

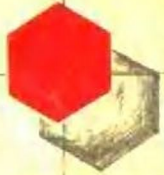
數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Aesthetical Methods in Mathematics

數學中的美學方法

徐本順 殷啟正 著



数学方法论丛书

# 数学中的美学方法

徐本顺 殷启正 著

江苏教育出版社

1990·南京

(苏)新登字第003号

数学方法论丛书

**数学中的莫罕方法**

徐本顺 殷启正 著

---

出版发行：江苏教育出版社  
(南京中央路165号，邮政编码：210009)  
经 销：江苏省新华书店  
印 刷：镇江前进印刷厂  
(镇江迎江路43号，邮政编码：212002)

---

开本850×1168毫米 1/28 印张 4.75 字数 102,000  
1990年7月第1版 1992年3月第2次印刷  
印数 2,301—7,330册

---

ISBN 7—5343—1094—6

---

G·965

定价：1.80元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

## 《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

## 《数学方法论丛书》编辑委员会

**主 编：**徐利治

**副主编：**朱梧槿 萧文强

**编 委：**(按姓氏笔画为序)

王兴华 王鸿钧 朱梧槿 刘凤璞

吴学谋 吴望名 欧阳绛 郑毓信

赵振威 徐利治 唐复苏 萧文强

# 出版说明

如大家所知,数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问,已有很长的历史,而且内容极为丰富.16世纪以来,如笛卡尔(Deacartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincare)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者,都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解.就近现代而言,以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例,他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究,出版了一系列论著,并被译为多种文字,受到全世界的普遍重视,被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一.在我国,也有许多学者在各种不同的场合屡次指出:要在数学教材与教学过程中,注意对形成数学概念的认识过程的分析,努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段,特别是我国数学家徐利治教授,他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流,结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状,深感在教学与科研领域中,有大力提倡数学方法论的必要.在他的倡议下,我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课,出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物,这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势.然而总的来说,在现今的数学教育与数学教学过程中,主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练,对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不

够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初开始就酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

---

## 代 序

世俗的观念,往往认为数学是一门枯燥乏味的学科,似乎和艺术独享的美学方法毫不相干。其实这真是极大的误会。须知,古今中外的杰出数学家和科学家都莫不高度赞赏并应用了数学科学中的美学方法。数学园地处处开放着美丽花朵,它是一片灿烂夺目的花果园,这片花果园正是按照美的追求开垦出来的。

本书是专门探讨“数学中的美学方法”的著作。两位好学沉思的作者,采集和分析了大量文献资料,旁证博引,用明快流畅的文笔,合作写成了这本雅俗共赏的作品,读起来确有一种愉快的感受,因此乐愿为此书代作一短序。

这本书采用历史唯物论观点,阐述了数学美概念的发展过程、数学美的分类和特征以及数学美的地位与作用。还讨论了数学审美教育等专题。这些题材对培养高水准的数学师资和具有创造才能的数学工作者,无疑是富有启发性和指导意义的。相信作为读者的大学理工科学生、中学和大专学校的数学教师们,都会从这本读物中获得应有的启示和教益。

还需要指出的是,由于数学中美学方法的研究,毕竟属于科学的美学方法的一个新兴分支,许多理论尚未完全成熟,需要有一个发展阶段;所以书中的一系列论点,未必都是定论。因此,希望对此有兴趣的读者,能进行深入探讨。如有对本书的任何批评或建议,均希直接函告作者(徐本顺,山东曲阜师

---

范大学自然科学学报编辑部;殷启正,江苏镇江师专数学系),  
相信他们定会热诚欢迎的。

徐利治

1989. 3. 31

(大连理工大学应用数学研究所)



目  
录

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 代序                       |       |
| 一 美学与数学美的概念·····         | (1)   |
| 1.1 美学的概念·····           | (2)   |
| 1.2 美学的诸流派·····          | (8)   |
| 1.3 科学美的概念·····          | (11)  |
| 1.4 数学美的概念·····          | (19)  |
| 二 数学美的产生和发展·····         | (24)  |
| 2.1 数学美的朦胧时期·····        | (24)  |
| 2.2 数学美的萌芽时期·····        | (34)  |
| 2.3 数学美的发展时期·····        | (46)  |
| 三 数学美的分类及其特征·····        | (59)  |
| 3.1 数学美的分类·····          | (59)  |
| 3.2 简洁性·····             | (61)  |
| 3.3 统一性·····             | (66)  |
| 3.4 对称性·····             | (70)  |
| 3.5 整齐性·····             | (73)  |
| 3.6 奇异性·····             | (75)  |
| 3.7 思辨性·····             | (81)  |
| 四 数学美的一般特征·····          | (83)  |
| 4.1 数学美的客观性·····         | (83)  |
| 4.2 数学美的主观性·····         | (87)  |
| 4.3 数学美的社会性·····         | (88)  |
| 4.4 数学美的物质性·····         | (92)  |
| 4.5 数学美的相对性·····         | (94)  |
| 4.6 数学美的绝对性·····         | (97)  |
| 五 数学美的地位和作用·····         | (104) |
| 5.1 数学美对自然科学的作用·····     | (104) |
| 5.2 数学美是评价数学理论的重要标志····· | (106) |
| 5.3 数学美是数学发展的内驱动力·····   | (109) |
| 5.4 未来数学发展的方向——真、善、美的    |       |

## 目

## 录

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 统一.....              | (114) |
| 六 数学的审美教育.....       | (120) |
| 6.1 审美教育的产生和发展.....  | (120) |
| 6.2 数学审美心理的结构分析..... | (122) |
| 6.3 数学鉴赏力.....       | (127) |
| 6.4 数学审美能力的培养.....   | (128) |
| 主要参考文献.....          | (140) |

## 一 美学与数学美的概念

数学中是否包含有美的因素？数学的发展是否受美学方法的指导？对此，我们的回答是肯定的。例如，古代的哲学家、数学家普洛克拉斯(Proclus)就断言：“哪里有数，哪里就有美。”1811年，数学家高斯(Gauss)在指出制定复分析和函数论这种理论有其自身的必要性时，就说过：“这里的关键不在于实际用处，对我说来，分析倒是一门独立的学科，如果歧视那些虚构的量，分析就会失去大量的美与灵活。”这说明，数学中美的因素，历来就为数学家所重视。

数学家们关于数学与美的论述更是枚不胜数。例如，最伟大的法国数学家、物理学家之一庞加莱(Poincaré)就曾写道：“数学家们非常重视他们的方法和理论是否优美，这并非华而不实的作风，那么，到底是什么使我们感到一个解答、一个证明优美呢？那就是各个部分之间的和谐、对称，恰到好处的平衡。一句话，那就是井然有序，统一协调，从而使我们对整体以及细节都能有清楚的认识和理解，这正是产生伟大成果的地方。”他又说：“能够作出数学发现的人，是具有感受数学中的秩序、和谐、对称、整齐和神秘美等能力的人，而且只限于这种人。”著名数学家冯·诺意曼(Von Neumann)也曾说过：“归结到关键的论点：我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准主要都是美学的。”他又说：“数学家成功与否和他的努力是否值得的主观标准，是非常自足的、美学的、不受(或近乎不受)经验的影响。”这些论述都道出了“美学方法的考虑”与“理论的富有成果性”之间的关系。因此，美

学方法的考虑是决定数学发展的一个重要因素，从而就有必要对此进行深入的分析 and 研究。

另一方面，庞加莱又告诉我们：“一个名符其实的科学家、尤其是数学家，他在他的工作中体验到和艺术家一样的印象，他的乐趣和艺术家的乐趣具有相同的性质，是同样伟大的东西。”波莱尔(Borel)在1981~1982年的讲演时也指出：“数学在很大程度上是一门艺术，它的发展总是起源于美学准则，受其指导、据以评价的。”这就明确地指出这种“伟大的东西”就是与艺术美可以相提并论的科学(数学)美。无独有偶，在国内1981年复旦大学学报社科版第三期发表了周义澄同志的《论科学美》一文，也提出了美的形态中有一种与“艺术美”、“自然美”并列的“科学美”的观点，从而揭开了国内“科学美”、“理性美”问题讨论的序幕。纵观国内外的情况我们可以得出这样的结论：现在已经到了揭开科学(数学)美的特点、本质、分类以及它们与其他美的关系等问题的时候了。为此，我们首先要搞清楚什么是美学。

## 1.1 美学的概念

什么是美学呢？迄至今日，并无公认的定义。有的认为“美学是研究感性知识的科学”；有的认为美学是“艺术的哲学”；有的认为“美学是研究美的科学”；也有的认为“美学是研究人对现实的审美关系的科学”，等等。众说不一，各有道理。那么，究竟什么样的认识是正确的、科学的呢？我们认为要全面、正确地回答这个问题，就应首先弄清楚美学是怎样形成的？美学的研究对象、范围是什么？

### 1. 美学的形成与发展

美学是一门古老的科学。首先，从人类朦胧的审美观念、

审美意识的形成以及对美的追求来看,可以说,随着人类的出现之后就出现了,它几乎与人类自身一样古老。在漫长的生产实践中,人类最终摆脱了动物状态,就开始了对美的追求,懂得装饰自己,娱乐自己,出现了原始艺术,人类朦胧的审美观念、人类最早的审美意识也随之形成。这种观念、意识与对美的追求比较集中地体现在古代原始的舞蹈、绘画、诗歌、神话传说之中。这是为考古学家和人类学家的大量发现与研究成果所证实了的。

再者,人们对美的探索、对美的研究,亦早在遥远的古代就开始了。无论东方、西方大概均可以追溯到两千多年前的奴隶社会中去。就我国而言,对美的本质的探讨、研究早在春秋战国时就开始了。《国语·楚语上》记载着我国美学史上,第一个给美下定义的是春秋时的楚国人伍举。他说:“夫美也者,上下,内外,小大,远近皆无害焉,故曰美。”在伍举看来,美就是对上下、左右、大小、远近的人都是无害的,或者说有益于人的,才能算是美。伍举的“无害为美”的观点,实质上就是说美就是善,其核心是和谐。

我国伟大的思想家、教育家孔子,集春秋时期美学思想之大成,系统化了以和谐为美的儒家美学思想,他强调艺术品的美必须像《韶》乐一样,应当是“尽善”的内容与“尽美”的形式的和谐统一。君子必须“文质彬彬”,做到“文”(礼乐)与“质”(道德)的和谐统一。只有这样才会美。尤其是他认为《武》乐“尽美矣,未尽善也。”两千多年前,就能提出这种“美”、“善”不同的观点,确实是难能可贵的。

孟子除了提出著名的“充实而谓美”的思想,对美的内涵作了更深入的探讨外,还对共同美的问题作了形象而精粹的表述。他在《告子》上篇说道:“口之于味也,有同嗜焉;耳之于声也,有同听焉;目之于色也,有同美焉。”从而,肯定了美

感的共同性与普遍性。

荀子不仅提出了与孟子观点不同的“不全不粹之不足以为美”的观点，而且涉及到美感的差异性问题的。他在《正名》篇里提出：“心忧恐，则口御刍豢而不知其味，耳听钟鼓而不知其声，目视黼黻而不知其状，轻暖平簟而体不知其安”的见解。

我国是这样，国外也是如此。早在两千多年前，许多思想家就开始对美作哲学的思考。在古希腊，毕达哥拉斯(Pythagoras)学派认为，美表现于数学比例上的对称与和谐。其根源在于“整个天体就是一种和谐和一种数。”赫拉克利特(Herakleitos)认为美是和谐，其根源在于事物内部对立面的斗争。苏格拉底(Sokrates)认为美与善是一致的。这种美善同一都是出于功用的观点。柏拉图(Platon)认为美是永恒的理念，事物只要“分有”了“理式”就会显得美。亚里士多德(Aristoteles)则认为美的主要形式是“整一”。古罗马的贺拉斯(Quintus Horatius Flaccus)继承了古希腊美的“和谐”说和“有机整体”说，提出了“合式”说。认为合式是美的本质，也是艺术的最高美学标准。普洛丁(Plotinus)这位古罗马时期希腊唯心主义哲学家，宗教神秘主义美学始祖，他把柏拉图的“理式”论与源于埃及、波斯一带的神秘主义哲学结合在一起，创立了“新柏拉图主义”。普洛丁的美学思想的全部意图就是要证明物质世界的美不在物质本身而在反映神的光辉。

可见，不论是东方还是西方，无论是中国的先秦诸子还是古希腊、古罗马的哲学家，对美学的探讨都是源远流长的，积累的美学思想遗产也是极为丰富的。因此，美学完全可以说是一门古老的科学。但是，古代人们对美的思考、探索、研究，都是从哲学、数学、伦理学、神学和文学艺术欣赏角度出发的。所以，在18世纪以前，西方对美的研讨，总是作为哲学、神学、文艺学的附庸的面目出现。研究美学的人，多是哲学家、神学家

和文艺理论家,他们的美学思想总是交织在他们的哲学思想、神学思想、文艺思想之中,成为哲学、神学、文艺思想的有机部分,因而美学还不是一门独立的科学。

美学作为一门独立科学的出现是18世纪中叶。随着资本主义生产的迅速发展,以及哲学、心理学、生理学、文艺学的进一步发展,西方美学的发展出现了高峰,进入了德国古典美学的时代,从此美学便成为一门新兴的、独立的科学。1750年,德国启蒙运动时期的美学家鲍姆嘉敦(Baumgarten)正式出版了他的《美学》专著第一卷,标志着这门新兴学科的诞生。尽管当时这位被誉为“美学之父”的鲍姆嘉敦所理解的“美学”并不是我们今天所理解的“美学”的涵义,但由于鲍氏的倡导与努力,美学这门新兴学科终于逐步走上了独立发展的道路,所以鲍姆嘉敦在美学发展史上的贡献是应充分肯定的。

德国古典哲学的大师康德(Kant)、费希特(Fichte)、黑格尔(Hegel)、谢林(Schelling),同时也是著名的美学家。他们都沿着鲍姆嘉敦开辟的道路从哲学的角度来考虑美学问题,在他们一系列的哲学著作中阐发了许多重要的美学观点,从而把美学的研究推向了新的发展阶段,美学也就成为19世纪西方哲学家们热衷研究的课题。19世纪中叶,马克思主义哲学体系的诞生,为美学提供了辩证唯物主义和历史唯物主义哲学基础。以辩证唯物主义和历史唯物主义的原理、方法,研究美的存在、美的感受、美的创造活动一般规律的美学理论,是马克思主义科学体系的一个重要组成部分,成为美学史上最新的历史阶段。

## 2. 美学研究的对象与范围

在中国,有的人认为美学应是“关于美的科学”。美学既要研究美的存在诸规律,又要研究美感经验和美的观念的形成及发展诸规律。如洪毅然、华岗、陆一帆等就是如此。有的

人认为美学就是“艺术观”，是关于艺术的一般理论。如马奇等。第三种观点如蔡仪等认为美学最基本的对象是客观现实事物的美。第四种观点如朱光潜、蒋孔阳等认为美学研究的中心对象或主要对象应当是艺术。第五种观点如李泽厚、周来祥、高尔太等认为美学是以美感经验为中心研究美和艺术的学科。在西方，有的人从哲学的角度研究美学，认为美学是“美的哲学”，美学研究的对象便是美的一般规律，如柏拉图、鲍姆嘉敦、康德就是如此。有的人则从艺术的角度考虑美学，认为美学是艺术哲学，它研究的对象是艺术。如亚里士多德、黑格尔、莱辛(Lessing)等。黑格尔就公开声称：“我们的这门科学的正式名称却是‘艺术哲学’，或则更确切一点，‘美的艺术的哲学’。”另一种来自苏联的说法，认为美学是研究人对现实的审美关系的科学，在中国常被采用。此外，还有美学是表现理论，如克罗齐(Croce)认为，美学是原批评学，美学是有关审美经验的价值论等等。上述分歧状况，反映出美学这门科学仍处于形成和不断发展阶段；它所研究的各种问题的内在联系，它与其他科学的联系和区别还没有充分揭示出来。但另一方面，从这些不同认识与主要分歧中，又可以看到各种见解都有其合理的可取的一面，也有其偏狭的一面。除了个别观点外，大多数观点在美学研究的总体范围上，已基本趋于一致，即认为美学研究对象和范围应包括：审美客体、审美主体和艺术等三大部分。

要弄清楚美学研究的对象，首先要搞清楚哪些事物可以作为人们的审美的对象。我们认为，从山水花草等自然景物到人类的社会生活，从精美的工艺雕塑，到文学创作、科学论著，都可以成为人们审美的客体。美学不仅要研究这些审美对象即审美的客体，同时也要研究审美的主体，即审美者自身。一言以蔽之，美学就是要研究这种由审美客体和审美主



体所构成的审美关系，也就是我们平时所讲的人对现实的审美关系。

怎样理解人对现实的审美关系呢？人类要生存、发展，就必须进行各种各样的实践活动，人类的全部活动，都可以说是和现实发生关系的活动。客观现实是复杂丰富的，具有多方面的属性。同样作为主体的人的需要也是多种多样的。现实客体的多方面的属性和主体的多种需要分别相适应则形成人对现实的种种物质关系与精神关系。诸如实用关系，政治关系，经济关系，伦理关系，审美关系，等等。

人对现实的审美关系是人对现实诸多关系的一种，它是人们从审美角度认识世界、把握世界的一种特殊方式。其主要特点是：

(1) 人对现实的审美关系是一种客观的社会关系，为人所特有的，是满足人的精神生活需要的，能够提高、发展、丰富人的精神。

(2) 人对现实的审美关系所涉及的范围极其广泛，几乎人们在生活中感兴趣的事物都包含着人对现实的审美关系方面。

(3) 人对现实的审美关系不仅仅使人在掌握这种关系时能够认识现实，同时能够自我认识，自我享受。

(4) 人对现实的审美关系，包括审美客体(即审美对象)与审美主体(即审美者)两个方面。

鉴于上述认识，具体地说，我们认为美学研究的对象与范围，可归纳为如下三个方面：

(1) 美的存在。包括美的本质；美的存在类型和形态，以及彼此之间的关系。

(2) 美的感受。包括人类美感的产生、发展；美感的性质、特征；美与美感的关系。