计算数学讲义(四)

偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

科学出版社

计算数学讲义(四)

偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

科 学 出 版 社

1 9 7 9

内 容 简 介

本书共分八章：第一、二、三章分别讨论了抛物型、双曲型、椭圆型三类方程的差分解法，第四章介绍了变分方法，第五章讨论常微分方程和偏微分方程的有限元方法，第六章讨论构造高精度差分格式的 Hermite 方法，第七章讨论解 Poisson 方程的直接方法，第八章介绍直线法.

本书可作为大学计算数学专业教材，亦可供科技工作者参考.

计算数学讲义（四）

偏微分方程数值解法

南京大学数学系计算数学专业 编

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1979 年 6 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1979 年 6 月第一次印刷　　印张：13 1/4

印数：0001—58,160　　字数：304,000

统一书号：13031・919

本社书号：1303・13—1

定价： 1.35 元

说　　明

一、这一套《计算数学讲义》是在我专业过去所编教材的基础上修改补充而成的.

二、这套讲义共分下列九册:

（一）数值逼近方法;

（二）线性代数计算方法;

（三）常微分方程数值解法;

（四）偏微分方程数值解法;

（五）最优化方法;

（六）概率统计基础和概率统计方法;

数学基础之一: 线性代数;

数学基础之二: 常微分方程;

数学基础之三: 偏微分方程;

三、这套讲义可作为综合性大学理科计算数学专业教材,也可供利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

四、这套《计算数学讲义》的主编是何旭初同志.

讲义各册由我专业有关同志分工负责.

这册《偏微分方程数值解法》的编写者为苏煜城、吴启光同志.

五、由于理论水平和实践经验有限，讲义中的缺点和错误在所难免,我们衷心盼望读者提出宝贵意见,以便进一步修改.

南京大学数学系计算数学专业

1978年7月

目　　录

第一章　抛物型方程的差分解法

大家知道，在研究热传导现象或气体扩散现象时，得到二阶抛物型偏微分方程．对此类型方程可提出初值问题和混合问题．我们着重研究最简单的一维热传导方程的差分解法，也提到多维情形、一般线性抛物型方程和拟线性方程．

初值问题

在区域 Q: $\{-\infty < x < +\infty, t \geqslant 0\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0, \qquad (1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (2)$$

其中 L 表示微分算子 $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\varphi(x)$ 是给定的初始函数．

混合问题

对于方程(1)可提第一、第二、第三边值问题，由于第二边界条件在数学上只是第三边界条件的特殊情形，因此我们只研究第一和第三边值问题．

1）第一边值问题

在区域 R: $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leqslant T, \qquad (1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (2)$$

边界条件

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(1, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

并且 $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(1) = \mu_2(0)$，其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ 是给定的函数。

2）第三边值问题

在区域 R: $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \; 0 < x < 1, \; 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

边界条件

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \lambda_1(t)\, u\right)\Bigg|_{x=0} = \nu_1(t), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2(t) u\right)\Bigg|_{x=1} = \nu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

其中 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ 是给定的函数，$\lambda_1(t) \geqslant 0$, $\lambda_2(t) \geqslant 0$。

现就以上典型问题研究其差分解法。

§1. 差分格式的建立

假设 $h = \Delta x$, $\tau = \Delta t$ 分别是自变量 x, t 的改变量，如此由 $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; $j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 两组平行线构成的长方形网格覆盖了整个 $x—t$ 平面，h 称为沿 x 方向的步长，τ 称为沿 t 方向的步长，网格线的交点称为网格的结点。对初值问题来说其网格是

$$\begin{cases} t_j = j\tau,\ j = 0, 1, 2, \cdots, m_0;\ m_0 = \left[\dfrac{T}{\tau}\right], \\ x_k = kh,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \end{cases}$$

其中 m_0 是 T/τ 的最大整数部分，即

$$m_0\tau \leqslant T < (m_0 + 1)\tau.$$

在 $t = 0$ 上的结点称为边界结点，其余所有属于 $\{-\infty < x < +\infty,\ 0 < t \leqslant T\}$ 内的结点称为内部结点.

对于边值问题来说，其网格是

$$\begin{cases} t_j = j\tau,\ j = 0, 1, 2, \cdots, m_0;\ m_0 = \left[\dfrac{T}{\tau}\right], \\ x_k = kh,\ k = 0, 1, 2, \cdots, N;\ Nh = 1. \end{cases}$$

在 $t = 0,\ x = 0,\ x = 1$ 上的结点称为边界结点，其余所有属于 $\{0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T\}$ 内的结点称为内部结点.

差分方法就是在网格的结点上求出微分方程解的近似值，因此这一方法又名网格法.

为方便起见，将网格点 (x_k, t_j) 简记为 (k, j). 在点 (k, j) 我们列出以后常用的一些公式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k,j)} = \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{x^4}(\tilde{x}, j), \tag{5}$$

其中

$$|\tilde{x} - x_k| \leqslant h.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k,j)} = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{t^2}(k, \tilde{t}), \tag{6}$$

$$|\tilde{t} - t_j| \leqslant \tau.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k,j)} = \frac{u(k, j) - u(k, j-1)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{t^2}(k, \tilde{\tilde{t}}), \tag{7}$$

$$|\tilde{\tilde{t}} - t_{j-1}| \leqslant \tau.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k,j)}=\frac{u\left(k,j+\frac{1}{2}\right)-u\left(k,j-\frac{1}{2}\right)}{\tau}$$

$$-\frac{\tau^2}{24}u_{t^3}^{(3)}(k,t'),\tag{8}$$

$$|t'-t_{j-\frac{1}{2}}|\leqslant\tau/2.$$

公式(5)右端第一项是 $u(x,t)$ 关于自变量 x 的二阶中心差商，公式(6),(7),(8)的右端第一项分别是 $u(x,t)$ 关于自变量 t 的向前差商、向后差商和中心差商.

现在用以下符号表示 $u(x,t)$ 关于自变量 x 的差商:

一阶向前差商

$$(\Delta_x u)_{(k,j)}=[u(k+1,j)-u(k,j)]/h,$$

一阶向后差商

$$(\Delta_{\bar{x}} u)_{(k,j)}=[u(k,j)-u(k-1,j)]/h,$$

一阶中心差商

$$(\delta_x u)_{(k,j)}=\left[u\left(k+\frac{1}{2},j\right)-u\left(k-\frac{1}{2},j\right)\right]\Big/h,$$

二阶中心差商

$$(\delta_x^2 u)_{(k,j)}=[u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)]/h^2,$$

或

$$(\Delta_{x\bar{x}} u)_{(k,j)}=[u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)]/h^2.$$

同样,关于自变量 t 的差商亦作类似表示.

1.1. 显式格式(格式 I) 利用 $u(x,t)$ 关于 t 的向前差商，关于 x 的二阶中心差商，即利用公式(5)和(6)，在点 (k,j) 我们有

$$(Lu)_{(k,j)}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k,j)}=\frac{u(k,j+1)-u(k,j)}{\tau}$$

$$-\frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2}$$

$$+\frac{1}{12}h^2u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x},j)-\frac{\tau}{2}u''_{t^2}(k,\tilde{t}).$$

设

$$L_{h,\tau}^{(1)}u(k,j)=\frac{u(k,j+1)-u(k,j)}{\tau}$$
$$-\frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2},\tag{9}$$

$$R_{h,\tau}^{(1)}=\frac{h^2}{12}u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x},j)-\frac{\tau}{2}u''_{t^2}(k,\tilde{t}),\tag{10}$$

则上式可改写为

$$(Lu)_{(k,j)}=L_{h,\tau}^{(1)}u(k,j)+R_{h,\tau}^{(1)},$$

其中 $L_{h,\tau}^{(1)}$ 表示差分算子，$R_{h,\tau}^{(1)}$ 表示在点 (k,j) 以 $L_{h,\tau}^{(1)}$ 逼近 Lu 的截断误差．由表达式(10)看出，若 u_{x^4}，u_{t^2} 在所考虑的区域内保持有界，则当 $h\to 0$，$\tau\to 0$ 时有

$$R_{h,\tau}^{(1)}=O(\tau+h^2).$$

以后我们总假定 $u(x,t)$ 具有我们所需要的有界偏导数．因为在内部结点 (k,j) 上微分方程解 $u(x,t)$ 应满足

$$(Lu)_{(k,j)}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k,j)}=0,$$

故有

$$L_{h,\tau}^{(1)}u(k,j)+R_{h,\tau}^{(1)}=0.$$

以后我们用 $u_{k,j}$ 表示 $u(k,j)$ 的近似值． 在上式中略去 $R_{h,\tau}^{(1)}$，则得到方程(1)的差分方程

$$L_{h,\tau}^{(1)}u_{k,j}=\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}=0.\tag{11}$$

可简写为

$$\Delta_t u_{k,j}-\delta_x^2u_{k,j}=0.$$

设

$$r = \frac{\tau}{h^2}, \tag{12}$$

则差分方程(11)可以改写为

$$u_{k,j+1} = (1-2r)u_{k,j} + r(u_{k+1,j} + u_{k-1,j}). \tag{13}$$

这是一组线性代数方程组,由此方程组可知,在 (k,j) 点列方程时,用到 $(k+1,j)$, $(k-1,j)$, $(k,j+1)$ 三个点. 因此这个差分格式可用下图表示:

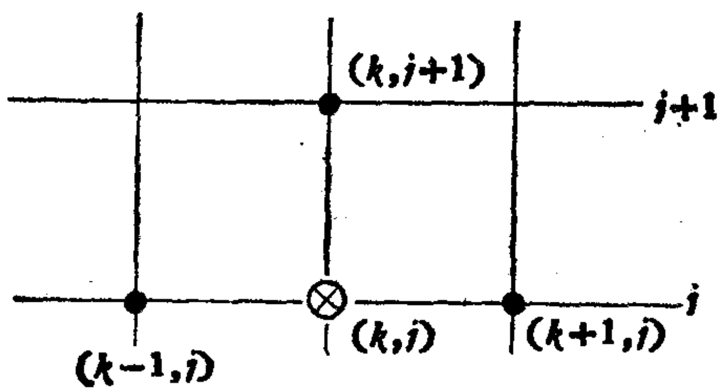


图 1.1

此外, 如在第 j 层的值 $u_{k,j}$ 已算得, 可根据方程(13)求得第 $j+1$ 层的值. 因此在 $j=0$ 这一层的值给定后即可依次求得以后各层的值,这种差分格式称为显式差分格式.

1.2. 隐式差分格式 (格式 II) 利用 $u(x,t)$ 关于 t 的向后差商公式, 由公式(5), (7)在点 (k,j) 有

$$(Lu)_{(k,j)} = L_{h,\tau}^{(2)}u(k,j) + R_{h,\tau}^{(2)},$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(k,j) = \frac{u(k,j)-u(k,j-1)}{\tau} - \frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2},$$

$$R_{h,\tau}^{(2)} = \frac{\tau}{2}u''_{t^2}(k,\bar{t}) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}_{x^4}(\tilde{x},j) = O(\tau+h^2). \tag{14}$$

因为

$$(Lu)_{(k,j)}=0,$$

故有

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(k,j)+R_{h,\tau}^{(2)}=0.$$

略去 $R_{h,\tau}^{(2)}$，则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(2)}u_{k,j}\equiv\frac{u_{k,j}-u_{k,j-1}}{\tau}-\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}=0. \tag{15}$$

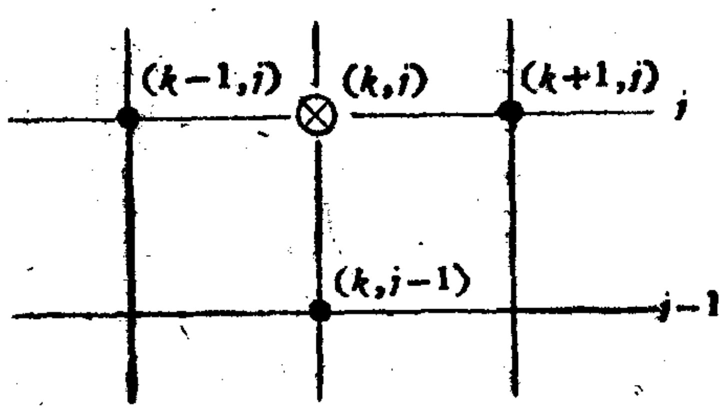
可以简写为

$$\Delta_{\bar{t}}u_{k,j}-\delta_x^2u_{k,j}=0.$$

也可改写为以下形式

$$(1+2r)u_{k,j}-ru_{k-1,j}-ru_{k+1,j}=u_{k,j-1}. \tag{15'}$$

这也是一组线性代数方程组，但它和方程组(13)不同．当我们已知第$(j-1)$层的$u_{k,j-1}$值以后，要求出第j层的值$u_{k,j}$时，必须解一线性代数方程组，这种格式称为**隐式差分格式**．此外，在点(k,j)建立这种格式时，用到$(k-1,j)$，$(k+1,j)$，$(k,j-1)$三点．因此这一格式可用下图表示：



图． 1.2

由(14)知道，当$h\to0$，$\tau\to0$时差分方程(15)逼近微分方程(1)，其截断误差为$O(\tau+h^2)$．

1.3. 六点格式 (Crank-Nicolson) (格式 III)　在点

$\left(k, j+\frac{1}{2}\right)$ 利用 $u(x, t)$ 关于 t 的中心差商得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} = \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} + \frac{\tau^2}{24} u_{t^3}^{(3)}(k, \tilde{t}),$$
$$|\tilde{t} - t_{j+\frac{1}{2}}| \leqslant \tau/2. \tag{16}$$

由 Taylor 公式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+1)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} + \frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_1)},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} + \frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_2)},$$

其中

$$\eta_1 = t_{j+\frac{1}{2}} + \theta_1 \frac{\tau}{2}, \quad \eta_2 = t_j - \theta_2 \frac{\tau}{2},$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

故有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k, j)} \\
&\quad - \frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_1)} - \frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(k, \eta_2)} \\
&= [u(k+1, j+1) - 2u(k, j+1) \\
&\quad + u(k-1, j+1) + u(k+1, j) \\
&\quad - 2u(k, j) + u(k-1, j)]/2h^2 \\
&\quad - \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{x}, j+1) - \frac{h^2}{24} u_{x^4}^{(4)}(\tilde{\tilde{x}}, j) \\
&\quad - \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_2) - \frac{\tau^2}{16} u_{x^2 t^2}^{(4)}(k, \eta_1).
\end{aligned} \tag{17}$$

由(17),(16)得到

$$(Lu)_{(k,\,j+\frac{1}{2})}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(k,\,j+\frac{1}{2})}$$

$$=L^{(3)}_{h,\tau}u\left(k,j+\frac{1}{2}\right)+R^{(3)}_{h,\tau},$$

其中

$$L^{(3)}_{h,\tau}u\left(k,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{u(k,j+1)-u(k,j)}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{u(k+1,j+1)-2u(k,j+1)+u(k-1,j+1)}{h^2}\right.$$

$$\left.+\frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2}\right],$$

$$R^{(3)}_{h,\tau}=\frac{h^2}{24}u^{(4)}_{x^4}(\tilde{x},j+1)+\frac{h^2}{24}u^{(4)}_{x^4}(\tilde{\tilde{x}},j)$$

$$-\frac{\tau^2}{16}u^{(4)}_{x^2t^2}(k,\eta_1)+\frac{\tau^2}{16}u^{(4)}_{x^2t^2}(k,\eta_2)$$

$$+\frac{\tau^2}{24}u^{(3)}_{t^3}(k,\tilde{t})=O(h^2+\tau^2). \qquad (18)$$

因为

$$(Lu)_{(k,\,j+\frac{1}{2})}=0,$$

所以

$$L^{(3)}_{h,\tau}u\left(k,j+\frac{1}{2}\right)+R^{(3)}_{h,\tau}=0.$$

略去 $R^{(3)}_{h,\tau}$ 不计,则得差分方程

$$L^{(3)}_{h,\tau}u_{k,\,j+\frac{1}{2}}=\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{u_{k+1,j+1}-2u_{k,j+1}+u_{k-1,j+1}}{h^2}\right.$$

$$\left.+\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}\right]=0.$$

可简写为

$$\Delta_t u_{k,j} - \frac{1}{2}\left[\delta_x^2 u_{k,j+1} + \delta_x^2 u_{k,j}\right] = 0.$$

以上方程还可以改写为

$$-\frac{r}{2} u_{k+1,j+1} + (1+r) u_{k,j+1} - \frac{r}{2} u_{k-1,j+1}$$

$$= (1-r) u_{k,j} + \frac{r}{2} u_{k+1,j} + \frac{r}{2} u_{k-1,j}. \tag{19}$$

由此可知，在点$\left(k, j+\frac{1}{2}\right)$列方程时要用到第 $j+1$ 层上的三个点 $(k, j+1)$，$(k+1, j+1)$，$(k-1, j+1)$ 及第 j 层上的三个点 (k, j)，$(k+1, j)$，$(k-1, j)$. 因此，这一格式称为六点格式，可以用下面的图形表示：

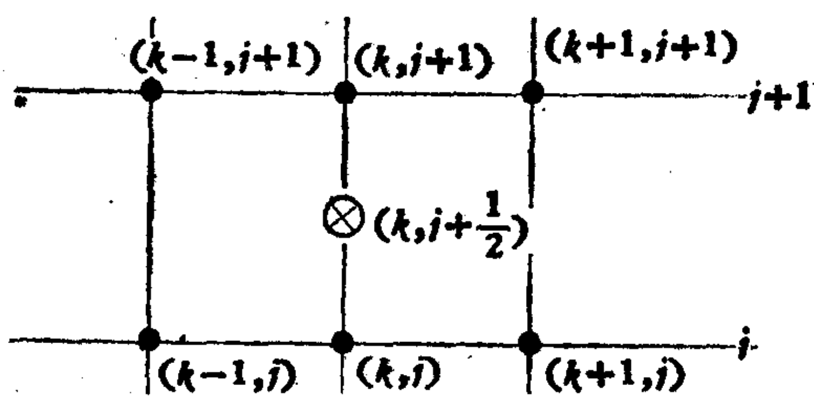


图 1.3

这一差分格式也是隐式差分格式，由式(18)可知，当 $h \to 0$，$\tau \to 0$ 时，差分方程(19)逼近微分方程(1)，其截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$，比前面的格式(II)更加逼近于微分方程，必须指出，建立这一差分格式的一个很重要的思想，是将微分方程中的 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项以 $u(x, t)$ 在第 j 层和第 $j+1$ 层上关于 x 的二阶中心差商的算术平均值来逼近的，这一思想已被广泛地应用于一般的微分方程，以建立其差分格式。