

土木工程中计算机应用文集

中国土木工程学会计算机应用学会编委会 编

科学出版社

1985

前 言

近几年来,电子计算机在土木工程中的应用日益广泛,得到了迅速发展,除大量用于科研和设计的数值计算外,还逐步用于管理和绘图等方面.很多部门都培养了不少从事计算机应用软件研制工作的人材,编制出了许多可供实际使用的计算机程序,解决了一大批工程实际问题.这些情况表明,电子计算机的应用对于加快设计速度、提高设计水平和保证工程质量起了重大的作用,效果是很显著的.

为了适应形势的需要,促进土木工程中计算机的应用,中国土木工程学会计算机应用学会于1981年12月在昆明市召开了成立大会暨第一次学术交流会,交流了213篇论文.参加会议的代表和没有参加会议的许多同志都建议就此选编一本文集,以反映在我国土木工程中计算机的应用情况和研究成果,更广泛地交流经验.本学会又于1982年6月在北京组成了文集编委会,并对那次会议的论文进行了审查和评选,方才编成本文集.

本文集共有二十九篇论文,包括结构分析、计算方法、优化、计算机辅助设计等几方面的内容,其中绝大多数着重于应用并编制了可供使用的计算机程序(本文集未附).由于篇幅的限制,并考虑到代表性和反映不同方面的应用情况,无疑会有不少质量较高的论文未被选入,而选入的论文则又可能不够成熟.对于本文集中存在的缺点和错误,请读者批评指正.

中国土木工程学会计算机应用学会编委会

一九八二年十一月

内 容 简 介

本文集介绍了1981年12月在昆明召开的中国土木工程学会计算机应用学会第一次学术交流会的部分论文,内容包括结构分析(静、动力及非线性分析等)、计算方法、优化、计算机辅助设计等,反映了我国近几年来计算机在土木工程中的应用情况和科研成果,比较实用。

本文集可供土木工程方面从事计算机应用的广大科研、设计人员和高等院校有关专业的师生参考。

中国土木工程学会计算机应用学会

编 委 会 名 单

主 编 赵超燮
副主编 傅作新 钟万勰 缪兆杰
傅子智
编 委 龙驭球 钱培风 朱伯芳
李炳威 武际可 孙焕纯
龚尧南 沈鹏程 寿楠椿
王道堂 陈德冥 陶全心
陶振宗 陈际明 周之德
何春发 安国柱 刘长学

土木工程中计算机应用文集

中国土木工程学会计算机应用学会编委会 编
责任编辑 杨家福

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年1月第一版 开本:787×1092 1/16
1985年1月第一次印刷 印张:19 1/2 插页:1
印数:0001—6,400 字数:449,000

统一书号:15031·624

本社书号:3824·15—8

定价:4.85元

目 录

前言

多层子结构局部非线性结构分析

——FEXI-JIGFEX程序原理·····	钟万勰 (1)
非线性有限元法的发展及其应用·····	龚尧南 (12)
钢筋混凝土剪力墙-框架杆系结构的弹塑性地震反应分析·····	沈聚敏、张铜生 (19)
高层建筑空间杆系-薄壁结构静、动力分析程序·····	王国俭、周纯铮 (29)
钢筋混凝土结构的有限单元法非线性分析 ·····	李锡胤、刘永绣 (40)
双曲扁壳有限条分析与微型计算机程序·····	沈鹏程、苏甘龙、王建国 (50)
斜交箱形桥厚壳元分析·····	周新六 (62)
水中任意布置各种柱径的多柱结构的动力、抗震分析·····	曲乃泗 (72)
大变形柔索结构计算 ·····	刘北辰、张瑜 (80)
薄壁结构的大位移与稳定性分析 ·····	李喜明、李德全等 (91)
样条函数法解弹性矩形板的振动问题·····	罗崧发、张大名 (102)
弹性地基上梁板问题的样条有限元法 ·····	王煜魔 (115)
结构矩阵分析中的逆步变换·····	寿楠椿 (126)
200000 阶稀疏矩阵方程的求解问题 ·····	刘长学 (134)
消元分解法 ·····	赵超燮、陶振宗 (144)
组合结构的一类过渡元素·····	尹泽勇、尹晶、任培正 (150)
有限元信息自动化的 ZL 法·····	王化东 (161)
有限元节点编号的优化方法·····	王继存 (177)
充分利用行为约束近似显式的结构最小重量设计·····	李炳威 (185)
框架结构优化设计的准则法·····	朱伯芳 (198)
单层厂房钢结构框排架柱优化设计 ·····	汪心冽、曾德修、马树勋、李树信 (208)
火力发电厂钢筋混凝土框架优化设计·····	梁凤岐等 (228)
平板网架的优化设计·····	林立岩 (238)
给水管网最优化设计的一个方法·····	俞国平 (249)
梯度投影法优化铁路纵断面设计 ·····	詹振炎、宋治伦 (259)
对称型驼峰头部平面电算辅助设计通用程序 ·····	安国柱、吴智明 (268)
电子计算机在配制城市暴雨公式中的应用·····	韦鹤平 (274)
小型数控绘图仪在土建科研中的应用·····	王玉庭 (282)
计划协调技术——PERT 网络计划的计算方法及通用程序·····	潘宝根 (290)

多层子结构局部非线性结构分析

——FEXI-JIGFEX 程序原理

钟 万 颢

(大连工学院工程力学研究所)

一、力学方面的考察

在分析工程结构问题时,虽然遇到大量线性问题,但非线性结构分析的问题也极为广泛.涉及到土壤与结构相互作用的课题往往是非线性的,例如在海洋工程结构规范中,对于桩与土壤的相互作用,规定了土壤反力应当用非线性的 P - Y 曲线来加以描述.因此,海洋平台的结构分析便成为相当于材料非线性的非线性问题.

在材料非线性问题中,广泛地存在于工程结构中的弹塑性变形问题也是我们极为关心的.

至于几何非线性问题,其特点是需要按结构变形后的位置来列出单元的平衡方程,或者采用一个计及单元当前位移与内力的单元几何刚度阵,以组装到结构总刚度阵外力向量中去,就可以考虑到问题的非线性性质.

大家知道,非线性结构分析一般不能直接求出精确解,通常用迭代法才能求解.由于各式各样非线性分析问题的特点,不能指望有一个迭代方法对于所有类型的非线性问题都是最好的.为此,人们设计了很多种迭代方法,其适用范围也各有不同(见参考文献[1]).

在塑性力学中,一般提倡使用考虑材料变形历时的弹性变形的增量理论.有时,为了求解方便也使用变形理论.变形理论仅当材料的每一点是比例加载且无卸载时才与增量理论的结果一致,但它往往也能提供一个工程上可用的近似解.事实上,有许多解析法得到的准确解是符合变形理论的.

变形理论的一个特点是材料内力可以由它当时发生的变形完全决定(这样就与加载的历时无关).这样一来,数据管理上就可以不必保存每一个单元的内力.这一因素对于存贮不足的计算机来说是很重要的.

在考虑结构与土壤相互作用时,海洋工程结构规范中给出了按 P - Y 曲线估价土壤抗力的条文.对于这种非线性结构的分析,就可以使用变形理论.

没有卸载时,变形理论就象非线性弹性问题一样.

为了进行非线性分析,我们只能选用某种迭代法来求解.对于这类非线性程序不很“深”的结构,达到迭代收敛一般比较方便.另一方面,由于我们打算面对复杂的工程结构,计算工作量较大,因此希望选用收敛比较快的迭代方法.这样,我们先考虑牛顿-拉非逊方法,这个方法有平方的收敛速度,一般收敛较快,但当结构的非线性性质较复杂时,有

时也会不收敛。

为了形象地说明起见,一般用图1所示的曲线(单自由度体系)来描述。选择初始点

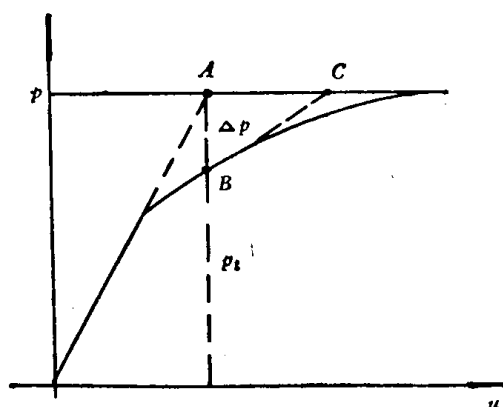


图1 单自由度的牛顿法

为原点,找出切线,在给定的外力值 P 作用之下得到 A 点,变形值表示为 u_A 。 u_A 位移与曲线交于 B 点,相应的外力值为 p_1 ,它与给定的外力 P 相差为

$$\Delta P = P - p_1$$

再在 B 点作切线,得到 C 点,它仍不是准确解,再继续迭代直至收敛。

牛顿-拉菲逊法虽然收敛较快,但要求每次都找出切线,这相当于重新生成结构的总刚度阵,并三角化与回代求解。当问题的规模大时,这种从头开始的迭代当然耗费巨大。

因此在此基础上又有各种修正的牛顿-拉菲逊法(亦见参考文献[1])。

在非线性的结构分析问题中,有相当大的一类问题进入材料非线性的结构部分只是较小的一个局部。在此情况下,需要进行迭代的结构部分只是预先估计可能进入塑性的那些部位。既然这个部分是比较局部的,那么我们自然就会提出在迭代过程中是否可以不要对整个结构从头做起,而只将迭代求解的部分限于“预先估计可能进入塑性的那些部位”。这样一来,进行重分析的耗费就再不是如全结构一样从头做起的那样巨大了。在这种条件下,就可以用牛顿-拉菲逊法来进行迭代,以提高收敛速度;我们用子结构方法来实现这个方案。其要点为将整个子结构中的弹性部分看成为一个或若干个超级单元,这些超级单元与“估计可能进入非线性的部位”拼装起来就成为整个结构。这些超级单元是完全在线性阶段工作的,而线性阶段的计算可以一次完成,不需要随着非线性部分一起迭代。具体地说,超级单元的位移可以划分为出口位移与内部位移两部分,内部位移的凝聚消元工作可以一次完成,只有出口位移才有必要随着非线性部分一起迭代。这一来,反复进行迭代的位移未知数只是一小部分,从而大大地减少了计算工作量。

在非线性结构分析问题中,由于问题具有必须进行迭代的特点,计算工作量大是一个不容忽视的问题。对于局部非线性的课题,采用灵活的多层子结构法以减少计算工作量,与通常的全部结构都参加迭代的方法相比,有很大的优点。在计算机资源较弱的条件下,当然应当努力研制多层子结构的非线性分析方法的程序。

大家知道,位移法结构分析相当于变分原理中的最小势能原理。在不考虑卸载及使用形变理论的条件,结构分析相当于使用非线性弹性理论。此时当然也可以使用最小势能原理。例如对于海洋工程结构的土壤反力,在进行一次加载的分析时就是如此。

增量理论比较符合实际情况,它要求对每一个时间步长进行迭代求解,会耗费更多的计算机时,但原则上并不会对计算机程序实现造成困难。本文中暂时使用变形理论来求解。对于普通的海工结构,这也相当充分了。

如图2所示的钻井平台导管架及其桩基础共同作用的结构,其上部结构可以认为是线性的。在深层地基处,桩的位移肯定比较小,因此土壤对于桩的相互作用可以作为线性问题来处理;只有在桩入土不深处的位移较大,桩与土的相互作用必须作为非线性问题来

处理。

如图 2 所示, 在外力的作用下, 结构的变形能 U 可以分成几部分之和(连用地基),

$$U = U_A + U_B + U_N \quad (1)$$

其中 U_A 是线性部分 A (上部结构) 的变形能, U_B 是线性部分 B 的变形能, 而 U_N 则是非线性部分的变形能。

线性部分包括了整个上部结构, 这是一个规模相当大的结构部分, 分析一遍会消耗较多的机时, 幸而这只是一个线性部分, 因此保证了其变形能 U_A 是变位 $\{w_A\}$ 的一个二次齐次式; 在线性部分 A 上还有外力 $\{p_A\}$ 作用, 其相应的外力势能算式中只包含变位 $\{w_A\}$ 的一次式。用 Π_A 表示 A 部分的势能, 则

$$\Pi_A = U_A - \{p_A^T\} * \{W_A\} \quad (2)$$

这里作用在结构部分 A 上的外力 $\{p_A\}$ 是与变位 $\{W_A\}$ 无关的, 因此上式后一项是 $\{W_A\}$ 的线性函数。

现在我们将 A 部分的变位向量 $\{W_A\}$ 分成两个部分, 出口位移 $\{W_o\}$ 与内部位移 $\{W_i\}$ 。为了简单起见, 将下角标 A 取消了, 这不会引起混淆。所谓出口位移就是将来要与整个结构的其余部分拼装的节点位移, 而内部位移则是不再与其余部分相连接的节点的位移。

对于整个结构来说, U_A 只是其变形能的一部分。由于以上对于位移作出口与内部的划分, U_A 相应地也分成三个部分:

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{1}{2} \{W_A^T\} \cdot [R_A] \cdot \{W_A\} \\ &= \frac{1}{2} \{W_i^T\} \cdot [R_{ii}] \cdot \{W_i\} + \{W_i^T\} \cdot [R_{io}] \{W_o\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{W_o^T\} \cdot [R_{oo}] \{W_o\} \end{aligned} \quad (3)$$

同样地, 对外力势能有

$$-\{p_A^T\} \cdot \{W_A\} = -\{p_o^T\} \{W_o\} - \{p_i^T\} \cdot \{W_i\} \quad (4)$$

这里对应于 A 部分的刚度阵 R_A 也分成了三个部分:

$$[R_A] = \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{io} \\ R_{oi} & R_{oo} \end{bmatrix} \quad (5)$$

即内部刚度阵 $[R_{ii}]$, 出口刚度阵 $[R_{oo}]$ 及交互阵 $[R_{oi}] = [R_{io}^T]$ 。可以断言, 整个结构的变形能算式中, 含有 $\{W_i\}$ 的项已全部在此。这是因为 $\{W_i\}$ 的节点已不会再与结构的其余部分有单元直接连通, 因此不再有别的项含有 $\{W_i\}$ 。

既然 $\{W_i\}$ 的项已全部在此, 它就可以先行消元。对 Π_A 取 $\{W_i\}$ 的偏微商为零, 得

$$\begin{aligned} [R_{ii}] \cdot \{W_i\} + [R_{io}] \cdot \{W_o\} &= \{p_i\} \\ \{W_i\} &= [R_{ii}^{-1}] (-[R_{io}] \{W_o\} + \{p_i\}) \end{aligned} \quad (6)$$

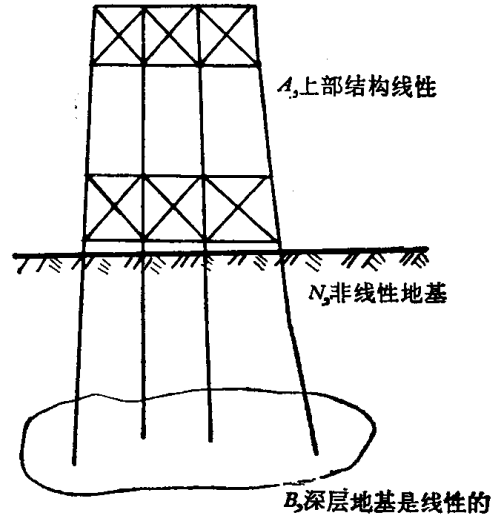


图 2 导管架结构

将此代回到 Π_A 的算式中,得

$$\Pi_A = \frac{1}{2} \{W_0^T\} [R'_{00}] \cdot \{W_0\} - \{p_0'^T\} \cdot \{W_0\} \quad (7)$$

其中

$$[R'_{00}] = [R_{00}] - [R_{0i}] \cdot [R_{ii}^{-1}] \cdot [R_{i0}] \quad (8)$$

$$\{p_0'^T\} = \{p_0\} - [R_{0i}] \cdot [R_{ii}^{-1}] \cdot \{P_i\} \quad (9)$$

这就是线性子结构的凝聚公式。注意,这里的推导只用到 A 部分线性的性质,而不管结构的其余部分是否线性。

如果在结构中有若干个子结构,其构成规律相同,即使它装在整个结构的不同部位,方向不一样,作用的外力也不一样,但我们看到出口刚度阵 $[R_{00}]$ 的凝聚是与外力无关的。因此,具有相同构造的线性子结构只需要对出口刚度进行一次凝聚即可。而一般来说其外力应当分别进行凝聚。因此,我们就引入了子结构模式的概念^[2]。子结构模式具有其本身的构造,由其本身的一个坐标系来描述,在其上可以作用有各式各样的外载模式。对这个子结构模式进行凝聚之后,就可以按结构各部分的实际构成情况,选用恰当的外载模式的线性组合,将它装到整体结构的各个部位去。这样一来,结构中相同构造的子结构(超级单元)只需要进行一次凝聚便可。这样就可以大量减少计算工作量。

在非线性结构分析中,一般必须用迭代法进行求解。这样总刚度阵需要组装若干次,但只要该部分是一个线性的超级单元,那么它也只要凝聚一次就行了。以后的迭代工作只是将这个超级单元的出口刚度阵及出口外力阵参加整体结构的组装而已。

对于海工平台结构(图2),土壤以上的部分是线性的,因此就可以作为一个线性超级单元来处理,它只要凝聚一次出口刚度阵,而在整体结构的非线性迭代求解时,不再对上部结构重复计算,这无疑是极为有利的。

二、多层子结构算法

上一节谈到子结构算法对于局部非线性问题的极大优点。为了应用灵活,还需要将整体结构划分成多层子结构来进行分析。

平台的上部结构为线性的。桩在土壤中,当土壤的抗力为非线性时,连同土壤在一起桩也就成为非线性的。但只在桩的变位较大的部位,实际上才有非线性的特性。深层桩段变位很小,该段桩及其相关连的土壤抗力也是线性的。鉴于线性的部分可以免于多次重复的迭代,为提高效率起见,也应当将它当作一个线性超级单元。

对于变位较大的上段桩及其与土壤的共同作用来说,它是非线性的,但也可以处理成一个非线性超级单元,非线性超级单元也不能避免迭代,但它有助于减少结构的原始数据,尤其是当采用一维变带宽的总刚度阵时,有助于改善联立方程的组织,使非线性迭代更加有效。

这样一来,整体结构就被划分成为多层子结构的组合,通常用结构构成树来表示(图3),其特点为在子结构的下面还有子结构。

大家知道,在单级结构分析时,可以分出联立方程,组装并三角化以及生成外力向量,并回代求解两个主要步骤。在用多层子结构法求解时,相应地可以分出对于结构树的后

序组装周游与回代求解的前序周游, 即 PHASE 2 与 PHASE3^[2] 的步骤. 为了描述清楚起见, 需要叙述一下树形结构的周游.

结构树中的每一个部分都是超级单元, 它显然是结构的一个部分. 在多层子结构算法的程序 JIGFEX 中, 子结构模式(调用后成为超级单元)的构成规则是, 它可以包含基本单元也可以含有低一级的超级单元. 因此, 在组装结构的整体刚度阵时(即在 PHASE2), 不能漏掉任一个超级单元. 任一个超级单元的刚度阵必须由它所调用的超级单元的出口刚度组装而成. 因而在访问结构构成树的任一个树节点时, 必须访问其所有的下属分支. 这样的访问便是后序周游. 按数据结构的说法, 后序周游的规则是: 先访问子树的所有分支, 再访问子树的树根. 对于荷载阵的凝聚也是按后序周游的. 而前序周游的规则是: 先访问子树的树根, 再访问子树的各分支子树^[3].

在回代求解计算位移时, 次序正好相反, 对于每一个超级单元来说, 必须先求出其出口位移 w_o , 才能求出其内部位移 w_i . 因此得出的规则是先访问子树的树根, 再访问其各分支. 这就是说, PHASE3 的位移求解应当按前序周游结构树.

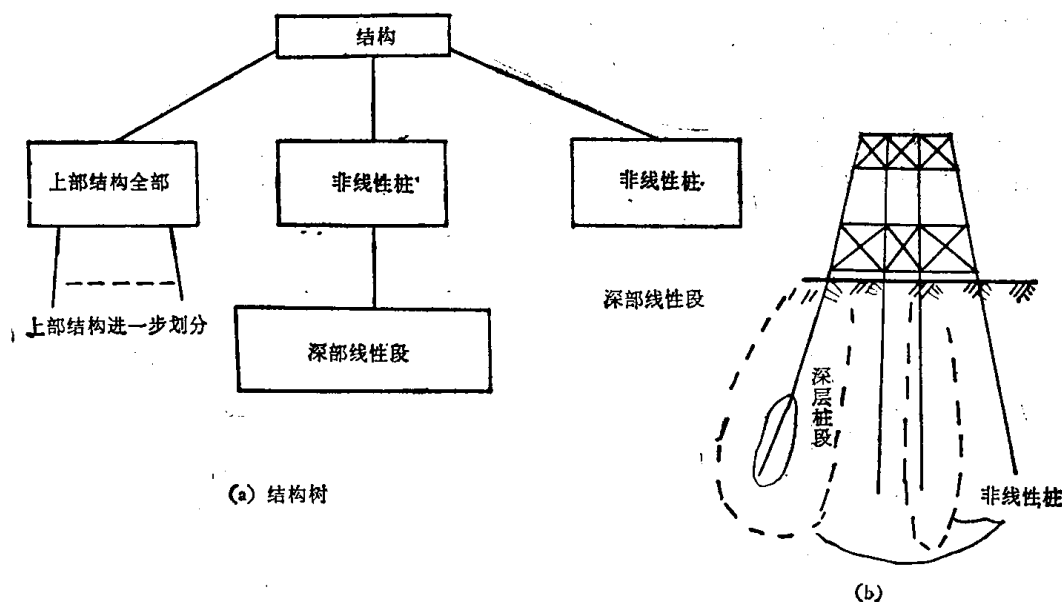


图 3

三、非线性多层子结构的迭代

一个结构, 只要其中有一小部分是线性的, 则整个结构就是非线性的. 例如考虑桩基非线性性质的海工平台结构就是如此. 因此结构的总体分析也就非用迭代法求解不可. 为了提高效率, 我们可以用子结构法预先消去线性部分的内部未知数. 对于结构的非线性部分, 应当反复进行迭代, 此时子结构计算的方法是否完全没有必要了呢? 不是. 在某些情况下, 多层子结构计算方法仍然是一个有力的工具. 海工结构非线性桩基共同作用的课题就说明了这一点.

先看一下不采用子结构方法时非线性问题的牛顿-拉菲逊迭代法. 设原方程为

$$[R] * \{x\} = \{p\}$$

式中刚度阵 $[R]$ 是与位移 $\{x\}$ 有关的。迭代的进程可以是

```

{将位移赋初值,例如  $\{x_0\} = 0\}$ 
for I: = 1 Step 1 until 10 do begin
{根据结构在本次迭代的状态,即位移为  $\{x_i\}$  还有应力等,组装总刚度阵  $[R_i]$  以及
未平衡的外力向量  $\{\Delta p_i\}$ 
{将总刚度阵  $[R_i]$  三角化}
{回代求解,求出位移增量
 $\{\Delta x_i\} := [R_i^{-1}] \cdot \{\Delta p_i\}$ 
{修改位移  $\{x_{i+1}\} := \{x_i\} + \{\Delta x_i\}$ 
if  $|\Delta x_i| < \varepsilon$  then go to out
end;
out: (打印计算结果)
```

可以看到,上述的牛顿-拉非逊算法每一个循环要组装生成总刚度阵,并三角化,这是相当消耗计算机时的。而采用子结构法,线性部分可免于重复计算。

对于上述海工结构的情况来说,剩下的桩基非线性部分有如一个块茎,由上而下生出很多分支来(图4)。如果我们对于联立方程的组织是采用通常的一维变带宽的那种数据结构形式,并采用相应的解法,那么在编排未知数次序时就有些困难。设在 x 与 y 方向各有四排桩,共十六根,如果节点按横向编排,则半带宽就成为十六个节点的未知数(图5)。

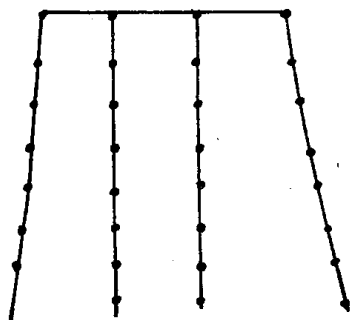


图 4

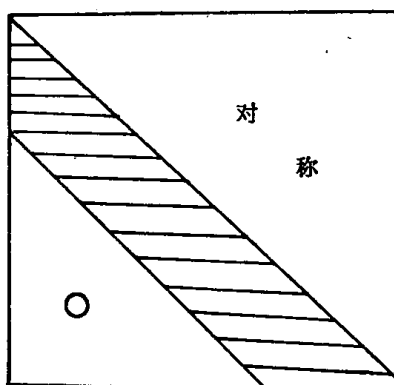


图5 横向编排

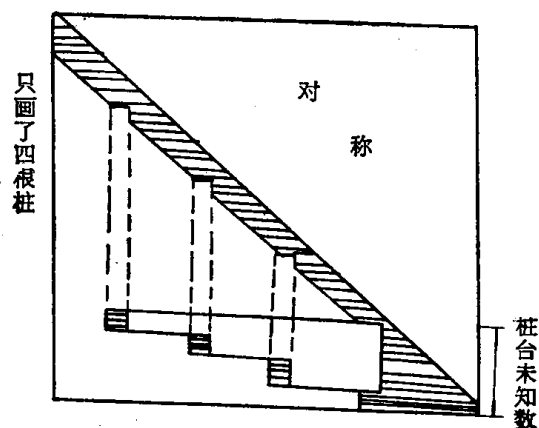


图6 纵向编排(桩台未知数处有许多零)

刚度阵三角化时的计算工作量与带宽的平方成比例。这样的带宽显然不能使人满意。如果逐根桩的节点顺序编排,而桩台的节点排在最后,那么在桩台的未知数处带宽就非常大(图6),不能令人满意。

当然对于这种类型的问题,最宜于采用“少赔-少度”的联立方程组织及求解法^[4]。由于该法不管带宽,上述由于数据组织发生的问题得以解决,因此是一个较好的办法。

但“少赔-少度”方法需要花费相当大的程序段。由于既然对结构的线性部分已用了多层子结构的方法,我们可以对此加以发展,使多层子结构法也可用于非线性迭代,以达到提高效率的目的。

对于上述的海工平台问题,把每一个非线性的桩都作为一个子结构进行凝聚,然后再与桩台一起装配进行求解。这种计算方案对于每根桩来说只有一个节点的带宽,而在最后与桩台一起求解时,就只相当于图6中右下的一个三角了。而图6中桩台未知数处的那些0就不必加以计算与存贮,计算效率得以大大提高。

对于非线性问题,应当用牛顿法来迭代求解。要区别增量与全量,相当于单级求解时一样,应当提出一个迭代的算法过程。因为这是一个多层子结构装配的算法,有线性的也有非线性的子结构。虽然本质上还是牛顿法,但迭代时就复杂了。

我们规定,线性子结构模式应当是其所有的单元及超级单元都为线性的。只要其中一个是非线性的,那么它就是非线性的子结构模式。

一个子结构模式是线性还是非线性是可以在一开始就规定的。我们看到这里的线性是严格的,指的是在荷载作用下肯定在线性阶段工作的部分,而不包含那些既可能在线性阶段又可能在非线性阶段工作的部分。

一个超线单元是某子结构模式的一个实现。如果子结构模式是线性的,那么超线单元一定也是线性的。如果子结构模式是非线性的,那么超级单元就要作具体分析。如果受力小,这个超级单元仍可能在线性阶段工作;只当受力较大而在非线性阶段工作时,该超级单元才是非线性的。此时,该超级单元需要在每次迭代中重新进行凝聚。

对于非线性阶段工作的超级单元,即使是调用同一个子结构模式生成的,也必须分别凝聚。因为在非线性阶段工作时,单元的出口刚度阵还与它当时的位移与内力有关。牛顿-拉非逊法相当于切线模量法。因此非线性超级单元的凝聚与上文中对于线性子结构模式的公式是一样的。只是对于超级单元总刚度阵的生成需要对于它所调用的低级超级单元及基本单元采用切线模量来生成其刚度阵^{*}。而在每次迭代中,外力向量应当使用不平衡力,亦即外力减去各单元在本次迭代开始时的抗力。这样,回代求出的也将是每级超级单元的位移增量。

* 如果是弹性塑性问题的卸载,仍应采用弹性模量。

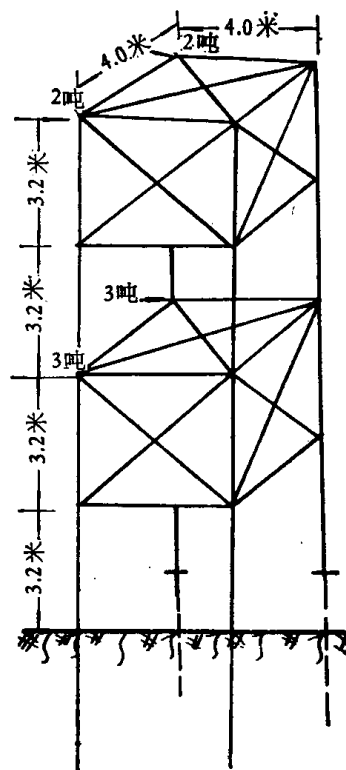


图 7

由于采用牛顿-拉菲逊迭代法,每次迭代都要组织总刚度阵,这对于每一个在非线性阶段工作的成员都要进行,因此就要周游结构树。在组织总刚及外力向量并进行凝聚的阶段 (PHASE2),应当按后序周游。而在计算每个成员 (结构树的节点) 的位移增量 (PHASE3) 时,应当按前序周游。注意,在周游过程中,对于线性的成员,只有在第一次迭代中的后序周游 (即 PHASE2) 中,才对不同的模式执行一遍。在回代计算位移的前序周游 (PHASE3) 中,线性成员不作计算。因此,节省了大量的计算工作量。

这个多层次结构牛顿-拉菲逊法的迭代算法可以表示为:

```
{全部成员置初位移值(例如置零)}
for ITERATE: = 1 step 1 until 10
do begin PHASE: = 2;
for COMPONENT: = 按后序周游规则
do begin {找出该 COMPONENT 的子结构模式号 ISB}
if (ITERATE = 1 | ISB 号模式尚未做过) then begin {组装总刚及相应的外力阵,
并对内部总刚三角化,送库中存区}
{凝聚出口刚度及出口外力阵,送模式存区}
end;
if (该 ISB 号子结构模式是非性的)
then begin
{读取当前位移}
if (该 COMPONENT 尚在线性阶段工作) then begin
if (ITERATE = 1) then begin
{传送 ISB 模式的出口刚度阵及出口外力阵}
end;
{计算当前位移造成的抵抗力,并送出口外力阵相应的位置}
end else begin
{生成该 COMPONENT 的总刚并凝聚,包括外力及当前位移造成的抗力}
{保存三角化后及凝聚后的总刚,以及当前不平衡的凝聚后的力向量}
end;
end;
end;
end;
PHASE: = 3; GAP: = 0;
for COMPONENT: = 前序周游 do begin
{找出相应的子结构模式号 ISB 及上级成员 FATHGQMP}
if (该 ISB 子结构模式是非线性的) then
begin
{读 FATHCOMP 成员的全部位移,并从中找出本成员 COMPONENT 的出口位移}
{读入上一次迭代的当前位移}
{两个出口位移相减,得到出口位移的增量  $\Delta d_0$ }
```

```

{读入本成员 CQMPQNET 的总刚,并回代求解得内部位移的增量
 $\Delta d_i := R_{ii}^{-1}(\Delta p_i - R_{0i} \Delta d_0)$ 
{修改 GAP, 修改当前位移, 存库}
end;
end;
if (GAP <  $\epsilon$ ) then {转出 ITERATE 迭代循环}
end ITERATE;
{进行输出结果处理}

```

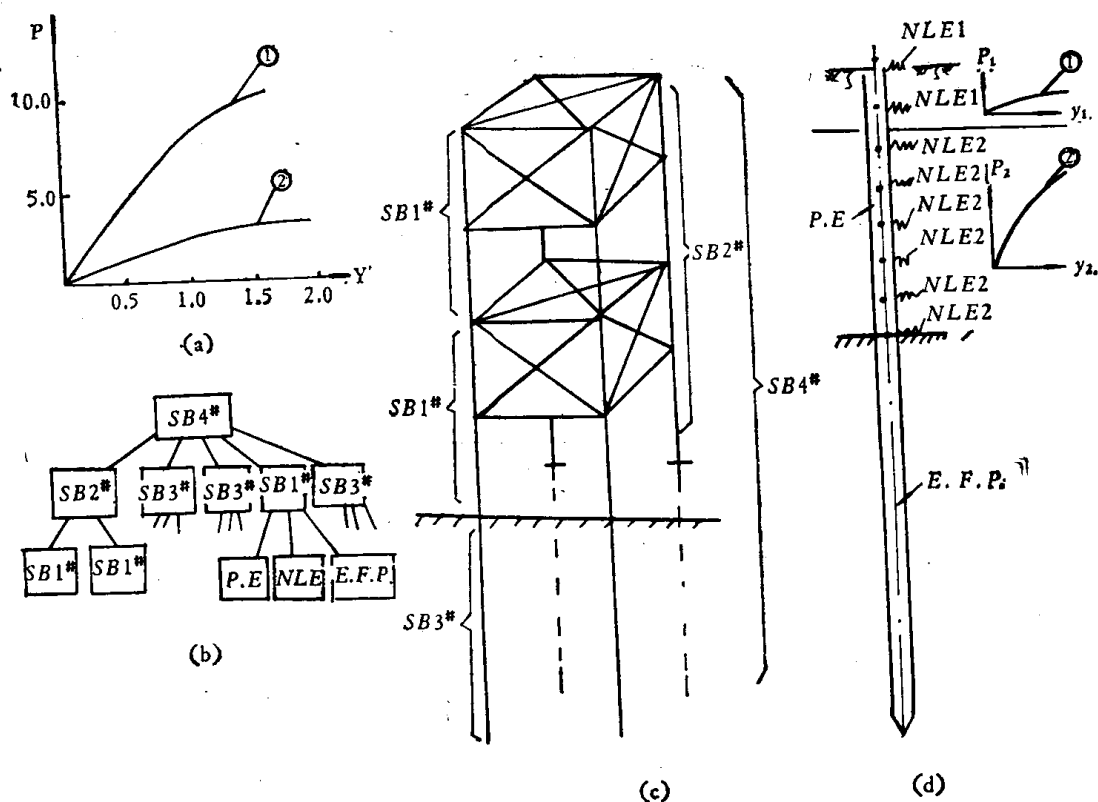


图 8

从上面可以看到,上述算法在 PHASE2 时,只要是非线性的,一律重新生成总刚并凝聚。这就是正常的牛顿-拉菲逊法。如果区别不同情况,依位移增量的大小,再次定某成员是否要重新计算总刚,则在每次迭代中计算工作量还可以减少,但收敛速度也会相应有所降低。这就成为各种修改的牛顿法。对于多层子结构算法来说,可以有更多种类型的牛顿法修改方案。

根据以上的多层子结构局部非线性迭代算法,我们在过去的线性多层结构法的程序 JIG FEX 中作了相应的发展,使之成为一个适应上述非线性结构分析的程序。经过试算表明,由于区分了线性与非线性部分,每次迭代的工作量已经降低很多,所以对于象海工导管架结构,采用正常的牛顿-拉菲逊法已可得到相当好的效果。由于子结构法的应用,其计算工作量已经远低于整体结构一起迭代的算法。再由于用多层子结构法,进一步解决了总刚度阵带宽内出现的许多零元素的运算,提高了计算效率。

四、示 例

空间桩基平台结构在水平力作用下上部结构为线性,考虑桩基部分土壤非线性作用,如图 7 所示. 根据 FEXI-JIGFEX 程序的子结构模式划分(图 8),上部结构可以定义为子结构模式 SB2*,它由两层子结构模式 SB1* 组成;而单桩定义为子结构模式 SB3*,它由桩本身的梁弯曲单元 PE,土壤非线性曲线($P-Y$ 曲线)分层等阶的非线性土壤弹簧元 NLE 以及桩基底部对应的弹性地基桩单元 EFP 三部分组成;整个结构和桩基系统则定义为子结构模式 SB4*,地基土壤 $P-Y$ 曲线见图 8(a),它可以是水平方向或垂直方向的,后者对于软土的桩基是很必要的. 与整个结构/地基体系子结构划分相应的结构构成树如图 8(b) 所示. 应当指出的是,当桩腿为倾斜时,对于子结构模式 3* 的单桩描述[图 8(d)]不变,而在整个结构地基系统组装时,用局部坐标的转动先把每个单桩转到设计的方位,然后对各个桩分别调取进行装配. 在整个系统中,进行非线性迭代的只限于对于子结构模式 3* 的局部段,由于单桩节点编号连续,所得刚度阵带宽就控制在很小范围以内,因而计算效率较高.

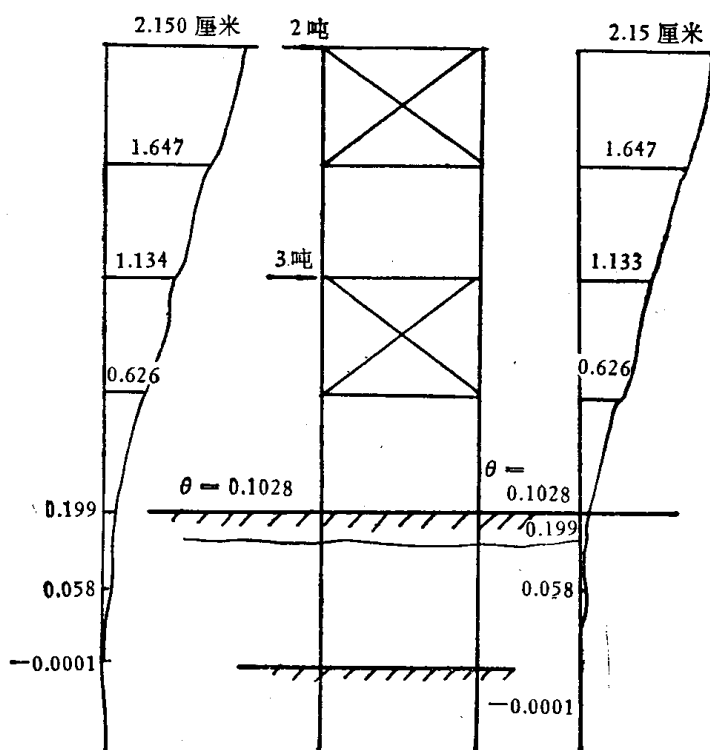


图 9

参 考 文 献

- [1] R. D. 库克,有限元分析的概念与应用,科学出版社,1981(中译本).
- [2] 钟万勰,一个多用途的结构分析程序 JIGFEX (一、二),大连工学院学报, No. 3, No. 4, 1977.
- [3] D. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. I, 1973.
- [4] 钟万勰、裘春航,关于未知数族的优序形成与稀疏矩阵的分块三角化,1978 年教育部高等学校计算结构力学学术交流会议论文集,第三集.
- [5] 钟万勰、林少培、李培元,海洋固定平台结构的非线性模型及其分析,大连工学院工程力学研究所研究报告,编号 (82)-3035.

- [6] 钟万勰、林少培、李培元, 海洋固定平台静、动力分析中的广义变位模型, 大连工学院工程力学研究所研究报告, 编号(82)-3036.
- [7] Zhong Wan-Xie, Lin Shao-Pei, Ding Dian-Min and Shen Wei-Ping, On Static and Dynamic Analysis of Tall Buildings by General Modular Techniques, Proc. of the International Conference on Finite Element Method, 1982, Shanghai.
- [8] Lin Shao-Pei, Qiu Chun-Hang and Ji Zen, The Generalized Modular Analysis in Offshore Engineering Structures, The Third International Conference on the Behaviour of Offshore Structures, 1982, Massachusetts, U. S. A.

非线性有限元法的发展及其应用

龚 尧 南

(北京航空学院)

一、引言

虽然力学已经历了漫长的发展历程,但直至二十世纪四十年代,用它分析一个真实的(哪怕是线性的)结构时仍然会遇到困难.困难主要是由实际结构的复杂性所引起的.对于非线性结构,分析中遇到的困难当然更多.当时,为了实现对实际结构的分析,往往或者对结构本身和加载方式进行大量简化,或者采用数值分析方法,或者两者兼用.

当时所采用的数值分析(或离散化)方法主要是差分法和直接变分法.差分法的最大优点是应用普遍,而且离散算子是稀疏的.直接变分法的最大优点则是可以把连续条件放松,而且由它导出的离散方程能稳定地向正确解逼近.这两种方法中,一种方法的优点恰好是另一种方法之所不足的.

五十年代中期,数字电子计算机的普及和有限元素法的崛起汇合在一起,给复杂线性结构的分析增添了巨大的生命力.有限元素法^[1]由矩阵分析方法^[2]派生而来,它的要旨是分片逼近.有限元素法之所以获得成功,在很大程度上应归功于它把差分法和直接变分法的优点巧妙地揉合在一起.二十多年来,线性有限元的分析方法已经取得了巨大进展.这方面的工作,可以说是已经基本完成.

在线性结构的有限元分析方面所取得的辉煌成就,极大地鼓舞了人们去发展非线性的分析方法.长期以来,由于学校的训练和分析方法上的传统性,更主要地是由于缺乏对复杂结构进行非线性分析的技巧和工具,使对实际结构的非线性分析未能广泛开展,但发展非线性分析的能力无论如何是客观需要的.首先,感到迫切需要的是航空及宇航部门,另一个对非线性分析有迫切感的领域是核能工业.正是在这两个领域中,非线性问题的有限元分析首先取得了重大的进展.十多年来,随着非线性问题的基本机理愈来愈被人们所认识,非线性解的技巧愈来愈完善,计算机和有限元分析程序的功能愈来愈大,以及它们的应用使分析愈来愈普遍,非线性有限元分析也就日益扩展到如土木、石油钻探、机械制造以及电子工程及其它一些领域.

问题的非线性包括几何及物理两个方面.起初,非线性分析是在这两方面独立而平行地发展的,以后才组合在一起.固体力学的三组基本方程中,涉及几何非线性的有平衡方程和几何方程,而本构方程则与物理非线性有关.为了建立这三组方程,首先应该给出参考标架,使能借以表示上述方程中的力和位移的量.如果以物质坐标系作为参考标架,则得欧拉列式法;如果以空间坐标系作为参考标架,得到的将是拉格朗日列式法.在几何非线性的发展初期,人们曾经对不同列式法的优缺点进行了研究.此外,在几何非线性问题中,除了推导常规的刚度矩阵外,还要推导几何刚度矩阵,而几何刚度矩阵的组成又与

在几何方程和能量泛函中保留哪些项有关。许多研究者曾对几种常用的元素在保留不同的项的情况下推导了几何刚度矩阵,从计算结果的分析比较中来探索保留哪些项是合适的。在物理非线性方面,最早发展的是初应变法,它使平衡方程左端始终保持弹性平衡方程原有的形式,而把塑性应变看作初应变来修正方程的右端。随后又发展了切线模量法,使问题分片线性化。

二、几何非线性——大位移问题

如果假设结构或弹性体的位移或变形为无限小,则在建立几何方程和平衡方程时,可不必考虑弹性体或结构的变形;这就是小位移假设。但是在某些情况下,由小位移假设所导出的分析结果会偏离实际情况很远,因而使这些结果变得荒谬或不可信。这样,在几何方程和平衡方程中再也不能忽略变形的影响;这就是所谓的“大位移(大挠度)”问题。在大位移的情况下,几何方程和平衡方程不再是线性的,这就是我们所说的几何非线性。必须指出,这里所说的大位移,并不意味着结构的变形真正很大。有时,结构在大位移假设下所得出的位移,并不比小位移假设下的位移更大。

设非线性的几何方程可以表示为

$$\underline{\varepsilon}^e = [B_L + B_N] \underline{q}^e \quad (1)$$

其中 B_L 和 B_N 分别为与位移无关和与位移有关的矩阵, $\underline{q}^e$ 为元素的结点位移向量, $\underline{\varepsilon}^e$ 为元素的应变向量。暂不考虑物理非线性,则元素的本构方程可表示为

$$\underline{\sigma}^e = D \underline{\varepsilon}^e \quad (2)$$

其中 D 为弹性矩阵。于是,系统的(不包括体力在内的)总势能为

$$\pi(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{e=1}^n \left\{ \int_{v_e} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^{eT} \underline{\sigma}^e dv - \underline{q}^{eT} \underline{p}^e \right\} \quad (3)$$

其中 $\underline{p}^e$ 为元素的结点载荷向量。将(1)及(2)式代入(3)式,即得

$$\pi(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} \underline{q}^T K \underline{q} - \underline{q}^T \underline{p} \quad (4)$$

其中

$$K = \sum_{e=1}^n A^T \left\{ \int_{v_e} [B_L + B_N]^T D [B_L + B_N] dv \right\} A \quad (5)$$

A 是组装矩阵,上角标 T 表示转置。由总势能驻值原理 $\delta\pi = 0$, 可以得到系统的非线性平衡方程

$$K_N \underline{q} = \underline{p} \quad (6)$$

其中

$$K_N = \sum_{e=1}^n A^T \left\{ \int_{v_e} [B_L + 2B_N]^T D [B_L + B_N] dv \right\} A \quad (7)$$

是系统的割线刚度矩阵。方程(6)是全量形式的非线性平衡方程。

然而,在解非线性问题时,通常的做法是用一系列线性化的增量解来逼近原问题的非线性响应,而不是用全量形式的方程(6)。增量的平衡方程可用总势能关于平衡点 $\underline{q}, \underline{p}$