

数学100题

〔波〕r.施琴高兹 著

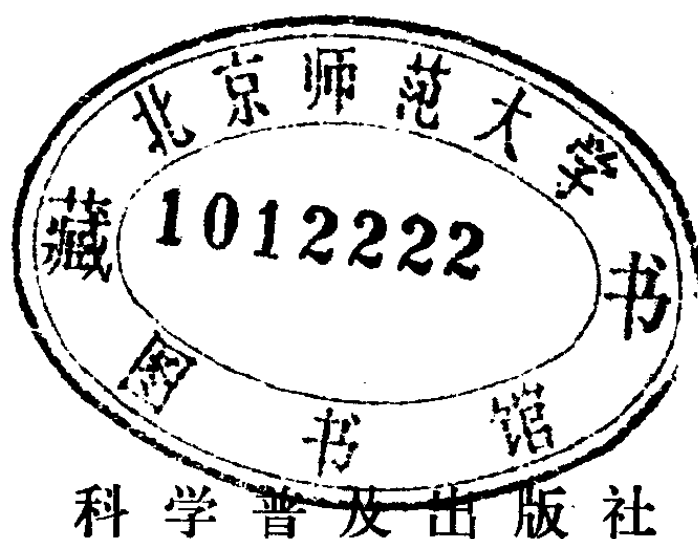
科学普及出版社

数学 100 题

[波] Γ. 施琴高兹 著

王宝霖 译

301/13712/



Г. Штейнгауз
СТО ЗАДАЧ
Издательство «Наука» Москва 1976

* * *

数 学 1 0 0 题
〔波〕Г. 施琴高兹 著
王 宝 霁 译
责任编辑 纪 思
封面设计 窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：6 字数：126 千字
1982年 月第1版 1982年 月第1次印刷
印数：1—124,000册 定价：0.58 元
统一书号：13051·1256 本社书号：0373

内 容 提 要

这是一本中等数学题解集，内容包括数、等式、不等式、点、多边形、圆、椭圆、空间、多面体、球形等各方面的习题和题解，共一百题。一百题外还附有一些尚未给出或得出答案的深入思考题，以供有志的读者去思索、探求解题之路。

书中大部分习题属于中等数学，但却是中学教科书中所没有的。也有一些习题属于高等数学，但能为中学程度的数学爱好者所理解。

本书能帮助中学生更深刻地理解中等数学的基本概念，并能扩大知识的深度和广度；也可供中学数学教师和理工科低年级大学生参考。

译 者 的 话

本书作者Г. 施琴高兹(1887—1972)是波兰的著名学者,也是一个多产的科普作家。他著的《数学万花筒》一书被译成英、俄、匈、捷、德等多种文字相继在许多国家出版,在国际上享有一定的声誉。《100 题》也取得了同样的成就。

作者对《100 题》1963 年的英文版曾经进行了修订,补充和修改了一些题解,并增加了一些新的习题,为了与书名“100 题”相符,作者不得不删去了相应数量的题目。本书是根据俄文版翻译的,俄文版不仅保留了英文版的 100 题,还收进了英文版中删去的原版书中的题目。凡题号下加有 a、b 或 c 的,就是增加的原版中有的习题。

书中的习题基本上都是作者自己设计的,所以读者在其它数学习题集或中学课本中不可能找到它们。这些习题涉及数学的许多领域,构思巧妙,很有趣味。阅读本书不仅可以增长数学知识,而且还可以广开思路 and 得到一些其它方面的常识。

最后一章是没有给出或得出答案的思考题,列出的目的是希望读者自己去钻研和思考。如果读者能够解出其中的某个题目,必然会极大地增强他们学习数学的信心和兴趣。

本书可供爱好数学的中学生、理工科大学低年级学生、中学数学教师以及数学爱好者们学习参考。

在翻译过程中承蒙王麦林、张孝仁同志热情指导,张荣捷同志帮助,顺致谢意。

译者水平有限,错误之处请读者和专家指正。 译者

目 录

	习题	题解
第一章 数、等式和不等式		1
1. 乘法表的练习	(1)	(45)
2. 数的一个有趣的性质	(1)	(45)
3. 能被 11 整除吗?	(2)	(48)
4. 数的可除性	(2)	(49)
5. 简化的费马定理	(2)	(50)
6. 数的分布	(2)	(51)
7. 推广	(2)	(51)
7a. 字母的排列	(2)	(55)
8. 比例	(3)	(56)
8a. 对称代数式	(3)	(56)
9. 根的无理数性	(4)	(56)
10. 不等式	(4)	(57)
11. 数列	(4)	(58)
第二章 点、多边形、圆、椭圆		5
12. 平面上的点	(5)	(59)
13. 角的研究	(5)	(59)
14. 三角形的面积	(5)	(60)
15. 等分三角形的周长	(6)	(61)
15a. 重心	(6)	(66)
16. 划分三角形	(6)	(66)
17. 三角形	(6)	(67)
18. 三角形的网(1)	(7)	(67)
19. 三角形的网(2)	(7)	(68)

	习题	题解
20. 矩形最后剩下了什么?	(7)	(69)
20a. 四边形	(7)	(70)
21. 正方形的划分	(7)	(71)
22. 由正方形构成的网	(8)	(73)
23. 格点	(8)	(74)
24. 圆内的格点	(8)	(74)
25. $14=15$	(8)	(75)
26. 多边形	(9)	(75)
27. 点和圆	(9)	(76)
28. 几何题	(9)	(76)

第三章 空间、多面体、球10

29. 瓜分空间	(10)	(77)
30. 两个投影	(10)	(78)
31. 立方体	(10)	(78)
32. 大地测量线	(11)	(79)
33. 分子的运动	(11)	(82)
34. 立方体的展开图	(11)	(82)
35. 立方体	(11)	(84)
36. 六面体	(11)	(84)
37. 四面体	(12)	(85)
38. 四个面相等的四面体	(12)	(86)
39. 八面体	(12)	(88)
40. 表面上的距离	(12)	(89)
41. 苍蝇旅行	(12)	(91)
42. 正十二面体	(13)	(91)
42a. 内接多面体	(13)	(93)
43. 多面体	(13)	(99)
44. 非凸形多面体	(13)	(100)

	习题	题解
44a. 正多面体的模型	(14)	(101)
45. 来自神秘国的题目	(14)	(114)
46. 三个球面和一条直线	(15)	(116)
47. 球面的一个性质	(15)	(117)
47a. 球的堆积(1)	(15)	(117)
47b. 球的堆积(2)	(15)	(119)

第四章 实用题和…非实用题16

47c. 课本中的错字	(16)	(121)
48. 玩具	(16)	(121)
49. 过节的火腿	(16)	(122)
50. 分饼	(17)	(122)
51. 分蛋糕	(17)	(123)
52. 称量	(18)	(124)
52a. 哪一天是他的生日?	(18)	(125)
53. 索菲娅·谢尔盖耶夫娜多大岁数?	(18)	(125)
54. 池塘里有多少鱼?	(18)	(127)
55. 小轴直径的测量	(19)	(127)
56. 一百二十个球	(19)	(127)
57. 管子上的丝带	(20)	(128)
58. 两个表针相同的表	(20)	(128)
59. 高个子和矮个子	(20)	(130)
60. A班的学生和B班的学生	(21)	(132)
61. 统计学	(22)	(132)
62. 血型	(23)	(134)
63. 再谈血型	(24)	(135)
63a. 现金收支题	(24)	(135)
63b. 花园	(25)	(136)
64. 多余的劳动	(25)	(136)

	习题	题解
65. 长方体的对角线	(25)	(139)
66. 捆扎糖果盒	(25)	(140)
66a. 还有一种捆扎法	(26)	(140)
67. 杠杆秤	(26)	(141)
68. 最小距离	(26)	(142)
69. 分矩形	(26)	(142)
70. 应用题	(27)	(148)
71. 相邻的城市	(28)	(151)
72. 铁路网(1)	(28)	(151)
73. 铁路网(2)	(28)	(152)
74. 试飞	(28)	(155)
75. 太阳与月亮	(28)	(156)
76. 初等天文学	(28)	(156)

第五章 国际象棋、排球、追逐.....29

77. 象棋盘	(29)	(157)
78. 还是象棋盘	(29)	(157)
79. 棋盘上的车	(29)	(161)
80. 椭圆形球台	(29)	(165)
81. 体育运动题(1)	(30)	(165)
82. 体育运动题(2)	(30)	(166)
83. 体育运动的分级比赛理论	(30)	(166)
84. 排球联合会	(31)	(167)
85. 单淘汰赛	(31)	(168)
86. 一个骑自行车的人和两个步行者	(31)	(168)
87. 四条狗	(32)	(169)
88. 追逐(1)	(32)	(170)
89. 追逐(2)	(33)	(170)
90. 问题的条件真的不足吗?	(33)	(171)

	习题	题解
91. 摩托快艇(1)	(33)	(171)
92. 摩托快艇(2)	(33)	(172)

第六章 沙拉捷克博士数学奇遇记34

93. 一个非凡的数	(34)	(173)
94. “厘米尺”	(34)	(173)
95. 猜词游戏	(34)	(174)
96. 大学生的债务	(35)	(174)
96a. “秘密2号”	(35)	(175)
96b. 125个小立方体	(36)	(177)
97. 奇怪的一伙	(37)	(177)
98. 算盘	(37)	(178)
99. 洒水车	(38)	(178)
100. 法国的几个城市	(38)	(178)

第七章 没有给出或得出答案的题39

加号和减号	(39)
三角形中的三角形	(40)
正方形的三部分	(40)
分圆周	(41)
空间中的射线	(41)
无限的棋盘	(41)
再谈算盘	(41)
比轻重	(42)
小箱内的铁筒	(42)
细菌	(42)
马戏团来了!	(43)
三个骑马的牧人	(43)

审问	(44)
正十二面体上的箭头	(44)

第一章 数、等式和不等式

1. 乘法表的练习

2 3 6 1 8 6 8 ...

这列数字是我们按下面的方法排列出来的。除开头的两个数字 2 和 3 外，后面的数字都是小弧所指的两个数字相乘的结果。例如，这列数字的第三个数字 6，就是第一、第二两个数字相乘的结果： $2 \cdot 3 = 6$ ；接着依次乘第二、三两个数字， $3 \cdot 6 = 18$ ，得出的结果是 1 和 8 两个数字，1 是第四个数字，8 是第五个数字；然后 $6 \cdot 1 = 6$ ， $1 \cdot 8 = 8$ ，第六个数字是 6，第七个数字是 8；再往下是五、六两个数字相乘： $8 \cdot 6 = 48$ ，4 是第八个数字、8 是第九个数字等等，依此类推。因每乘一次小弧只往后移动一步，而所得的结果经常是两位的数，最少也是个一位数，所以这列数字可以无止境地乘下去。

试证明，在这列数字中，永远不会出现 5、7、9、这三个数字。

2. 数的一个有趣的性质

随意写一个十进制的自然数(如 2 5 8 3)，然后求这个数的各个数目字的平方和($2^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2 = 102$)。对得出来的数(102)再用这种方法进行处理($1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$)，并一直照此进行下去($5^2 = 25$ ， $2^2 + 5^2 = 29$ ， $2^2 + 9^2 = 85$ ，...)。

证明：如果这个过程不把原来的数变化成 1(1 的平方还是 1，所以以后永远是 1)就必然会变成 145，然后便出现

145、42、20、4、16、37、58、89 这样一个周而复始的循环。

3. 能被11整除吗?

证明: 只要 k 是自然数, 数 $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ 就可以被 11 整除。

4. 数的可除性

$3^{105} + 4^{105}$ 这个数可被 7、13、49、181、379 整除, 但不能被 5 或 11 整除。

试问如何检查?

5. 简化的费马定理

若 x, y, z, n 都是自然数而且 $n \geq z$, 则 $x^n + y^n = z^n$ 这个等式不能成立。

6. 数的分布

试找出 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}$ 十个这样的数: 要使 x_1 这个数在 $[0, 1]$ 区间; 使 x_1, x_2 两个数中的一个数在二等分 $[0, 1]$ 区间的第一个等分内, 另一个数在该区间的第二个等分内; 使 x_1, x_2, x_3 三个数中的某个数在 $[0, 1]$ 区间三等分的第一个等分内, 其余两个数分别在第二、第三两个等分内; 使 x_1, x_2, x_3, x_4 四个数字当中的某个数在 $[0, 1]$ 区间四等分的第一个等分内, 其余三个数分别在另外三个等分内; 依此类推, 最后, 使 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 十个数中的某个数在 $[0, 1]$ 区间十等分的第一等分内, 其余九个数分别在该区间的另外九个等分内。

7. 推广

将上题中的 10 改成 n (n 为自然数), 此题还能解吗?

7a. 字母的排列

由 $a a b b c c$ 这组字母可得出 90 种不同的排列。其

中有些排列如 $a a b c b c$, $a a c b c b$, $b c b c a a$, $a c a c b b$ 之间并无本质的差别, 因为若以 c 代替 b , 以 b 代替 c 即可由上面列举的四个排列中的 $a a b c b c$ 得出 $a a c b c b$, 若逆向阅读 $a a c b c b$ 可得出 $b c b c a a$, 再用字母替换法又可由其中的 $b c b c a a$ 得出 $a c a c b b$. 我们把这种并无本质差别的排列看做是非本质性的不同排列. 而诸如 $a a b c b c$ 和 $a b c a b c$ 这种不同的排列无论用字母替换法还是用逆向阅读法, 甚至两种方法交替进行, 也不能由前一种组合变成后一种, 所以我们把这样的不同排列看做是本质性的不同排列.

试问: 字母 $a a b b c c$ 有多少种本质性的不同排列?

8. 比例

A, B, C, p, q, r 各数间的关系是: $A:B=p$, $B:C=q$, $C:A=r$.

试在 $A:B:C=\square:\square:\square$ 这个比例式的空格内各填写一个由 p, q, r 组成的式子, 要求把三个式子中的字母安排成这样: 若将三个式子中的 p 都改成 q , q 改成 r , r 改成 p , 第一个式子就变成第二个式子, 第二个式子变成第三个式子, 而第三个式子变成第一个式子.

8a. 对称代数式

$x+y+z$ 和 xyz 这种代数式是对称代数式. 因为改变 x, y, z 三个变数在该式中的排列次序, 该式的值不变. 这两个例子的对称性是非常明显的, 有些对称式的对称性并不明显. 下面这个式子就是一个不明显的对称式:

$$\left| |x-y| + x + y - 2z \right| + |x-y| + x + y + 2z$$

试证明该式的对称性, 并求出能使该式的对称性变得明

显的值.

9. 根的无理性

试用初等数学的方法证明方程式 $x^5 + x = 10$ 的正根是个无理数.

10. 不等式

式中的所有字母都是正数, 试证

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} \\ > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}$$

11. 数列

试找出一个 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 都是正数的数列, 要求数列的 $a_0 = 1$, $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$, 并说明这种数列只有一个.

第二章 点、多边形、圆、椭圆

12. 平面上的点

已知平面上有几个(或几十个)点. 用直线将每个点与离它最近的一个点连接起来. 因各点至任何一点的距离都不相等, 所以在连接时不会在谁是最近点的问题上发生疑问.

试证: 在这样连接出来的图形中既不含有封闭的多边形, 也不含有相互交叉的线段.

13. 角的研究

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是正数. 在平面上取一射线 OX , 并在其上截取 $OP_1 = x_1$, 然后在 OP_1 的垂直线上截取 $P_1P_2 = x_2$, 再在 OP_2 的垂直线上截取 $P_2P_3 = x_3$, 依此类推, 一直到截取 $P_{n-1}P_n = x_n$. 在各垂直线上截取线段时, 要使各直角的左侧的边通过 O 点. 我们可以认为射线 OX 绕 O 点旋转了(由初始位置经点 $P_1, P_2, \dots$ 最后到 OP_n)一个角.

试证: 如 x_i 各数按逐渐减小的次序编号, 即 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, 这个角最小, 若按递增的次序编号此角最大.

14. 三角形的面积

试不用三角学的方法证明下面两个求三角形面积 S 的公式.

当三角形的 $\angle A = 60^\circ$ 时,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 - (b-c)^2]; \quad (1)$$

当 $\angle A = 120^\circ$ 时,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12} [a^2 - (b-c)^2]. \quad (2)$$

15. 等分三角形的周长

我们能用一条直线将任何三角形的周长平分为两半，甚至预先规定了直线的方向也完全可能。当从两个不同的方向平分三角形的周长时，两条直线相交于某一点 Q 。可见，经点 Q 可通过两条二等分三角形周长的直线。

有没有可通过三条这种直线的点？如果有，如何把它找出来？

15 a. 重心

设 P 是 A, B, C 三点的重心(这里所说的某三点的重心是指质量相同的三个点的重心)。设 A_1, B_1, C_1 分别是 $B, C, P, C, A, P, A, B, P$ 三组点的重心。

试证： P 也是 A_1, B_1, C_1 三点的重心。

16. 划分三角形

将一个三角形划分成 19 个三角形，要使在划分后的图形的各个顶点上(包括大三角形的顶点)会集的边数相同。

题中 19 这个数还可以换成几个其它的数，这些数只能比 19 小，不能比 19 大，试问可换成几个什么数？

17. 三角形

n 在本题中表示自然数，设平面上有 $3n$ 个点，在这些点中没有任何三个点是在一条直线上。试问，能不能用这些点(以它们做为顶点)组成 n 个即互不相交又互不相容的三角形？

同类的题目还有 $4n$ 个点组成 n 个四边形， $5n$ 个点组成 n 个五边形等等。试问这些问题的答案也都是肯定的吗？