動力學

習題及複習題詳解

B. 约翰斯顿　原著

曉園出版社
世界图书出版公司

國立中央圖書館出版品預行編目資料

動力學：習題及複習題詳解 / Beer & Johnston
原著；李廣齊，高瞻遠譯著．-- 初版．--
臺北市：曉園，1990[民79]

内 容 简 介

本书是 B. 约翰斯顿著《工程师用的向量力学》一书第 5 版《动力学》分册的习题详解。

动力学习题及复习题详解
B. 约翰斯顿　原著
李广齐　高瞻远　译著
世界图书出版公司北京分公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
新燕印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
1992 年 11 月第一版　开本：850×1168　1/32
1992 年 11 月第一次印刷　印张：32
印数：0001—1550
ISBN：7-5062-1401-6/O·61
定价：29.20 元（W_B9203/22）

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉著習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉著這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

目　　錄

第十一章　質點運動學

11.1 一質點的運動是以關係式 $x = t^4 - 12t^2 - 40$ 定義，其中 x 的單位爲公尺，t 爲秒，試求當 $t = 2$ s 時質點的位置，速度和加速度。

解　$x = t^4 - 12t^2 - 40$

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 24t$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 12t^2 - 24$$

$$t = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -72 \text{ m}$$

$$v = -16 \text{ ms}^{-1}$$

$$a = 24 \text{ ms}^{-2}$$

11.2 一質點的運動是以關係式 $x = t^3 - 9t^2 + 24t - 6$ 定義，其中 x 的單位爲公尺，t 爲秒，試求當 $t = 5$ s 時質點的位置、速度和加速度。

解　$x = t^3 - 9t^2 + 24t - 6$

$v = 3t^2 - 18t + 24$

$a = 6t - 18$

$$t = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 14 \text{ m}$$

$$v = 9 \text{ ms}^{-1}$$

$$a = 12 \text{ ms}^{-2}$$

11.3 一質點的運動是以關係式 $x = 2t^3 - 8t^2 + 5t + 15$ 定義，其中 x 的單位爲吋，t 爲秒，試求當 $t = 3$ s 時質點的位置、速度和加速度。

解　$x = 2t^3 - 8t^2 + 5t + 15$

$v = 6t^2 - 16t + 5$

$a = 12t - 16$

當 $t = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 12$ in

$$v = 11 \text{ ips}$$

$$a = 20 \text{ ips}^2$$

11.4 一質點的運動是以關係式 $x = 2t^3 - 6t^2 + 10$ 定義，其中 x 的單位爲呎，t 爲秒。試求當 $v = 0$ 時質點的時間、位置和加速度。

解　$x = 2t^3 - 6t^2 + 10$

$v = 6t^2 - 12t = t(6t - 12)$

$a = 12t - 12$

$\because v = 0 \Rightarrow t(6t - 12) = 0 \Rightarrow t = 0, 2$

$\therefore$ at $t = 0$: $x = 10$ ft , $a = -12$ ft/s^2

at $t = 2$: $x = 2$ ft , $a = 12$ ft/s^2

11.5 一質點的運動是以關係式 $x = t^3 - 12t^2 + 36t + 30$ 定義，其中 x 的單位爲公尺，t 爲秒。試求當 $v = 0$ 時質點的時間、位置和加速度。

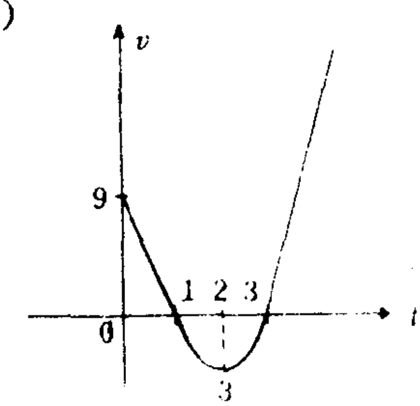
解
$$x = t^3 - 12t^2 + 36t + 30$$
$$v = 3t^2 - 24t + 36$$
$$a = 6t - 24$$
$$v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0$$
$$\Rightarrow t = 2, 6$$

$\therefore$ 當 $t = 2$ s : $x = 62$ m , $a = -12$ ms^{-2}

$t = 6$ s : $x = 30$ m , $a = 12$ ms^{-2}

11.6 一質點的運動是以關係式 $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ 定義，其中 x 的單位爲公尺，t 爲秒。試求(a)當速度爲 0 時的時間，(b)當 $t = 5$ s 時此質點之位置、加速度和經過的總距離。

解
$$x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$$
$$v = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3)$$
$$a = 6t - 12$$



(a) $v = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$\Rightarrow t = 3, 1$

$\therefore$ 時間爲 $t = 1$ sec 及 $t = 3$ sec

(b) 當 $t = 5$ s

$x = 25$ （位置）

$a = 18$ ms^{-2}

$$s = \int_0^5 v\,dt$$
$$= \int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)\,dt - \int_1^3 (3t^2 - 12t + 9)\,dt + \int_3^5 (3t^2 - 12t + 9)\,dt$$
$$= 4 - (-4) + 20$$
$$s = 28 \text{ m}$$

11.7 一質點的運動是以關係式 $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ 定義，其中 x 的單位爲公尺，t 爲秒。試求此質點(a)當速度爲 0 時的時間，(b)當加速

速度爲 0 時的位置和經過的總距離。

解 $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 30t + 24$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 30$$

(a) $v = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0$

$\Rightarrow t = 1\,\text{s}$ 或 $4\,\text{s}$

(b) $a = 0 \Rightarrow 12t - 30 = 0 \Rightarrow t = 2.5\,\text{s}$

$x = 2 \cdot 2.5^3 - 15 \cdot 2.5^2 + 24 \cdot 2.5 + 4$

$= 1.5\,\text{m}$ （位置）

$$s_1 = \int_0^1 v\,dt = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1$$

$= 11\,\text{m}$

$$= \int_1^{2.5} v\,dt$$

$= 2 \cdot 2.5^3 - 15 \cdot 2.5^2 + 24 \cdot 2.5 - [2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1]$

$= -2.5 - 11 = -13.5\,\text{m}$

$s = s_1 - s_2 = 11 - (-13.5)$

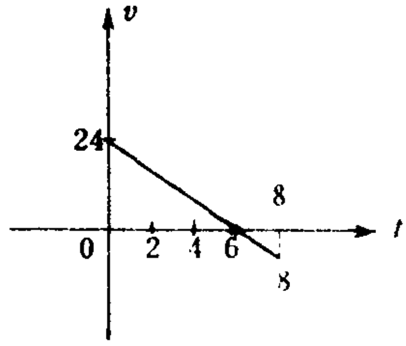
$= 24.5\,\text{m}$（行徑）

11.8 一質點的加速度是以關係式 $a = -4\,\text{ft/s}^2$ 定義，如果當 $t = 0$ 時，$v = +24\,\text{ft/s}$ 且 $x = 0$，試求當 $t = 8\,\text{s}$ 時質點的速度、位置和經過的總距離。

解 當 $t = 0$，$v = 24\,\text{ft/s}$，$x = 0\,\text{ft}$，$a = -4\,\text{ft/s}^2$

$$v = \int_0^t a\,dt = -4t + 24\ \text{ft/s}$$

$$x = \int_0^t v\,dt = -2t^2 + 24t\ \text{ft}$$



$\therefore$ 當 $t = 8$

$\Rightarrow v = -4(8) + 24 = -8\,\text{ft/s}$

$x = -2(8)^2 + 24(8) = 64\,\text{ft}$

$v = 0 \Rightarrow t = 6$

$$\therefore s=\int_0^6 v\,dt-\int_6^8 v\,dt$$

$$=\int_0^6(-4t+24)\,dt-\int_6^8(-4t+24)\,dt$$

$$=72-(-8)=80\text{ ft}$$

11.9 一質點的加速度與時間 t 成正比，當 $t=0$ 時，質點的速度為 $v=-12$ m/s，已知當 $t=4$ s 時，$v=0$ 且 $x=15$ m，試寫出質點運動的方程式。

解 $t=0$ ： $v=-12\text{ ms}^{-1}$ ⋯⋯⋯⋯①

$t=4$ ： $x=15$ m， $v=0\text{ ms}^{-1}$ ⋯⋯⋯⋯②

$a\propto t$

設 $a=kt$ 　　k ：比例常數

$$\Rightarrow\quad v=\frac{k}{2}t^2+C_1$$

$$x=\frac{k}{6}t^3+C_1t+C_2$$

∵情形① $\Rightarrow$ $C_1=-12$

∵情形② $\Rightarrow$ $0=\frac{k}{2}(4)^2-12$

$$\therefore k=1.5$$

$x=0.25t^3-12t+C_2$

$15=0.25(4)^3-12(4)+C_2$

$\Rightarrow\quad C_2=47$

$\therefore x=0.25t^3-12t+47$

11.10 一質點的加速度是以關係式 $a=9-3t^2$ 定義，質點在 $t=0$ 時，$v=0$ 且 $x=5$ m 並開始運動，試求(a)當速度再度為 0 的時間，(b)當 $t=4$ s 時質點的位置和速度，(c)質點自 $t=0$ 至 $t=4$ s 時所經過的總距離。

解 $a=9-3t^2$

$v=9t-t^3+C_1$

$$x=\frac{9}{2}t^2-\frac{t^4}{4}+C_1t+C_2$$

$\because t=0$ ，$v=0$ ，$x=5$

$\therefore C_1=0$ ，$C_2=5$

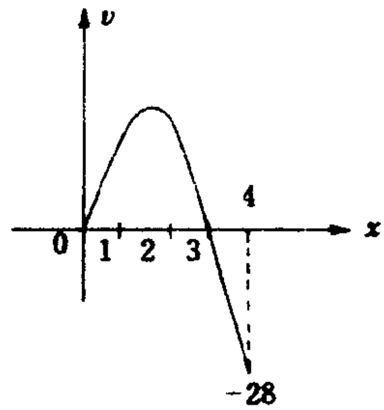
$\Rightarrow \quad v=9t-t^3$; $x=\dfrac{9}{2}t^2-\dfrac{t^4}{4}+5$

(a) $v=0 \quad \Rightarrow \quad (9-t^2)t=0$

$t=0,\ \pm 3$

∵時間不可能為負

∴速度再度為 0 之時間為 $t=3$ sec



(b) $t=4 \quad x=13$ m

$v=-28$ ms^{-1}

(c) $s=\displaystyle\int_0^3 v\,dt-\int_3^4 v\,dt$

$=\displaystyle\int_0^3 (9t-t^3)\,dt-\int_3^4 (9t-t^3)\,dt$

$=20.25-(-12.25)$

$=32.5$ m

11.11 一質點的加速度是以關係式 $a=kt^2$ 定義。(a)已知當 $t=0$ 時 $v=-32$ ft/s，且當 $t=4$ s 時 $v=+32$ ft/s，試求出常數 k，(b)又已知當 $t=4$ s 時 $x=0$ ft，試寫出運動方程式。

解 $a=kt^2$

(a) $v=\dfrac{k}{3}t^3+C_1$

由已知條件：$\begin{cases} -32=\dfrac{k}{3}(0)^3+C_1 \\ 32=\dfrac{k}{3}(4)^3+C_1 \end{cases}$

∴ $C_1=-32$, $k=3$

$v=t^3-32$

(b) $x=\dfrac{t^4}{4}-32t+C_2$

∵ $t=4 \quad \Rightarrow \quad x=0$

∴ $0=\dfrac{(4)^3}{4}-32(4)+C_2$

$C_2=64$

∴ $x=\dfrac{t^4}{4}-32t+64$

11.12 一質點的加速度是以關係式 $a=-kx^{-2}$ 定義，質點開始運動時無任何初速度且位置爲 $x=800$ mm，當 $x=500$ mm 時觀察其速度爲 6 m/s，試求(a) k 值，(b)當 $x=250$ mm時質點的速度。

解 (a) $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}=-kx^{-2}$

$$\therefore \int_{800}^{500}-kx^{-2}\,dx=\int_{0}^{6}v\,dv$$

$$\frac{k}{500}-\frac{k}{800}=\frac{6^2}{2}\quad\Rightarrow\quad k=24000\ \mathrm{m^3\,s^{-2}}$$

(b) $$\int_{800}^{250}-kx^{-2}\,dx=\int_{0}^{v}v\,dv$$

$$\frac{k}{250}-\frac{k}{800}=\frac{v^2}{2}$$

$v^2=132$

$v=11.49\ \mathrm{ms^{-1}}$

11.13 質點的加速度是以關係式 $a=-k/x$ 定義，由實驗得知當 $x=200$ mm時 $v=5$ m/s，當 $x=400$ mm時 $v=3$ m/s，試求(a)當 $x=500$ mm時質點的速度，(b)速度爲0的質點位置。

解 $$\int_{0.2}^{0.4}-\frac{k}{x}\,dx=\int_{5}^{3}v\,dv$$

$$-k\ \ln x\Big|_{0.2}^{0.4}=\frac{1}{2}(3^2-5^2)$$

$k\ \ln 2=8$

$$k=\frac{8}{\ln 2}\quad \mathrm{m^2/s^2}$$

$k=11.54\ \mathrm{m^2s^{-2}}$

(a) $$\int_{0.2}^{0.5}-\frac{k}{x}\,dx=\int_{5}^{v}v\,dv$$

$$-k\ \ln\left(\frac{0.5}{0.2}\right)=\frac{v^2-5^2}{2}$$

$$\frac{8}{\ln 2}\ln(2.5)=\frac{5^2-v^2}{2}$$

$$v=1.962\ \mathrm{ms^{-1}}$$

(b) $\int_{0.2}^{x}-\frac{k}{x}dx=\int_{5}^{0}vdv$

$$-k\ \ln\left(\frac{x}{0.2}\right)=-\frac{5^2}{2}$$

$$x=0.591\ \mathrm{m}$$

11.14 一振盪質點的加速度是以關係式 $a=-kx$ 定義，(a)當 $x=0$ 時 $v=15$ in/s,且當 $v=0$ 時 $x=3$ in，試求 k 值。(b)當 $x=2$ in 時，質點之速率。

解 (a) $\int_{0}^{3}-kxdx=\int_{15}^{0}vdv$

$$\left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^3=\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^{15}$$

$$k=\frac{15^2}{3^2}=25\ \mathrm{s^{-2}}$$

(b) $\int_{0}^{2}-kxdx=\int_{15}^{v}vdv$

$$\frac{k}{2}(2)^2=\frac{15^2-v^2}{2}$$

$$v=11.18\ \mathrm{ips}$$

11.15 一質點的加速度是以關係式 $a=25-3x^2$ 定義，其中 a 單位爲 in/s² 且 x 爲吋，質點開始運動時無任何初速度，起始位置爲 $x=0$，試求質點(a)當 $x=2$ in時的速度，(b)當速度再度爲0時的位置，(c)速度最大時的位置。

解 $t=0$，$x=0$，$v=0$

$$a=25-3x^2=v\frac{dv}{dx}$$

(a) $\int_{0}^{2}(25-3x^2)dx=\int_{0}^{v}vdv$

$$(25x-x^3)\Big|_0^2=\frac{v^2}{2} \Rightarrow v^2=84$$

$$v=9.17\ \text{ips}$$

(b) $\int_0^x (25-3x^2)dx=\int_0^0 vdv=0$

$25x-x^3=0$

$x(25-x^2)=0$

$x=0\ ,\ \pm 5$

∵當 $x=0$ 時 $a=25>0$

∴速度再度爲 0 ips 時 $x=5$ in

(c)當 $a=0 \Rightarrow v=v_{max}$

∴ $a=0 \Rightarrow 25-3x^2=0$

$$x=2.89\ \text{in}$$

11.16 一質點的加速度是以關係式 $a=-4x(1+kx^2)$ 定義，其中 a 的單位爲 m/s^2 且 x 爲公尺，已知當 $x=0$ 時 $v=17$ m/s 。對於其中的(a) $k=0$，(b) $k=0.015$ ，(c) $k=-0.015$，試求當 $x=4$ m時的速度。

解 $a=-4x(1+kx^2)=v\dfrac{dv}{dx}$

$x=0 \Rightarrow v=17$

$\therefore \int_0^4 -4x(1+kx^2)dx=\int_{17}^{v} vdv$

$(-2x^2-kx^4)\Big|_0^4=\dfrac{v^2-17^2}{2}$

$-32-256k=\dfrac{v^2-17^2}{2}$

$v=\sqrt{17^2-2(32+256k)}$

$v=\sqrt{225-512k}$

(a) $k=0$ ： $v=15\ \text{ms}^{-1}$

(b) $k=0.015$ ： $v=14.74\ \text{ms}^{-1}$

(c) $k=-0.015$ ： $v=15.25\ \text{ms}^{-1}$

11.17 一質點的加速度是以關係式 $a=-60x^{-1.5}$ 定義，其中 a 單位爲 m/s^2 而 x 以公尺表示，已知質點開始運動時無任何初速度，起初的位置在 $x=4$m處，試求當(a) $x=2$m，(b) $x=1$ m，(c) $x=100$ mm時的質點速度。

解 (a) $\int_{4}^{2} -60\,x^{-1.5}\,dx = \int_{0}^{v} v\,dv$

$\Rightarrow 120\,[\,2^{-0.5} - 4^{-0.5}\,] = \frac{1}{2}v^2$

$\Rightarrow v = 7.05\,m/s$

(b) $\int_{4}^{1} -60\,x^{-1.5}\,dx = \int_{0}^{v} v\,dv$

$\Rightarrow 120\,[\,1^{-0.5} - 4^{-0.5}\,] = \frac{1}{2}v^2$

$\Rightarrow v = 10.954\,m/s$

(c) $\int_{4}^{0.1} -60\,x^{-1.5}\,dx = \int_{0}^{v} v\,dv$

$\Rightarrow 120\,[\,0.1^{-0.5} - 4^{0.5}\,] = \frac{1}{2}v^2$

$\Rightarrow v = 25.2774\,m/s$

11.18 一質點的加速度是以關係式 $a=-0.4v$ 定義，其中 a 單位爲 in/s^2 而 v 爲 in/s，已知 $t=0$ 時速度爲 30 in/s，試求(a)質點停止之前所經過的距離，(b)質點停止所需要的時間，(c)質點速度減低至成爲其初速度的 1％時所需要的時間。

解 (a) $a = v\frac{dv}{dx} \;\Rightarrow\; -0.4v = v\frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow\; \int_{0}^{x} dx = \int_{30}^{0} -\frac{dv}{0.4}$

$\Rightarrow\; x = 75$ in

(b) $a = \frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -0.4v$

$\Rightarrow\; \int_{0}^{t} dt = \int_{30}^{0^+} -\frac{dv}{0.4v}$

$\Rightarrow\; t = 2.5(\ln 30 - \ln 0^+) \;\Rightarrow\; \infty$

(c) $\int_{0}^{t} dt = \int_{30}^{0.01\times 30} -\frac{dv}{0.4v}$

$$\Rightarrow \quad t = 2.5\,[\,\ln 30 - \ln\,(0.01 \times 30)\,] = 2.5\,\ln \frac{1}{0.01}$$
$$= 11.51\ \mathrm{s}$$

11.19 一質點的加速度是以關係式 $a = -kv^2$ 定義，其中 a 單位爲 ft/s² 而 v 爲 ft / s 表示，質點以初速度25 ft / s 自 $x = 0$ 處起動，且當 $x =$ 40 ft 時發現其速度爲 20 ft/s，試求(a)速度減至 10 ft/s 之前，(b) 停止之前，質點行經的距離。

解 $a = v\dfrac{dv}{dx} = -kv^2$

先求出 k 值：

$$\int_0^{40} -k\,dx = \int_{25}^{20} \frac{dv}{v}$$

$$-40k = \ln \frac{20}{25}$$

$$k = \frac{1}{40}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

(a) $$\int_0^{x} -k\,dx = \int_{25}^{10} \frac{dv}{v} = \ln \frac{10}{25}$$

$$-\frac{1}{40}\ln\left(\frac{5}{4}\right)x = \ln \frac{10}{25}$$

$$x = 164.25\ \mathrm{ft}$$

(b) $$\int_0^{x} -k\,dx = \int_{25}^{0^+} \frac{dv}{v}$$

$$x = \frac{40}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}\,[\,\ln 25 - \ln 0^+\,] \to \infty$$

11.20 解習題 11.19，假定加速度是以關係式 $a = -kv^3$ 定義。

解 $a = v\dfrac{dv}{dx} = -kv^3$

先求出 k 值：

$$\int_0^{40} -k\,dx = \int_{25}^{20} \frac{dv}{v^2}$$

$$-40k=\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{20}\right)$$

$$k=0.00025$$

(a) $\int_0^x -k\,dx=\int_{25}^{10}\frac{dv}{v^2}$

$$-kx=\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{10}\right)$$

$$x=240\text{ ft}$$

(b) $\int_0^x -k\,dx=\int_{25}^{0^+}\frac{dv}{v^2}$

$$-kx=\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{0^+}\right)$$

$$x=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{0^+}-\frac{1}{25}\right)\to\infty$$

11.21　一質點穿過大氣層之加速度被定義為 $a=g(1-k^2v^2)$，已知質點在 $t=0$ 時並沒有初速。(a)試證明速度在時間 t 時為 $v=1/k\tanh kgt$，(b)試寫出一方程式以界定質點落下之任何距離 x 時的速度，(c)為何 $v_t=1/k$ 稱為終端速度。

解　(a) $a=g(1-k^2v^2)=\dfrac{dv}{dt}$

$$\int_0^t g\,dt=\int_0^v\frac{dv}{1-k^2v^2}$$

$$gt=\frac{1}{k}\tanh^{-1}(kv)$$

$$\therefore v=\frac{1}{k}\tanh kgt$$

(b) $a=v\dfrac{dv}{dx}=g(1-k^2v^2)$

$$\int_0^v\frac{v\,dv}{(1-k^2v^2)}=\int_0^x g\,dx$$

$$\frac{1}{2k^2}\int_0^v \frac{d\,k^2v^2}{(1-k^2v^2)} = \int_0^x g\,dx$$

$$-\ln(1-k^2v^2) = 2k^2gx$$

$$v = \frac{\sqrt{1-e^{-2k^2gx}}}{k}$$

(c)當 $x \to \infty$　$v \to v_t = \dfrac{1}{k}$

ie. 這質點降落到某一點後，其速度則不會受任何因素而改變，故稱爲終端速度。

11.22　一質點之加速度是以關係式 $a=-0.02v^{1.75}$ 定義，a 之單位爲 ms^{-2} 而 v 之單位則爲 ms^{-1}，已知在 $x=0$ 處初速度爲 $15ms^{-1}$，試求(a)速度爲 $14\ ms^{-1}$ 時質點之位置。(b)當 $x=100$ m時質點之速度。

解　$a=-0.02v^{1.75}=v\dfrac{dv}{dx}$

$$\int_0^x -0.02\,dx = \int_{15}^v v^{-0.75}\,dv$$

(a) $v=14\ ms^{-1}$：$\displaystyle\int_0^x -0.02\,dx = \int_{15}^{14} v^{-0.75}\,d$

$$-0.02x = \frac{1}{0.25}(14^{0.25}-15^{0.25})$$

$$x = 6.73\ \text{m}$$

(b) $x=100$：　$\displaystyle\int_0^{100} -0.02\,dx = \int_{15}^v v^{-0.75}\,dv$

$$-2 = \frac{1}{0.25}(v^{0.25}-15^{0.25})$$

$$v = 4.64\ ms^{-1}$$

11.23　一質點的加速度是以關係式 $a=-kv^{1.5}$ 定義，質點在 $t=0$ 時和 $x=0$ 處起動，初速度爲 v_0，(a)試證明在任意時間 t 之速度和坐標位置的關係式爲 $x/t=\sqrt{v_0 v}$，(b)已知當 $v_0=25$ m/s 時，質點行經50m 後停止，試求當 $x=30$ m時質點的速度和所經歷之時間。

$$\text{(a)}\ a = \frac{dv}{dt} = -kv^{1.5} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{kv^{1.5}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{k}\left[\frac{1}{v^{0.5}} - \frac{1}{v_0^{0.5}}\right] = \frac{2}{k}\left(\frac{\sqrt{v_0}-\sqrt{v}}{\sqrt{vv_0}}\right)$$

$$\Rightarrow x = \int_0^x dx = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{kv^{0.5}} = -\frac{2}{k}\left(\sqrt{v}-\sqrt{v_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{t} = \sqrt{v_0 v}$$

(b) $x = -\dfrac{2}{k}\left(\sqrt{v}-\sqrt{v_0}\right)$

$x = 50$ m時 $v = 0$，$v_0 = 25$

$$\Rightarrow \quad 50 = -\frac{2}{k}\left(\sqrt{0}-\sqrt{25}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 0.2$$

∴當 $x = 30$ m

$$30 = -\frac{2}{k}\left(\sqrt{v}-\sqrt{25}\right) \quad \Rightarrow \quad v = 4\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$\because \frac{x}{t} = \sqrt{v_0 v} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{t} = \sqrt{25(4)}$$

$\therefore t = 3$ sec

11.24 一質點的速度是以關係式 $v = 8 - 0.02x$ 定義，其中 v 單位爲 m/s 而 x 爲公尺，已知當 $t = 0$ 時 $x = 0$，試求(a)質點停止之前所行經的距離，(b)在 $t = 0$ 時的加速度，(c)當 $x = 100$ m時所經歷的時間。

解　$v = 8 - 0.02x = \dfrac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.02}\ln\left(8 - 0.02x\right) + C_1$$

$\because t = 0$，$x = 0$

$$\therefore 0 = -\frac{1}{0.02}\ln(8) + C_1$$

$$C_1 = 50\ln(8)$$

$$\therefore t = 50\ln\left(\frac{8}{8-0.02x}\right)$$

(a) $v = 0 \Rightarrow x = 400$ m

(b) $v' = \left(v\dfrac{dv}{dx}\right)\Big|_{t=0} = (8)(-0.02) = -0.16\ \mathrm{ms^{-2}}$