数论、组合数学、计算机科学的联系又很密切，因此不定方程仍然引起许多人的兴趣．

本书概括地介绍了不定方程的主要内容．书中谈到了历史上许多著名的问题和猜想，介绍了解决这些问题的方法（大部分是初等方法，少量是代数数论方法），概述了一些近代成果（例如有重大意义的 Baker 的有效方法），等等．可供有志于了解不定方程的中学老师和广大数学爱好者阅读．

谈谈不定方程

柯召　孙琦

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 5　字数 108,000

1980 年 8 月第 1 版　1980 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—50,000 本

统一书号：7150·2294　定价：0.41 元

序　言

不定方程是数论中最古老的一个分支. 所谓不定方程，简单地讲，就是未知数的个数多于方程的个数，但它们的解受某种限制(如是整数、正整数或有理数等)的方程(组). 例如求 $3x^4-2y^2=1$ 的整数解 x、y，以及求 $x^2+7=2^n$ 的整数解 x、n 等，都是不定方程的求解问题. 古希腊数学家丢番图于三世纪初就研究过这样的方程，所以不定方程又称丢番图方程. 但实际上，我国古代《周髀算经》就提出了商高定理"勾三股四而弦五"，这表示不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一组整数解 $x=3$, $y=4$, $z=5$，比丢番图早多了.

不定方程的内容极其丰富，与数学的其他分支如代数数论、代数几何、组合数学等也有着密切的联系. 近代许多优秀的数学家如费马、欧拉、高斯、拉格朗日、库默 (Kummer)、希尔伯特等都从事过不定方程的研究. 这些研究大大丰富了数论的内容. 近三十年来，这个领域更有重要进展，例如，1968 年前后，Baker 得到了著名的"有效方法"，定出了一大类不定方程整数解的绝对值的上界. 这一结果属于希尔伯特第十问题的特解. 所谓希尔伯特第十问题是问能否判定任何整系数多项式 $f(x_1, \cdots, x_s)=0$ 有没有整数解，这个问题也在 1970 年得到了否定的回答. 此外，还有一些古老的猜想被解决了. 虽然如此，从整个地说，对于高次的多元的不定方程，迄今还只有少数特例被人们搞清楚，还有着广阔的未知领域. 这样，就使得不定方程仍然并将继续吸引着许多数学家的注意.

鉴于国内专门介绍不定方程的书较缺，这就促使我们来编写这样一本小册子，其目的是想用初等方法和代数方法比较全面而概括地介绍这一分支，不仅想让读者了解不定方程中有哪些基本的内容、重要的问题和近代的成果，而且希望读者能从中学到一点解决问题的方法. 正因为如此，书中的绝大多数定理都给出了证明，这些证明包括了不定方程中一些基本的方法. 具有高中和大学一年级数学知识的读者，完全能够读懂书中的绝大多数内容. 对于那些希望进一步钻研，有志于在不定方程方面进行研究的读者来说，或许也能从中受到一些启发. 最后，这本小册子也写入了我们自己的若干工作.

限于我们的水平，书中的缺点和错误一定不少，我们期待着读者的批评指正.

柯 召　孙 琦

1979年10月于成都

目　录

序言
第一章　一次不定方程 ……………………………………1
§1 二元一次不定方程 ……………………………………1
§2 $s(s\geqslant 2)$元一次不定方程 ……………………………………4
§3 关于一次不定方程的 Frobenius 问题 ……………………………………8
§4 联立一次不定方程组 ……………………………………13
第二章　二次不定方程 ……………………………………18
§1 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ ……………………………………18
§2 Pell 方程 $x^2-Dy^2=-1$ ……………………………………24
§3 不定方程 $x^2-Dy^2=c$ ……………………………………28
§4 高斯关于二元二次方程的一个结果 ……………………………………35
§5 不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 和 $x^2+2y^2=z^2$ ……………………………………37
§6 不定方程 $ax^2+by^2+cz^2=0$ ……………………………………40
第三章　三次不定方程 ……………………………………45
§1 解不定方程 $y^2=x^3+k$ 的初等方法 ……………………………………46
§2 关于代数数论 ……………………………………49
§3 解不定方程 $y^2=x^3+k$ 的代数数论方法 ……………………………………55
§4 一些三元三次不定方程 ……………………………………61
§5 不定方程 $x^3+y^3+z^3+w^3=n$ ……………………………………66
第四章　四次不定方程 ……………………………………69
§1 仅有平凡解的四次不定方程 ……………………………………69
§2 递归序列与四次不定方程 ……………………………………73
§3 不定方程 $x^4-Dy^2=1$ ……………………………………82

第五章　费马大定理……………………………………92
§1 初等方法 ……………………………………………92
§2 代数数论的方法——库默的工作 …………………97
§3 其他一些结果……………………………………107
第六章　与连续整数有关的不定方程 ………………110
§1 不定方程 $y^2+1=x^p$ …………………………110
§2 三个连续数的问题………………………………113
§3 不定方程 $x^p+1=y^2$ …………………………119
§4 不定方程 $\sum_{j=0}^{h}(x+j)^n=(x+h+1)^n$ ……………123
第七章　某些指数不定方程 …………………………129
§1 一个关于商高数的猜想…………………………129
§2 不定方程 $x^2+7=2^n$ …………………………132
§3 不定方程 $x^x y^y=z^z$ …………………………137
第八章　某些不定方程整数解的上界 ………………142
§1 从 Thue 的定理谈起 ……………………………142
§2 几类不定方程解的上界…………………………146
§3 Baker 方法举例…………………………………149

第一章　一次不定方程

在本书中，凡方程的解如未加说明，都指整数解.

本章将给出一次不定方程有解的充分必要条件和求解的方法. 对于多个一次不定方程联立的某些情形，虽然人们也得出了有解的充分必要条件和求解的方法，但是远不如一个时简单. 一次不定方程与规划论有联系，它还有一些其他方面的应用，例如本章介绍的 Frobenius 问题，就在合理下料等实际问题上有应用.

§1　二元一次不定方程

二元一次不定方程是指

$$a_1x_1+a_2x_2=n, \tag{1}$$

其中 a_1, a_2, n 是给定的整数，$a_1a_2\neq 0$.

我们有

定理 1　方程(1)有解的充分必要条件是①

$$(a_1,\ a_2)\,|\,n. \tag{2}$$

证　如果(1)有解，显然(2)成立.

反之，不失一般，可设 $(a_1,\ a_2)=1$ 和 $a_1>0$, $a_2>0$, 如 $a_1=1$, 则解为 $x_1=n-a_2x_2$. 若 $a_1>1$ 我们用辗转相除法来求

① 在本书中，常以小写拉丁字母 a, b, c, … 代表整数；设 $b\neq 0$, b 整除 a, 以 $b|a$ 表示；$(a,\ b)$表示 a, b 的最大公因数，我们假定读者知道求 $(a,\ b)$的辗转相除方法.

(1)的一组解. 写

$$a_2=q_1a_1+r_1,\ 0<r_1<a_1,\ (r_1,\ a_1)=1,$$

则 $$x_1=-q_1x_2+\frac{-r_1x_2+n}{a_1}=-q_1x_2+x_3,$$

这里

$$r_1x_2+a_1x_3=n, \tag{3}$$

由于 x_2, x_3 的值可以给出 x_1, 这样, 求(1)的解化为求(3)的解. 写

$$a_1=q_2r_1+r_2,\ 0<r_2<r_1,\ (r_2,\ r_1)=1,$$

则 $$x_2=-q_2x_3+\frac{-r_2x_3+n}{r_1}=-q_2x_3+x_4,$$

这里

$$r_2x_3+r_1x_4=n. \tag{4}$$

这样,求(1)的解化为求(4)的解. 以上步骤继续下去(即通常求最大公因数的方法),由于 $a_1>r_1>r_2>\cdots$, 在有限步后,有 $r_{k+1}=0$, 而 $r_k=(a_1,\ a_2)=1$, 且

$$r_kx_{k+1}+r_{k-1}x_{k+2}=n,$$

其中 $k\geqslant 0$, $r_0=a_1$, $r_{-1}=a_2$. 于是, 我们把 $x_{k+1}=n-r_{k-1}x_{k+2}$ 代入 x_k 的表达式,再把 x_{k+1}, x_k 代入 x_{k-1} 的表达式,……, 最后可得(1)的含参数 x_{k+2} 的解. 证完.

往后,在(1)有解的情况下,我们总可以假设 $(a_1,\ a_2)=1$. 以上的后一半证明是构造性的,即证明定理充分性的过程,实际上就是求(1)的全部解的过程. (1)的全部解, 可由以下定理给出.

定理 2 设 $(a_1,\ a_2)=1$, 则(1)的全部解可表为

$$x=x_0+a_2t,\ y=y_0-a_1t, \tag{5}$$

其中 x_0, y_0 为(1)的一组解, t 为任意整数.

证　设 t 为任意整数, 把(5)代入(1)得

$$a_1(x_0+a_2t)+a_2(y_0-a_1t)=a_1x_0+a_2y_0=n,$$

故 t 为任意整数时, (5)均为(1)的一组解.

反之, 设 x_1, y_1 为(1)的任意一组解, 由

$$a_1x_1+a_2y_1=n$$

和

$$a_1x_0+a_2y_0=n$$

可得

$$a_1(x_1-x_0)+a_2(y_1-y_0)=0,$$

因 $(a_1, a_2)=1$, 所以 $a_2|x_1-x_0$, 可设

$$x_1-x_0=a_2t_1 \quad 或 \quad x_1=x_0+a_2t_1.$$

则

$$y_1=y_0-a_1t_1.$$

这就证明了(1)的任一组解具有形状(5). 证完.

例　求不定方程

$$11x_1+15x_2=7 \tag{6}$$

的全部解.

由于 $(11, 15)=1$, 故(6)有解. 由 $15=1\times11+4$, 可设

$$x_1=-x_2+x_3,$$

这里

$$4x_2+11x_3=7,$$

由 $11=2\times4+3$, 可设

$$x_2=-2x_3+x_4,$$

这里

$$3x_3+4x_4=7,$$

由 $4=1\times3+1$, 可设

$$x_3=-x_4+x_5,$$

这里

$$x_4+3x_5=7,$$

令 $x_5=t$, 可得

$$x_1=-28+15t, \ x_2=21-11t,$$

其中 t 为任意整数.

§2 $s(s\geqslant 2)$元一次不定方程

设 $s\geqslant 2$, s 元一次不定方程是指

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_sx_s=n, \tag{1}$$

其中 $a_i(i=1, \cdots, s)$, n 都是给定的整数, $a_1\cdots a_n\neq 0$.

我们有

定理 1 (1)有解的充分必要条件是

$$(a_1, a_2, \cdots, a_s)\mid n. \tag{2}$$

证 (1)如有解,显然(2)成立.

反之, 如果(2)成立. 不失一般, 可设 $(a_1, \cdots, a_s)=1$, $a_i>0(i=1, \cdots, s)$, a_1 是 $a_1, \cdots, a_s$ 中最小的数,写

$$a_j=q_ja_1+r_j,\ 0\leqslant r_j<a_1,$$

如果 $a_1=1$, 则(1)的解为 $x_1=n-a_2x_2-\cdots-a_sx_s$. 如 $a_1>1$, 则 $r_2, \cdots, r_s$ 中至少有一个不为 0, 设

$$\begin{aligned} &x_1=x_{s+1}-q_2x_{s+2}-q_3x_{s+3}-\cdots-q_sx_{2s},\\ &x_i=x_{s+i},\ i=2, \cdots, s, \end{aligned} \tag{3}$$

把(3)代入(1)得

$$\begin{gathered} a_1x_{s+1}+r_2x_{s+2}+r_3x_{s+3}+\cdots+r_sx_{2s}=n,\\ (a_1, r_2, \cdots, r_s)=1, \end{gathered} \tag{4}$$

因为(3)的变换矩阵的行列式为 1, 所以(1)的解 $(x_1, \cdots, x_s)$ 与(4)的解 $(x_{s+1}, x_{s+2}, \cdots, x_{2s})$ 之间是一一对应的. 因此只需解(4). 不失一般,设 r_2 是 $r_2, \cdots, r_s$ 中最小的正数,写

$$a_1=t_1r_2+l_1,\ 0\leqslant l_1<r_2,$$

$$r_j=t_jr_2+l_j,\ 0\leqslant l_j<r_2,\ j=3, \cdots, s,$$

设 $l_1, l_3, \cdots, l_s$ 中至少有一个不为 0.

再设

$$\begin{cases} x_{s+1}=x_{2s+1} \\ x_{s+2}=-t_1x_{2s+1}+x_{2s+2}-t_3x_{2s+3}-\cdots-t_sx_{3s} \\ x_{s+j}=x_{2s+j},\ j=3,\ \cdots,\ s, \end{cases} \tag{5}$$

把(5)代入(4)得

$$l_1x_{2s+1}+r_2x_{2s+2}+l_3x_{2s+3}+\cdots+l_sx_{3s}=n,$$

$$(l_1,\ r_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_s)=1, \tag{6}$$

因为(5)的变换矩阵的行列式为1，所以(4)的解与(5)的解之间是一一对应的，因而(1)的解与(5)的解之间是一一对应的．因此只需解(6)．设 l_3 是 l_1, l_3, $\cdots$, l_s 中最小的正数，继续作下去，因为 $a_1>r_2>l_3>\cdots$，在有限步之后，存在 $k\geqslant 1$ 和行列式为1的变换

$$\begin{aligned} &x_{(k-1)s+1}=x_{ks+1}-u_2x_{ks+2}-u_3x_{ks+3}-\cdots-u_sx_{ks+s} \\ &x_{(k-1)s+j}=x_{ks+j},\ j=2,\ \cdots,\ s. \end{aligned} \tag{7}$$

使得

$$x_{ks+1}+v_2x_{ks+2}+\cdots+v_sx_{ks+s}=n, \tag{8}$$

再令

$$\begin{aligned} &x_{ks+1}=X_1-v_2X_2-\cdots-v_sX_s, \\ &x_{ks+j}=X_j,\ j=2,\ \cdots,\ s, \end{aligned} \tag{9}$$

代入(8)得 $$X_1=n,$$

再将 $X_1=n$ 代入(9)得

$$x_{ks+1}=n-\sum_{j=2}^{s}v_jX_j,\ x_{ks+j}=X_j,\ j=2,\ \cdots,\ s,$$

逐次代入，最后可得 x_1, $\cdots$, x_s 的一组含 $s-1$ 个参数 X_2, $\cdots$, X_s 的解．证完．

设 s 阶方阵 A, A 的元素均为整数，A 的行列式 $|A|=\pm 1$，形如

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix} \tag{10}$$

的变换叫单位模变换. 由于变换(9)、(7)、…、(3)均为单位模变换，单位模变换的乘积仍是单位模变换，因此由定理1的证明，立即可得

推论 存在单位模变换(10)，把 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s$, $(a_1, \cdots, a_s)=1$, 变为 X_1.

由定理1的证明还告诉我们(1)的通解含 $s-1$ 个参数，上一节给出了 $s=2$ 的通解公式，由此可推出 $s=3$ 时(1)的通解公式，$s>3$ 的情形可以逐步推出. 下面我们来证明

定理2 设 $(a, b, c)=1$, $(a, b)=d$, $a=da_1$, $b=db_1$, 不定方程

$$ax+by+cz=n \tag{11}$$

的全部解可表为

$$x=x_0+b_1t_1-u_1ct_2,\ y=y_0-a_1t_1-u_2ct_2,\ z=z_0+dt_2, \tag{12}$$

其中 x_0, y_0, z_0 是(11)的一组解，u_1, u_2 满足 $a_1u_1+b_1u_2=1$, t_1, t_2 为任意整数.

证 对于任意的整数 t_1, t_2, 将(12)代入(11)，易知是(11)的一组解.

反之，设 x, y, z 是(11)的一组解. 由

$$ax_0+by_0+cz_0=n,\ ax+by+cz=n,$$

可得

$$d(a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0))=-c(z-z_0), \tag{13}$$

由 $(d, c)=1$, 故有整数 t_2, 使

$$z=z_0+dt_2 \tag{14}$$

将(14)代入(13)得

$$a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)=-ct_2, \tag{15}$$

由于 $-u_1ct_2$ 和 $-u_2ct_2$ 是 $a_1X+b_1Y=-ct_2$ 的一组解，由(15)存在整数 t_1，使

$$x=x_0+b_1t_1-u_1ct_2,\ y=y_0-a_1t_1-u_2ct_2,$$

这就证明了(11)的任一组解可表为形状(12)．证完．

例 求出不定方程

$$25x_1+13x_2+7x_3=4 \tag{16}$$

的全部解．

我们用证明定理1充分性的方法来求解．由于 $25=3\times7+4$，$13=1\times7+6$，可设 $x_1=x_4$，$x_2=x_5$，$x_3=-3x_4-x_5+x_6$，代入(16)得

$$4x_4+6x_5+7x_6=4, \tag{17}$$

由于 $6=4+2$，$7=4+3$，可设 $x_4=x_7-x_8-x_9$，$x_5=x_8$，$x_6=x_9$，代入(17)得

$$4x_7+2x_8+3x_9=4, \tag{18}$$

由于 $4=2\times2$，$3=2+1$，可设 $x_7=x_{10}$，$x_8=-2x_{10}+x_{11}-x_{12}$，$x_9=x_{12}$，代入(18)得

$$2x_{11}+x_{12}=4, \tag{19}$$

最后设 $x_{12}=X_1-2X_2$，$x_{11}=X_2$，$x_{10}=X_3$，代入(19)得

$$X_1=4,$$

故 $x_{12}=4-2X_2$，$x_{11}=X_2$，$x_{10}=X_3$，逐次代入，可得

$$x_1=-X_2+3X_3,\ x_2=3X_2-2X_3-4,$$

$$x_3=-2X_2-7X_3+8, \tag{20}$$

其中 X_2，X_3 为任意整数．(20)就是(16)的通解．

§3 关于一次不定方程的 Frobenius 问题

设 $s\geqslant 2$, n 和 $a_i(i=1, \cdots, s)$ 都是正整数, 且 $(a_1, \cdots, a_s)=1$, 考虑一次不定方程

$$a_1x_1+\cdots+a_sx_s=n \tag{1}$$

的非负解 $x_i\geqslant 0(i=1, \cdots, s)$ 的问题. 在 $s=2$ 时, 我们有

定理 1 在 $n>a_1a_2-a_1-a_2$ 时, (1)有非负解 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, 但在 $n=a_1a_2-a_1-a_2$ 时, (1)没有非负解 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$.

证 由 §1 的定理 1 知

$$a_1x_1+a_2x_2=n \tag{2}$$

的全部解可表为

$$x_1=x_1'+a_2t,\ x_2=x_2'-a_1t,$$

其中 x_1', x_2' 是(2)的一组解, t 为任意整数. 不难知道, 可取 t 使

$$0\leqslant x_2=x_2'-a_1t<a_1,$$

即

$$0\leqslant x_2'-a_1t\leqslant a_1-1,$$

又由 $n>a_1b_1-a_1-b_1$ 可得

$$\begin{aligned}(x_1'+a_2t)a_1&=n-(x_2'-a_1t)a_2\\&>a_1a_2-a_1-a_2-(a_1-1)a_2=-a_1,\end{aligned}$$

即

$$x_1'+a_2t>-1,$$

故对上述 t 来说

$$x_1=x_1'+a_2t\geqslant 0,$$

这就证明了 $n>a_1a_2-a_1-a_2$ 时, (2)存在解 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$.

如果 $n=a_1a_2-a_1-a_2$, (2)有解 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, 则由

$$a_1a_2-a_1-a_2=a_1x_1+a_2x_2$$

得 $$a_1a_2=(x_1+1)a_1+(x_2+1)a_2,$$
因$(a_1, a_2)=1$, 可得
$$a_1|x_2+1, \quad a_2|x_1+1,$$
因为 $x_2+1>0$, $x_1+1>0$, 故
$$x_2+1\geqslant a_1, \quad x_1+1\geqslant a_2,$$
得 $$a_1a_2=(x_1+1)a_1+(x_2+1)a_2\geqslant 2a_1a_2,$$
此不可能,所以在 $n=a_1a_2-a_1-a_2$ 时, (2)没有非负解 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$. 证完.

此定理可简述为: 设 $(a_1, a_2)=1$, $a_1>0$, $a_2>0$, 凡大于 $a_1a_2-a_1-a_2$ 的数必可表为 $a_1x_1+a_2x_2(x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0)$之形状, 但 $a_1a_2-a_1-a_2$ 不能表成此形状.

人们自然会提出这样的问题,对于一般的 $s(s\geqslant 2)$ 元线性型 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s$, $a_i>0(i=1, \cdots, s)$, $(a_1, \cdots, a_s)=1$, 是否存在一个仅与 $a_1, \cdots, a_s$ 有关的整数 $N(a_1, \cdots, a_s)$, 凡大于 $N(a_1, \cdots, a_s)$之数必可表为 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s(x_i\geqslant 0, i=1, \cdots, s)$ 的形状? 问题的回答是肯定的. 下面就来证明这个结果.

定理 2 存在仅与 $a_1, \cdots, a_s$ 有关的整数 $N(a_1, \cdots, a_s)$, 当 $n>N(a_1, \cdots, a_s)$ 时, (1)有非负解 $x_1\geqslant 0, \cdots, x_s\geqslant 0$.

证 我们对 s 施行归纳法.

由定理 1, $s=2$ 时定理显然成立.

设 $s-1$ 个元时定理成立, 我们来证明 s 元时的情形. 设 $(a_1, \cdots, a_{s-1})=d$, $a_i=a_i'd(i=1, \cdots, s-1)$; 由 $(a_1, \cdots, a_s)=1$ 可知 $(d, a_s)=1$, 从而可把(1)化成: 存在 $0\leqslant b_s\leqslant d-1$, 使 $a_sb_s\equiv n(\operatorname{mod} d)$. 由(1)得
$$a_1'x_1+\cdots+a_{s-1}'x_{s-1}=\frac{n-a_sb_s}{d}. \tag{3}$$

由于 $(a_1', \cdots, a_s')=1$, 由归纳假设, 存在整数 $N(a_1', \cdots,$

$a'_{s-1})$，当 $\frac{n-a_sb_s}{d} \geqslant \frac{n-a_s(d-1)}{d} > N(a'_1, \cdots, a'_{s-1})$ 时，(3)有非负解 $x_1=b_1, \cdots, x_{s-1}=b_{s-1}$，即当

$$n > dN(a'_1, \cdots, a'_{s-1}) + a_s(d-1) = N(a_1, \cdots, a_s)$$

时，(1)有非负解 $x_1=b_1, \cdots, x_{s-1}=b_{s-1}, x_s=b_s$. 证完.

这个定理还告诉我们，对 s 元 $(s\geqslant 2)$ 线性型 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s$，$a_i>0(i=1, \cdots, s)$，$(a_1, \cdots, a_s)=1$，存在一个仅与 $a_1, \cdots, a_s$ 有关的整数 $g(a_1, \cdots, a_s)$，凡大于 $g(a_1, \cdots, a_s)$ 之数必可表为 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s(x_i\geqslant 0, i=1, \cdots, s)$ 的形状，而 $g(a_1, \cdots, a_s)$ 不能表为 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s(x_i\geqslant 0, i=1, \cdots, s)$ 的形状，因此，称 $g(a_1, \cdots, a_s)$ 为所给线性型的最大不可表数. 求出 $g(a_1, \cdots, a_s)$ 的问题，即所谓一次不定方程的 Frobenius 问题. 由定理 1 知，$s=2$ 时，Frobenius 问题已告解决：我们求得 $g(a_1, a_2)=a_1a_2-a_1-a_2$；但是，对于 $s\geqslant 3$，一般地只找到了求出 $g(a_1, \cdots, a_s)$ 的一些算法. 对于 $n=3$，我们有

定理 3[1]

$$g(a, b, c) \leqslant \frac{ab}{(a, b)} + c(a, b) - a - b - c, \tag{4}$$

且当

$$c > \frac{ab}{(a, b)^2} - \frac{a}{(a, b)} - \frac{b}{(a, b)} \tag{5}$$

时，有

$$g(a, b, c) = \frac{ab}{(a, b)} + c(a, b) - a - b - c. \tag{6}$$

显然，以上 a, b, c 可以轮换.

证　由§2的(12)知，$ax+by+cz=n$ 的全部解可表为

$$x=x_0+b_1t_1-u_1ct_2,\ y=y_0-a_1t_1-u_2ct_2,\ z=z_0+dt_2,$$

[1] 柯召，关于方程 $ax+by+cz=n$，四川大学学报(自然科学版)，1 (1955)，1～4.