# 线性统计与线性代数

## 参考材料

倪国熙　陈希孺　著

安徽省数学学会
安徽大学数学系

# 前　　言

C.R.Rao的《Linear Statistical Inference》是一本数理统计名著，在我国很受重视，该书的精华是其线性统计（回归分析、方差分析、多元分析等）部分，即第一、四、八章和第三章的一部分，这些内容在书中自成体系。其中第一章以简练的笔法总结了矩阵代数的许多有用结果，某些重要内容，如矩阵广义逆和标准形，二次型极值等，在普通教科书中往往介绍得不充分，因此，这章对学习线性代数的读者也很有用。但此书部分习题较难，正文中错误不少，不少地方证明过粗，给学习该书的同志带来不少困难。江西师范学院倪国熙付教授和中国科学技术大学陈希孺教授，为帮助读者研读该书，对第一、四、八章注释了难点，补充了原书中未证或证明过略之处，纠正了原书中的某些错处，并对这几章的全部习题和第三章的有关习题作了仔细解答。现将这些资料汇集成书，以供学习线性统计和线性代数的读者参考。在编写这本资料时，作者尽可能注意到了其独立性，以便于没有 Rao 的书的读者也能直接使用。

由于排版条件的限制，我们对原稿中一部分符号作了更动，如用黑体**1**代替空心𝟙，用大斜体字母$A$,$B$，…等代替大花写字母；请读者在阅读时，注意$A$与A，$B$与B，$C$与C，$D$与D，$F$与F，$G$与G，$U$与U，$V$与V的不同含意。有时这些字母甚至出现在同一个式子中，更要注意它们的区别。又由

于时间仓促，在校对工作中难免有一些错漏之处，敬请作者和读者谅解。

在本书出版过程中，得到我校印刷厂的大力支持，在此表示感谢！

**安徽大学数学系　1981.7.**

## 编者附言

在本书出版过程中，得到安徽大学数学系和安大印刷厂的大力支持，特别是数学系概率统计教研室和资料室的同志们作了大量的工作，特表示衷心的感谢。

倪国熙　陈希孺

1981.3.19.　于广东新会

# 目　录

# 一、向量和矩阵代数习题解答

## （一）第一組题解

**1.** 设$\alpha_1$，…，$\alpha_u$为向量空间$V$中的u个无关向量。证明它必可扩充为$V$之一基底，即可增加$\alpha_{u+1},\cdots,\alpha_r$，以使$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为$V$之一基底。此处$r=\dim(V)$（$V$的维数）。

**证.** 任取$V$之一基底$\beta_1,\cdots,\beta_r$，考虑向量组

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_u,\beta_1,\cdots,\beta_r$$

将其中可以用前面的向量的线性组合表出者丢弃，则剩下的将构成$V$之一基底，又由$\alpha_1,\cdots,\alpha_u$无关的假定，知它们中没有一个被丢弃者，证毕。

**2.** 证明由以下6个行向量生成的线性空间的维数为4：

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

**证.** 可以转向于考虑由上面写出的6个列向量所生成的线性子空间，以$\beta_1,\cdots,\beta_6$记这6个列向量，则易见$\beta_3$和$\beta_6$可由其前面的线性表出：$\beta_3=\beta_1-\beta_2$，$\beta_6=\beta_1-\beta_4-\beta_5$，故可知$\mu(\beta_1,\cdots,\beta_6)$（$\mu(\beta_1,\cdots,\beta_6)$表示由$\beta_1,\cdots,\beta_6$所生成的向量空间，$\mu(A)$表示由矩阵A的列向量生成的线性空间）的维数不超过4．另一方面，显见$\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$线性

无关（因由$C_1\beta_3+C_2\beta_4+C_3\beta_5++C_4\beta_6=0$即得$C_2=C_3=C_4=0$，由之推出$C_1=0$）.故维数等于4.

**3.** 将第2题的结果推广到pq个行向量，这pq个行向量分为q组，每组p个，第i组的第j个向量在其第1、第$i+1$和第$q+j+1$个分量处为1，其余分量为0，证明这pq个向量生成的子空间有维数$p+q-1$.

**证.** 一般情况为

$$
\begin{array}{ccccccc|cccccc}
1&1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&1&0&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\\
\hline
1&0&1&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&0&1&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&0&1&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\\
\hline
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\hline
1&0&0&0&\cdots&0&1&1&0&0&\cdots&0&0\\
1&0&0&0&\cdots&0&1&0&1&0&\cdots&0&0\\
\multicolumn{7}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}&\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
1&0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\\
\multicolumn{7}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{q+1\text{列}}}&\multicolumn{6}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{p\text{列}}}
\end{array}
$$

如此表，一共有 $p+q+1$ 列，分别记为 $\beta_1,\cdots,\beta_{p+q+1}$。则易见

$$\beta_{q+1}=\beta_1-\beta_2-\beta_3-\cdots-\beta_q,$$

$$\beta_{p+q+1}=\beta_1-\beta_{q+2}-\beta_{q+3}-\cdots-\beta_{q+p}$$

故知这 $p+q+1$ 个列向量生成的线性空间 $\mu$ 的维数 $\dim(\mu)$不大于$(p+q+1)-2=p+q-1$，另一方面，$\beta_3,\beta_4,\cdots,\beta_{p+q+1}$ 线性无关，因若

$$C_3\beta_3+C_4\beta_4+\cdots+C_{p+q}\beta_{p+q}=0 \qquad (1)$$

则直接得出

$$C_{q+2}=C_{q+3}=\cdots=C_{q+p}=0 \qquad (2)$$

由(2)和(1)，得 $C_3=C_4=\cdots=C_{q+1}=0$，这证明了 $\dim(\mu)=p+q-1$。

**4.** $pq$个数$a_{ij}$，$i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q$，满足条件

$$a_{ij}+a_{rs}-a_{is}-a_{rj}=0,\text{对}i,r=1,\cdots,p;j,s=1,\cdots,q. \qquad (3)$$

则对适当选择的 $a_i(i=1,\cdots,p),b_j(j=1,\cdots,q)$，有

$$a_{ij}=a_i+b_j,\quad i=1,\cdots,p,\quad j=1,\cdots,q. \qquad (4)$$

**证.**(3)式可改写为

$$a_{ij}-a_{is}=a_{rj}-a_{rs},\quad i,r=1,\cdots,p$$

故知 $a_{ij}-a_{is}$ 与 $i$ 无关，记为 $A_{js}$:

$$a_{ij}-a_{is}=A_{js},\quad i=1,\cdots,p,\quad j,s=1,\cdots,q \qquad (5)$$

记 $a_i=(a_{i1}+\cdots+a_{iq})/q$，$b_j=(A_{j1}+\cdots+A_{jq})/q$。(5)式两边对 $s$ 从 1 到 $q$ 求和并除以 $q$，即得 $a_{ij}=a_i+b_j$.

**5.** 有 $n$ 个向量 $(a,b,b,\cdots,b,b)$，$(b,a,b,\cdots,b,b)$，$\cdots,(b,b,b,\cdots,a,b),(b,b,b,\cdots,b,a)$。满足条件 $a+(n-1)b=0$。决定其中线性无关向量的个数。

**解.**分两种情况:

a. $a=0$，这时 $b=0$. 所有向量皆为零向量，故线性无关向量个数为 0.

b. $a\neq 0$，以$\beta_1',\cdots,\beta_n'$ 记上述 n 个向量，则

$$\beta_n=-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_{n-1}$$

故线性无关向量个数不超过 $n-1$. 但易见$\beta_1',\cdots,\beta_{n-1}'$线性无关.因由 $a\neq 0$，$a+(n-1)b=0$ 知 $b\neq 0$，$b\neq a$. 故若

$$C_1(a,b,\cdots,b)+C_2(b,a,\cdots,b)+$$
$$+C_{n-1}(b,b,\cdots,b)=0$$

则由最后一分量知 $C_1+\cdots+C_{n-1}=0$. 又由第 i 分量知

$$C_ia+(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}C_j-C_i)b=C_i(a-b)=0\Rightarrow C_i=0$$

对 $i=1,\cdots,n-1$. 这证明了 $\beta_1',\cdots,\beta_{n-1}'$线性无关，因而上述向量组中，线性无关向量个数为 $n-1$.

6. 设$F$和$G$为两线性子空间，$F\cap G$为其交.又以$F+G$记一切形如 $x+y$ 的向量所构成的向量集，此处 $x\in F$而 $y\in G$. 证明：

(i). $F\cap G$ 和 $F+G$ 都是子空间.

(ii). $F\cap G$ 是同时被包含于 $F$和 $G$ 内的最大子空间.

(iii). $F+G$ 是同时包含$F$ 和 $G$ 的最小子空间.

(iv)其维数有关系

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)\qquad(6)$$

**证.**(i)－(iii)显而易见，故只证(iv).记

$$\dim(F)=m,\ \dim(F\cap G)=m-r,\ \dim(G)=n-r$$

在$F\cap G$ 中取基底 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$，将其分别扩充为$F$ 和 $G$ 的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 和 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,$

$\alpha_n$.显然，由$\alpha_1$，…，$\alpha_n$ 所生成的线性子空间即为 $F+G$. 又易见 $\alpha_1$，…，$\alpha_n$ 线性无关.因若 $\sum_1^n C_i\alpha_i = 0$，则

$\sum_1^m C_i\alpha_i = -\sum_{m+1}^n C_i\alpha_i$. 比式左边属于$F$而右边属于$G$，故属于$F\cap G$.故可以通过 $\alpha_{r+1}$，…，$\alpha_m$ 唯一地表出来.即有常数 $d_{r+1}$，…，$d_m$ 存在，致

$$\sum_1^m C_i\alpha_i = -\sum_{m+1}^n C_i\alpha_i = \sum_{r+1}^m d_i\alpha_i \qquad (7)$$

但因 $\alpha_{r+1}$，…，$\alpha_n$ 线性无关，由(7)的后一等式知

$$d_{r+1} = \cdots = d_m = 0,\quad C_{m+1} = \cdots = C_n = 0$$

再由(7)式以及$\alpha_1$，…，$\alpha_m$ 线性无关，知$C_1 = \cdots = C_m = 0$. 这证明了 $\alpha_1$，…，$\alpha_n$ 线性无关，因而

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= n = m+(n-r)-(m-r)\\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)\end{aligned}$$

即(6)式.

**7.** 证明对任何 $r$，$1\leqslant r\leqslant n$，$R^n$ 可表为 $r$ 个子空间的直接和.

**证.** 显而而见.

√**8.** 设 $S$ 为向量集，$S^{\perp}$为一切与$S$正交的向量之集，证明$(S^{\perp})^{\perp}\supseteq S$，等号当且仅当$S$为子空间时成立.

**证.** $(S^{\perp})^{\perp}\supset S$ 显然.因若 $a\in S$，则对任何 $b\in S^{\perp}$，有 $a\perp b$. 故依定义 $a\perp S^{\perp}$ 而 $a\in(S^{\perp})^{\perp}$.因为对任何 $S$，易见 $S^{\perp}$为子空间，故若 $S=(S^{\perp})^{\perp}$，$S$必为子空间.反过来，若 $S$ 为子空间，设 $a\in(S^{\perp})^{\perp}$.将 $a$ 分解为 $a=b+c$，其中$b\in S$，$C\in S^{\perp}$，必有 $c=0$.因若 $c\neq 0$，则

$$(a,\ c)=(b+c,\ c)=(b,\ c)+(c,\ c)=(c,\ c)>0$$

与 $a\in(S^{\perp})^{\perp}$ 矛盾. 故 $c=0$ 而$a=b\in S$. 这证明了$(S^{\perp})^{\perp}\subset S$. 因反向包含总成立，有$(S^{\perp})^{\perp}=S$.

**9.** 若 S，T为任两向量集，都包含零向量，则

$$(S+T)^{\perp}=S^{\perp}\cap T^{\perp} \qquad (8)$$

(**注意**：S+T的定义见第6题，且该处定义中 $F$，$G$ 不必为子空间)

**证.** 因为一般地有

$$A\subset B\Rightarrow A^{\perp}\supset B^{\perp}$$

故 $(S+T)^{\perp}\subset S^{\perp}$，$(S+T)^{\perp}\subset T^{\perp}$，因而 $(S+T)^{\perp}\subset S^{\perp}\cap T^{\perp}$。(**注**：这是用到了 S，T 都包含零向量，否则无法肯定 $S+T\supset S$，$S+T\supset T$)。反过来，设 $a\in S^{\perp}\cap T^{\perp}$，则 a 与 S 和 T中任一向量都正交，故与 S+T 中任一向量正交。因而 $a\in(S+T)^{\perp}$。这证明了 $(S+T)^{\perp}\supset S^{\perp}\cap T^{\perp}$，因而证明了(8)。

**10.** 设 $F$ 和 $G$ 皆为子空间，则

$$(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$$

**证.** 在 $F^{\perp}$ 及 $G^{\perp}$ 中分别取基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$，则 $F=(F^{\perp})^{\perp}=\{x:\ x\perp\alpha_i,\ i=1,\cdots,r\}$，$G=(G^{\perp})^{\perp}=\{x:\ x\perp\beta_j,\ j=1,\cdots,s\}$。因而 $F\cap G=\{x:\ x\perp\alpha_i,\ x\perp\beta_j,\ i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,s\}=$ $=(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp}$。再利用第8题，得

$$(F\cap G)^{\perp}=[(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp}]^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}.$$

**11.** 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为向量空间 $V_F$ 中给定的 m 个向量，则一切形如 $\sum_1^m t_i\alpha_i$ 的向量，其中 $(t_1,\cdots,t_m)'$ 跑遍 $E_m$，构成一个子空间 $\mu(\alpha)$，其维数 k 等于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中线性无关向量的个数。现问：若 $(t_1,\cdots,t_m)'$ 局限于 $E_m$ 之一 s维子空间 $G$ 时，情况如何。证明：集合 $\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots t_m)'\in G\}$ 仍为一子空间，其维数为 $s-\dim(G\cap F)$，其中 $F=\{(t_1,\cdots,t_m)':\ t_1\alpha_1+\cdots+t_m\alpha_m=0\}$。

**证.** 记 $B=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in G\right\}$，$\dim(G)=s$.
$B$为子空间易证.记$D=G\cap F$，则$D\subset G$.以$C$记$D$在$G$内的正交补子空间，则 $\dim(C)=\dim(G)-\dim(D)$ 且显然有
$B=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in C\right\}$，因而

$$\dim(B)\leqslant\dim(C) \tag{9}$$

另一方面，易见当 $(t_1,\cdots,t_m)'$和 $(t_1',\cdots,t_m')'$ 都属于 $C$ 时，有

$$(t_1,\cdots,t_m)\neq(t_1',\cdots,t_m')\Rightarrow\sum_1^m t_i\alpha_i\neq\sum_1^m t_i'\alpha_i \tag{10}$$

事实上，若记 $(r_1,\cdots,r_m)=(t_1,\cdots,t_m)-(t_1',\cdots,t_m')$，

则 $(r_1,\cdots,r_m)'\in C$，且当$\sum_1^m t_i\alpha_i=\sum_1^m t_i'\alpha_i$时，有

$\sum_1^m r_i\alpha_i=0$，故又有 $(r_1,\cdots,r_m)'\in D$，因为$C\perp D$有
$(r_1,\cdots,r_m)'=0$. 这证明了(10).由(10)知$\dim(B)\geqslant\dim(C)$. 与(9)结合，得
$\dim(B)=\dim(C)=\dim(G)-\dim(D)=s-\dim(G\cap F)$.

**注1.** 记

$$A=(\alpha_1\vdots\cdots\vdots\alpha_m),\quad B=(\beta_1\vdots\cdots\vdots\beta_p)$$

这里$\beta_1,\cdots,\beta_p$为任一组向量，其生成的线性子空间为$G$. 又以$N(A)$记子空间 $\{x:\ Ax=0\}$，而将 $G$ 记为$\mu(B)$，则本题结果可写为（$rk(A)$表示A的秩）

$$rk(AB)=rk(B)-\dim(N(A)\cap\mu(B)).$$

**12.** 设11题中的 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$，$i=1,\cdots,m$.记

$$\beta_j=(a_{1j},\cdots,a_{mj})',\quad j=1,\cdots,n$$

又设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 为 $E_m$ 中给定的 $k$ 个向量，而

$$F=\{t=(t_1,\cdots,t_m)':\ (t,\gamma_i)=0,\ i=1,\cdots,k\}$$

$$G=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\quad (t_1,\cdots,t_m)'\in F\right\}.$$

则

$$\dim(G)=\dim[\mu(\beta_1,\cdots,\beta_n,\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] - \dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] \tag{11}$$

**证.** 以 $D$ 记 $\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$ 的正交补子空间，则

$$G=\left\{\sum_1^m t_i\alpha_i:\ (t_1,\cdots,t_m)'\in D\right\}$$

$\dim(D)=m-\dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)]$.依第11题，有

$$\dim(G)=m-\dim[\mu(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)]-\dim(D\cap Q) \tag{12}$$

此处$Q=\left\{(t_1,\cdots,t_m)':\ \sum_1^m t_i\alpha_i=0\right\}$.但

$$t=(t_1,\cdots,t_m)'\in D\cap Q\Longleftrightarrow(t,\gamma_i)=0,\ (t,\beta_j)=0,$$
$$i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,n$$

故由线性方程组理论中，齐次方程解空间维数之公式，有

$$\dim(D\cap Q)=m-\dim[\mu(\beta_1,\cdots,\beta_n,\gamma_1,\cdots,\gamma_k)] \tag{13}$$

以(13)代入(12)即得(11).

**注2.**本题结果可表为下面的形式，它在线性模型一般理论中常用：设 X 和 H 分别为 $n\times p$ 及$m\times p$矩阵，而

$$F=\{X\beta:\ H\beta=0\}.\ \text{则}\ \dim(F)=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}X\\H\end{pmatrix}-\mathrm{rk}(H).$$

**13.**找出$\delta$，使方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3=4\\4x_1\qquad +6x_3=1\\\qquad -2x_2+4x_3=7+\delta\end{cases}\qquad\text{有解.}$$

**解:** 由第1、2方程解出 $x_2$，$x_3$（通过 $x_1$ 表出），

再代入第3方程，得到当且仅当$\delta=0$时，上述方程组有解。

**14.** 证明：方程组

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=\delta_1 \\ 3x_1+4x_2+x_3+7x_4=\delta_2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=\delta_3 \end{cases} \tag{14}$$

对任何 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 有解。决定其一切解以及其长度最小的解。

**证**．由于三个向量$(4,3,2,8)'$，$(3,4,1,7)'$ 和 $(1,1,1,1)'$ 线性无关，知方程组(14)的系数矩阵及其增广矩阵的秩都为3．故必有解（对任何 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$）。

为了求出(14)的通解，先求出(14)之一特解．取 $x_4=0$ 代入(14)，用简单的消去法不难解出

$\tilde{x}_1=(3\delta_1-\delta_2-5\delta_3)/4$，　$\tilde{x}_2=(-\delta_1+\delta_2+\delta_3)/2$，$\tilde{x}_3=(-\delta_1-\delta_2+7\delta_3)/4$．然后再求出（14）的齐次方程组的通解：置 $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$，$x_4=1$，解出 $x_1=-2$，$x_2=0$，$x_3=2$．因而(14)之通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,0)+k(-2,0,2,1)$，$k$ 任意．再计算出 $\sum_1^4 x_i^2$，它是 $k$ 的一个二次多项式，容易证明其最小值在 $k=(11\delta_1-\delta_2-29\delta_3)/56$ 时达到。

**15.** 设以0，1，2表剩余类（mod 3），它构成一个有三个元素的 Galois Field，即GF(3)．其加、乘法按通常的方式定义，若以 $x_1,x_2,x_3$ 记在GF(3)中取值的变元，找出方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2\qquad=0 \end{cases} \tag{15}$$

的解空间的一基底。考察一下是否存在一解，可表为方程组

的诸行向量的非零线性组合（这种情况在实数域和复数域中不可能.）又，解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad +x_4=1 \\ 2x_1 \qquad +x_3+2x_4=2 \end{cases} \tag{16}$$

**解**.由(15)第二式减去第一式，得 $x_2=x_3$。又由第二式，并注意 $3x_2=0$，有 $x_1=-2x_2=x_2$。故 $x_1=x_2=x_3$。由此知通解为 $k(1,1,1)$.解空间之一基底为(1,1,1).显然，(15)任一解皆可表为方程组行向量之线性组合.

这个情况在实、复数域中不可能（除非解为0，否则必不能表为方程组行向量之线性组合）.这是很明显的，因若以 $\alpha_1',\cdots,\alpha_m'$ 表方程组的 m 个行向量，则任一解 $x'$ 满足条件 $\alpha_i'x=0$，$i=1,\cdots,m$。因而 $x\in[\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)]^{\perp}$.如又有 $x\in\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，则将有 $x\perp x$ 而 $x=0$.

为解(16)，以2乘第一方程并减去第二方程，得 $4x_2-x_3=0$ 即 $x_2=x_3$。由此得出其通解为 $(a,b,b,1-a-2b)$，$a,b=0,1,2$.

✓**16**.证明：x在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 所生成的线性子空间上的投影为 $a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m$，其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为方程组

$$\begin{cases} a_1(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+a_m(\alpha_1,\alpha_m)=(x,\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1(\alpha_m,\alpha_1)+\cdots+a_m(\alpha_m,\alpha_m)=(x,\alpha_m) \end{cases} \tag{17}$$

之任一解.证明垂线之长为 $\left[\|x\|^2-\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)\right]^{\frac{1}{2}}$.

**证**.x 在上述子空间内的投影（记为 $\zeta$）存在且唯一（见P.10,(iii)），且当然有 $\zeta=\sum_1^m a_i\alpha_i$ 的形状.为了 $\zeta$ 是投影，充要条件为 $(x-\zeta,\alpha_i)=0$，$i=1,\cdots,m$.即

$$(x,\alpha_i)=(\zeta,\alpha_i)=\sum_{j=1}^{m}a_j(\alpha_j,\ \alpha_i)$$

即充要条件为 $a_1,\cdots,a_m$ 满足方程组(17)。

由上面提到的 x 的投影的存在性，如(17)必有解.根据线性方程组的理论也不难直接证明(17)有解．事实上，若记

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_m'\end{pmatrix} \tag{18}$$

则方程组（17）的系数方阵为$AA'$，而右端向量为 $Ax$．但 $Ax\in\mu(A)$，而$\mu(A)=\mu(AA')$，因而 $Ax\in\mu(AA')$故相容性条件满足。

$\sum_1^m a_i\alpha_i$ 的唯一性由投影的唯一性得出，也可直接证明如下：设$(a_1,\cdots,a_m)$和 $(\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_m)$ 为(17)的两组解，则用上述记号，并令 $b=(a_1-\tilde{a}_1,\cdots,a_m-\tilde{a}_m)'$，有

$$AA'b=0$$

因而 $b'AA'b=0$，即 $\|A'b\|^2=0$，即

$$A'b=\sum_1^m\alpha_i(a_i-\tilde{a}_i)=0$$

这证明了 $\sum a_i\alpha_i$ 的唯一性。

又垂线之长为

$$l=\|x-\sum_1^m a_i\alpha_i\|$$

由(17)，有

$$l^2=\|x\|^2-2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)+\sum_{i,j=1}^{m}a_ia_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$=\|x\|^2-2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)+\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{m}a_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_1^m a_i(x,\alpha_i) + \sum_1^m a_i(x,\alpha_i)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^m a_i(x,\alpha_i).$$

而投影之长为

$$\left\|\sum_1^m a_i\alpha_i\right\| = \left[\sum_1^m a_i(x,\alpha_i)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

**17.** 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 $R^k$ 中的向量.在

$$(b,\alpha_i) = p_i, \quad i=1,\cdots,m \tag{19}$$

的条件下，求$(b,b)=\|b\|^2=\sum_1^k b_i^2$的最小值.此处 $p_1,\cdots,p_m$ 为给定的常数.

**解.**考虑任一适合条件(19)的向量 b，则依 16 题，b 在 $\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上的投影为 $\sum_1^m a_i\alpha_i$，其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为方程组

$$\begin{cases} a_1(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+a_m(\alpha_1,\alpha_m)=p_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1(\alpha_m,\alpha_1)+\cdots+a_m(\alpha_m,\alpha_m)=p_m \end{cases} \tag{20}$$

之解.由于(20)与 b 无关，可知：任何适合条件(19)的 b 在 $\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上的投影唯一.这就说明，对任何这样的 b，有

$$\|b\|^2 \geqslant \left\|\sum_1^m a_i\alpha_i\right\|^2$$

其中 $a_1,\cdots,a_m$ 为(20)的任一解.特别，取$b=\tilde{b}=\sum_1^m a_i\alpha_i$ ($a_1,\cdots,a_m$ 为(20)任一解)，则易见(19)成立，而依第 16 题的论证，有

$$\|\tilde{b}\|^2 = \sum_1^m a_ip_i$$

若以 C 记以$(\alpha_i,\alpha_j)$为其(i,j)元的方阵（即上题的 $AA'$），则最小值可表为

$$\|\tilde{b}\|^2 = P'C^-P$$

此处 $P=(p_1,\cdots,p_m)'$，而 $C^-$ 为 $C$ 之任一广义逆.（在此题中，当然应假定 $P\in\mu(A)$（$A$ 见 (18)）即 $P\in\mu(C)$。在此条件下，$P'C^-P$ 与 $C^-$的取法无关）.

**18.** steintz 替换定理：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为向量空间$V$的一组基，而 $\beta_1,\cdots,\beta_p(p<k)$为 $V$ 中的线性无关向量.则可在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中选出 $k-p$ 个向量，记为 $\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(k-p)}$，使 $\beta_1,\cdots,\beta_p,\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(k-p)}$构成$V$的一组基.

**证.** 见第 1 题.

**19.** 设 $\alpha,\beta$ 都是长为 1 的向量，则

$$|(\alpha,\beta)|=1\Rightarrow\alpha=c\beta,\ \text{其中}\ |c|=1.$$

证.取 $c=(\alpha,\beta)$，则 $|c|=1$，且

$$\begin{aligned}\|\alpha-c\beta\|^2 &= \|\alpha\|^2+|c|^2\|\beta\|^2-2\overline{c(\alpha,\beta)}\\ &=1+1-2|(\alpha,\beta)|^2=0\end{aligned}$$

这证明了 $\alpha=c\beta$.

## （二） 第 二 組 題 解

**1. 矩阵的秩.** 以 $rk(A)$记$A$ 的秩.

**1.1.** $rk(AB)\leqslant\min(rk(A),\ rk(B))$.

**证.** 由于 $rk(A)=\dim(\mu(A))=\dim(\mu(A'))$，而 $\mu(AB)\subset\mu(A)$，故

$$rk(AB)=\dim(\mu(AB))\leqslant\dim(\mu(A))=rk(A),$$

$$\begin{aligned}rk(AB)&=rk(B'A')=\dim(\mu(B'A'))\\ &\leqslant\dim(\mu(B'))=rk(B)\end{aligned}$$

得证.