

数学教育再探

〔荷兰〕弗赖登塔尔 著

——在中国的讲学

中小学数学教学论著译丛

刘意竹 杨刚 等译

上海教育出版社

Revisiting Mathematics Education

China Lectures

Hans Freudenthal

Copyright ©

KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS 1994

中小学数学教学论著译丛

数学教育再探

——在中国的讲学

[荷兰]弗赖登塔尔著

刘意竹 杨刚等译

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

(邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海东华印务公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.5 插页 4 字数 204,000

1999年2月第1版 1999年2月第1次印刷

印数 1 2,150 本

ISBN 7-5320-6229-5/G·6384 定价(软精):11.60元

译者说明

弗赖登塔尔(Hans Freudenthal, 1905~1990)是世界著名数学家和数学教育家。他曾是荷兰皇家科学院的院士和数学教育研究所的所长。他在 1967 年至 1970 年间任“国际数学教育委员会”(ICMI)主席,在他的倡议下,召开了第一届“国际数学教育大会”(International Congress on Mathematical Education, 简称 ICME)。他一生中为国际数学教育事业作出了巨大的贡献。尤其令人敬佩的是,在他 80 岁高龄之后,依然在不断地思考着数学教育中的问题,关心着孩子们的成长和发展。本书是弗赖登塔尔对他 1987 年访问中国时在报告和座谈会上所表达的思想和观点进行的整理。

弗赖登塔尔有着极其渊博的知识,丰富的教育经验,很多观点和见解是非常独特而深刻的。在他看来,数学的根源是常识,人们通过自己的实践,把这些常识通过反思,组织起来,不断地进行系统化(横向的或纵向的)。因此,他认为数学学习主要是进行“再创造”,或者是他经常提到的“数学化”。按照他的观点,这个“化”的过程必须是由学习者自己主动去完成的,而不是任何外界所强加的。在数学教育中应当特别注意这个数学化的过程,培养学生一种自己获取数学的态度,构建他们自己的数学。

我们怀着无比崇敬的心情翻译了他的著作。在本书中,弗赖登塔尔引用了许多具体而生动的例子。由于他广博的知识和灵活的思维,在报告中有时思路的跳跃很大,但他始终是围绕着一个中心来谈的,那就是如何进行数学化。这些只有在读者仔细地读完他的全部报告,经过回味之后才能体会到。就像在序言中阿兰

J.比肖波(Alan J.Bishop)写的那样，“不要只图浏览，或是读得太快。你需要仔细咀嚼他的文字，以便理解他的思想。”

参加本书翻译的有刘意竹、罗周鸿、丁国忠、王永春、陶雪鹤、卢江、杨刚(以所译章节顺序为序)。最后全部译稿由刘意竹统稿。由于我们的水平非常有限，译文中一定会有很多不够准确的地方，欢迎读者批评指正。

在本书出版之前，陈昌平先生、唐瑞芬、张小萍女士审阅了部分译稿，并提出不少宝贵的修改意见，上海教育出版社韩希塘先生对本书的翻译出版给予了极大的支持和帮助，我们在此一并表示衷心的感谢。

译者

1998年8月于北京

序 言

这书是爱和奉献的成果。如果这说法显得有些古怪，那么我先抱歉，但请让我来解释一下为什么我要用这样的词句。这本书的原稿当然是弗赖登塔尔的，但那是他的同事们，怀着对他本人和对他的思想的热爱，和在多年间发展起来的对共同成就的敬重，而把这个项目推进以臻于完成的。他们邀我来写这序言，这项邀请使我得以表达我对这位伟大人物的敬仰，虽然我会因为没有得到他的允许就来为这书作序而可能惹他生气！我但愿他对所有投入这个特殊项目的同事们的感情能够有所理解。

汉斯·弗赖登塔尔是在 1990 年 10 月 13 日去世的。那时，本书的计划正在进行之中。实际上他在 1988 年 4 月就写信给我，说道：“我正在考虑着一本新书，我已经有了它的副标题(在中国的讲学)，但是我还缺少一个主标题。”我感到很吃惊。他 1975 年就退休了，然而他却一直在坚持工作。后来在 1985 年我们为他庆贺了他的 80 岁生日，那时尽管我在《数学教育研究》的一份编委的话上说过：“我们希望他能享受多年的非退休生活的乐趣”，但是我并没有指望见到他的另一长篇书稿。多数人在他们 80 岁的时候都不打算再写新书了(特别是如果他已经写过了近 200 部数学教育的著作时——见本书末的书目)，然而弗赖登塔尔却不像大多数人一样。这就是这本书为什么如此重要的原因之一。尽管这不是他的最后一部学术著作，它却是弗赖登塔尔在我们的研究领域中最后的一项重大贡献，而且它也向读者提供了他的观点的一个概要。这真是名副其实的弗赖登塔尔。

无论是这本书还是它所载的信息都没有任何结尾，就像 Leen Streefland 在《数学教育研究》21/6 的文章中所说的，“他本人已经做出了弗赖登塔尔后的时代的第一个里程碑”，指的就是这本书。特别是这本书提出了弗赖登塔尔本人所喜欢深究的各式各样的问题和争论，这些问题和争论也从另一个方面表明他对儿童的热爱和尊重。他过去很少公开谈到这点，但是他通过他的所有著作像一座灯塔一样照耀着我们所有搞数学教育以及普通教育的人。他的著作总是集中在他所见到的数学教育的一些关键性的问题上，而儿童正是我们的主要关心所在。

在本书中，充满着轶事和故事；在追求理解和智慧的过程中，充满着对同事们的引述，其中既有成人也有儿童；它既充满着对他所站在其肩膀之上的那些前辈们的敬意；也有对他所不赞成其主张的那些人的批评。这里的语言是“弗赖登塔尔式的英语”。我这么说，并没有任何不友好的意思。他如此热爱语言，他十分清楚以辞害意的危险，因此他竭力地要成为驾御自己语言的大师。当他把书的手稿寄给我时，在 1989 年 5 月的一封信中写道：“我是用文字处理器来把它写出来的——这真是一种耗时的活动啊，因为易于动手作修改就使修改工作难于停止下来了。”

如果你以前读过弗赖登塔尔的书的话，那么你一定知道你会见到些什么的，——那就是洞察、反思、迷人和恰当的例子、严厉的批评、有趣的旁白和聪明睿智——所有这一切，这里都有。如果你还没有读过他的书的话，那么我仅有一点建议，那就是不要只图浏览，或是读得太快。你需要仔细咀嚼他的文字，以便理解他的思想。如果你能这样做，我确信你会像任何一个仔细研究过他的著作的人一样，决不会再像原来的同一个人了。我相信，这就是弗赖登塔尔所希望的。

阿兰 J. 比肖波

Alan J. Bishop

致歉和说明

这既不是序言也不是引言，而是一种致歉和告诫：现在的这本书与我以前在很多地方出版的书相比，并没有增加什么新的东西。我已经放弃了创造，已经不打算再给读者提供任何新的经验、新的内容和他们所期望的新东西——我为此表示歉意。我现在重复以前的观点，目的是做一种综合，但不是编纂，而是进行选择 and 条理化，保留实质和消除矛盾。有些观点即使是有证据支持，对于改革依然是敏感的。我现在的观点是“现地和现时”，是回顾评论而不是概括总结。我是受两方面体验的促动，反面的是通过阅读我以前的工作记录，发现当时我并没有认识自己；正面的是一次到中国的访问，在那里的报告、研讨和座谈，我努力地展示和解释了自己对于数学教育各个方面的观点。无论如何，现在的这本书反映了这些谈话，尽管它没有用逐字逐句的形式。因此，这里面的小标题意味着我对听众们的敬意，由于他们的深入探究与善于评论，促使我在这些观点的明确和具体化等方面得到了提高。

汉斯·弗赖登塔尔

Hans Freudenthal

目 录

译者说明

序言

致歉和说明

第 1 章 数学的现象学	1
1.1 什么是数学?	1
1.1.1 确实和必然	1
1.1.2 作为普通常识的数学	6
1.1.3 为什么数学是不同的	13
1.1.3.1 例子	17
1.1.4 作为活动的数学	20
1.1.5 数学和真实性	22
1.1.6 概念还是思维对象?	26
1.2 构造与结构	28
1.2.1 结构——简单的和丰富的	29
1.2.2 由关系定义的结构	30
1.2.3 代数的结构	31
1.2.4 结构——从小到大	31
1.2.5 数系的生成	32
1.2.6 几何的结构	33
1.2.7 数学的结构	34
1.2.8 从现实看结构	37

1.2.8.1 科学的结构和发展	38
1.2.8.2 科学的结构和教学	39
1.2.8.3 数学地构造丰富的背景	41
1.3 数学化	42
1.3.1 术语	42
1.3.2 某些方面	44
1.3.3 例子	50
1.3.4 数学化——横向的和纵向的	56
1.3.5 例子	57
第2章 教学原理	62
2.1 有指导的再创造	63
2.1.1 往哪儿指导?	68
2.1.2 在哪儿指导?	70
2.1.3 怎样指导?	77
2.1.4 算法化	79
2.1.5 再创造几何	88
2.2 结合现实	92
2.2.1 原始的现实	92
2.2.2 古怪的世界	94
2.2.3 丰富的背景	102
2.2.3.1 背景与“材料”	105
2.2.4 范例	106
2.2.4.1 强加的范例	107
2.2.4.2 再创造的范例	110
2.2.4.3 作为范例的行为、行动和活动	115

2.2.5 应用	117
2.3 学习过程	119
2.3.1 “学习过程”作为一个教学原理	119
2.3.2 教与学的过程	120
2.3.3 观察作为一个教学原理	122
2.3.4 学习过程中的水平	131
2.3.5 反思	140
2.3.6 反思和观察	148
2.4 长期的学习过程	149
2.4.1 学习忘记	149
2.4.2 记忆学习过程	152
2.4.3 洞察力	153
2.4.3.1 测试洞察力	155
2.4.4 训练	156
2.4.5 组织学习过程	159
2.4.6 获取一种数学态度	166
第3章 数学教育的前景	170
3.1 数学教育理论	170
3.1.1 理论	171
3.1.2 理论框架	175
3.1.3 哲学背景	177
3.1.4 对数学和数学教育的看法	178
3.1.5 数学教育分类	180
3.1.6 数学教育的哲学	183
3.1.7 分类的应用	185

3.1.8 信念问题	186
3.1.9 学习理论和哲学	188
3.1.9.1 加里培林和唯物主义	189
3.1.9.2 建构主义和“康德”	195
3.2 数学教育的研究	201
3.2.1 研究	201
3.2.2 教育研究	204
3.2.3 发展的研究	214
3.3 数学教育的实践	226
3.3.1 实践	226
3.3.2 能力的背景	227
3.3.3 被教的和被学的——学科内容问题	228
3.3.4 被教的和被学的——各种动因	230
3.3.5 被教的和被学的——相互交错	232
3.3.6 变革	233
3.3.7 变革的动因	235
3.3.7.1 作为组织者的教育发展者	235
3.3.7.2 教师	236
3.3.7.3 教师培训	237
3.3.7.4 教科书的作者	244
3.3.8 数学为大众	247
后记	250
附录	251
作者在数学教育方面的出版物	253

数学的现象学

1.1 什么是数学？

1.1.1 确实和必然

什么是数学？这是一个难以回答的问题。先不要去查词典！我每次查词典所得的答案总是不对的。

Mathematics 一词看来是一个复数名词，像在法文里它至今还叫做 Les Mathématiques 一样。的确，很久以前它确实表示复数：即四艺（自由民所追求的一些技艺）。数学曾经是四门学科：算术、几何、天文学和音乐，处于一种比语法、修辞和辩证法这三门学科更高的地位。只有当这个复数——它最后的“s”不再被人理解，而且被一些新的科学名词所占用了的时候，如 physics、economics，它就不再被人这样看了。

用更进一步的观点来说，在我以往回答“什么是数学”的这个问题时，它是出现在中世纪的希腊-罗马时代或是稍后的一些智慧之中。

就我所熟悉的语言来讲，荷兰文是唯一特殊的。其中数学这个名词既不起源于又不相像于国际上认同的 Mathematica 这个词。在以往的荷兰文中，数学这个词实际上是由西蒙·斯蒂文（Simon Stevin，1548 - 1620）杜撰的——Wiskunde，即必

然的科学。Wis en zeker 表示确实和必然，也就是不会产生任何怀疑；而 kunde 是知识的意思，即科学和理论。其实，自从斯蒂文起，或是在此之前，数学就好像已经表现出这种恰当的定义，但由于这是一种似乎有点自命不凡的定义，在编纂词典的人的眼中是不会得到赞同的。

即使它是有点自命不凡，但确实是斯蒂文对于命名科学（和其他一些东西）的一种冲击，抓住其最主要的特征，而不是别的。数学最主要的特征是必然性，或是一个人所确信的东西。但是，必然又是如何地“必然”呢？常识不是最原始最接近于必然的吗？但是又有什么像数学这样远离常识呢？常识把一切都看成是理所当然的，不论它是根据合理的或不合理的推理。数学则要求很好的推理，就像其他科学一样，甚至比任何其他科学还要好些。在科学中对于必然性的需要是不能用想当然来说明的；必然性是被追求的，而且在数学中这种追求是由一种相当独特的脑力活动来完成的。这种脑力活动比它的学科内容更加重要，借助内容把数学描述成一个领域，这种脑力活动可以在其中得到最适当和最有效的训练。为了在适当的场合更特别地对待它，我们先把这些保存在脑子里：那就是，由于某些难以理解的推理，作为脑力活动的数学方法创造着必然性，而且确实如此，也许还不止这些。

如果说数学是最适当和最有效地应用数学方法的领域，那么在数学以外有些领域也应用了数学方法，也许在适当和有效等方面稍差一些，是这样吗？或是说真的有数学以外的领域吗？数学作为一个领域到底能伸展多远？让我们再返回到斯蒂文，事实上他没有使用 wiskunde 这个词，而用的是 wisconst，或者是像我们现在拼的那样，wiskunst。当 Kunst 意味着艺术时，Kunde 意味着科学。在我们医学院的教学中，当医生的实习是医疗的艺术（geneeskunst）时，geneeskunde 是医疗的科学。作为一

个研究领域的命名人，斯蒂文喜欢把名词 *kunst* 放在 *kunde* 之上，即把艺术 *art* 放在科学 *science* 之上。艺术 “*Art*” 这个词在 “*Arts and Sciences*”（艺术和科学）中，听起来不同于 “*Arts and Crafts*”（艺术和技巧）中的 “*Art*”。斯蒂文是把哪个词与 “*Art*” 联合在一起呢？斯蒂文是一个工程师，但是我确信他明白这个词的两个方面，因为很多先于和后于他的人都已经这样说过，或准备这样做。

数学作为一种艺术，一种确实的脑力的艺术，对于大多数人来说，认为它接近于技巧，要比它接近于科学更多些，把它看作是一种工具更多于它本身的目的。更明显的认识是因为它能应用，强于因为它是必然的。但是，为什么它能够应用？因为它是必然的吗？尽管很多人相信数学，以至超过了它理所当然的价值。数学能够应用仅仅是在它能够被正确应用的时候。但是什么是对，什么是错呢？有什么办法可以检验吗？如果有，这样的检验是与数学对抗的吗？如果是，能到什么程度？一旦一个人已经接受了数学是一种艺术，他就不可能回避判断的责任。在特定的情况下，他就是在恰当地应用着数学，或者是在滥用着数学；当他要做某项决定时，他的表现也好像是一个数学家。让我们用一个众所周知的历史事例来解释这些吧。

忽略掉其他的先兆，概率论开始于两个问题的讨论。其中第二个问题是分配问题（*problème des partis*）。让我用一种简化的形式来说明它。A 和 B 两个人约定了一种游戏（具有同样多获胜的机会）：首先赢得 5 分的人将赢得所有的奖品。而实际上，游戏在如下的情况时就终止了。

A：4 分 B：3 分

那么，这时奖品该怎么分呢？人们有不同的看法。一些人说：按 4 : 3 的比例分；另一些人说：按 $(5-3) : (5-4)$ 的比例分。实际上两种说法都说出了一点儿道理。但是数学怎样说呢？

或者再进一步说，如果问到数学家帕斯卡（Pascal）时，他又
会怎样说呢？如今，我们也许会说：让我们来拍卖这种结局吧！
为了继续进行下去，A 和 B 各有多少机会？如果 B 能拉平分数，
奖品就会按照 50 : 50 来分，但是他能这样做的机会只有 50%。
所以，他只能要求得到四分之一的奖品，因此公平的分配是 3 :
1。

看，数学家是怎样应用算术的艺术来决定正确与错误的！事
实上，决定在一开始并不是显而易见的，而是一种对正反面意见
的尝试或掂量，这是另一种算术，那就是数学；而且数学家极其
需要揭示这种观点。

作为一种有用的工具，数学已经战胜了随着科学和社会领域
快速发展而来的丰富的变化，它已经成为迅速增长的人群必不可
少的东西。他们要应用数学，因为他们不能没有它。那么，这种
数学又是如何地确实和必然呢？

在经历了 12 年的旅行之后，旅行者 2 号（飞船）在与海王
星会面时晚到了 1 秒钟——这是事实。那么确实和必然的是数
学，是不是？天文学家用百万年来计数，按照百万年这个比例，
这里的 1 秒就是 1 天——至少如果你承认这个比例的话。这就是
确实和必然的吗？当他们预言这个最接近的时间时，就给这个数
加上“±”以解释平均误差。我曾听到过一个绝对的断言，数学
只知道精确的数。我就问他：那么误差计算该怎么办？那是物理
学、大地测量学、天文学的事——他反驳道。实际上，这就是数
学家精心设计的“数学以外”的数学。判断某些应用数学是否是
确实和必然的也许是另一种数学——正式的误差计算的数学；那
么，只要它被正确地应用，它就是确实和必然的，也就是说具有
洞察力更胜于作为一种诀窍，然而不幸的是人们经常视之为诀
窍，还不仅是在教育中。如今，流行的误差理论不再满足于把判
断是否确实和必然的数学看作是数学外的东西。那么，大量的

“数学模型”又是什么呢？对于一个面对“它是如何确实和必然”这样的问题的人来说，数学是确实和必然的。

但是，我们不要忘记数学本身的目标，它吸引了像古代巴比伦人那样早的内行们，而且它已被历史地证明是必不可少的，对它自己长期的发展来说就像是一台有力的发动机。它是一个重要的方面，尽管这很少涉及我们，因为我们数学教育这个学科接受着非常大的团体，比那些将来仅选择数学本身作为专业目标的少数人的团体要大得多。

即使数学“内部”的必然性被看成是理所当然的，仍旧存在着某些被说成是它的“外部”的必然性。对此的回答是，这是预先设计的：它依赖一个人对待数学的情况而定——这是一个需要进一步讨论的要点。不管怎样，对于刻划数学是如何确实和必然的，西蒙·斯蒂文也许已经有了很好的推理，而且他的前人和后人也是这样做的，尽管他们不能很好地反映它。但是对于大多数人来说又是如何呢？对于大街上的随便一个人来说，必然性作为数学最有意义的特征，我们这样做是否太冒失了？这样可能远远地超过了他力所能及的极限。如果这种假定是正确的，有人可能会问，对数学必然性的这种信任是怎么得来的。答案是：这取决于问题要扩展到什么地步，以及人们熟悉数学时的方式和方法。

大多数人学习数学时，是把它作为一套处理问题的规则，或是作为我们在数学中所说的算法来学习的。这是一种通过学习来掌握的适当经验，如果不这样就是不适当的。教师用这种方式教数学的原因之一是传统：他们自己学数学时就是这样。即使当他们忘记了这种不能使他们真正懂得数学的方式之后，他们也会这样教数学。另外一个原因是数学的结构，它不像任何其他的艺术和科学，它可以放在规则和算法之中。这是一个惊人的事实，这些规则从来不会失效，或者说如果它们失效了，使用者就会感到犯了错误，就会去查找他自己的错误并去努力修改。但是对他来

说，这个事实是惊人的吗？或者说，它是一种简单的无根据的信仰——主观的理解吗？让我们用下面这个小故事来结束这个小标题。

有一个 75 岁的老太太，她经常被儿童和学生缠着，帮他们做作业。她遇到了一位专业数学家——也许是她平生第一次——当时她恰好在教一个大学生欧几里得算法，求两个正整数的最大公约数。她就问这个数学家为什么可以这样做，还有没有其他理由。这个数学家就帮助她自己来回答这个问题。也许，这里值得一提的是当时数学家是怎样帮助她的。他只给了一点儿提示：如果 a 和 b 是两个正整数，并且 $a > b$ （实际上他当时选出了这样的一对数），用 a 和 $a-b$ 的最大公约数与 a 和 b 的最大公约数做比较！

又有一次，她又问了这个数学家一个问题，是关于一种老式的求平方根的算法。对此算法她一生深信不疑。当时，数学家不同意她这样做，并教给她一个更有效的算法，她非常理解地就接受了。

还有一次，她又问这个数学家，为什么两个数进行加、减、乘运算时，各位数字要规规矩矩写在原始数据的下面——这是一种很容易解释的现象。

她从来没问过这个数学家为什么做算术时逆运算可以“证明这个和”，为什么各种算术的算法都能够施行，为什么有些运算是可交换的，为什么素因数的分解是唯一的。

为什么她怀疑某些规则（她真的怀疑吗？），而又要接受其他的？稍后我们将试看回答这些问题。

1.1.2 作为普通常识的数学

前面我问到过：为什么普通常识不是基本的必然性，不是必然性最充分的和最可靠的根源。从某种意义说，尽管古代先进的