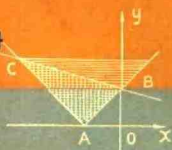


ENG SHUXUE ZONGHE XUNLIAN

等数学综合训练

上册



湖北人民出版社

初等数学综合训练

上 册

熊大寅 陈昌祥 成应璩 陈纪锦
梁法驯 肖若朴 李伯粤 樊 恺
合 编

湖北人民出版社

初等数学综合训练

上 册

熊大寅 符含编

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

武汉市江汉印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 17.75 印张 411,000 字

1981 年 12 月第 1 版 1981 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—20,100

统一书号: 7106·1606 定价: 1.41 元

前 言

这是一本从国内外大量习题中筛选出来的初等数学题汇集。我们选编这本习题集，企图通过它来反映初等数学中基本训练与综合运用间的内在联系。

综合运用所学知识以分析问题和解决问题，这是现行中学教学大纲对数学教学提出的要求。本书正是从这一点着眼，来搜集和整理有关资料的。为了便于读者查阅，我们按照习惯把本书内容分为：代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何和杂题等六篇。在各篇中，充分注意了从加强基本训练入手，力求做到有关知识的相互沟通和相互渗透。

综合题不一定就是难题。它的主要特点在于运用知识的灵活性和技巧性。在习题次序的安排上和解法的选择上，我们尽可能注意初等数学知识的系统性和解题的规律性。但我们认为，和其他一切科学一样，学习数学也只有通过有目的的实践，才能使这种规律性成为自己的东西。而这种实践则正是牢固掌握和灵活应用基础知识所必需的。

为了适应读者的不同需要，我们对其中某些难度较大的习题加了必要的附注，目的在于介绍有关基础知识、解题思路，并给读者以一定启示。这类习题虽难度较大，但根据循序渐进的原则，有中学数学基础的同志，是可以理解和掌握的。

参加本书编写工作的有：熊大寅、陈昌祥、成应琛、陈纪绵、梁法驯、肖若朴、李伯粤、樊恺等八人。由于我们的水平有限，书中缺点错误在所难免，希望读者指正。

编 者

目 录

上 册

一、代 数	1
§ 1. 1 数	1
§ 1. 2 代数式	32
§ 1. 3 指数与对数	53
§ 1. 4 函数	65
§ 1. 5 方程	91
§ 1. 6 方程组	169
§ 1. 7 不等式	213
§ 1. 8 数列	246
§ 1. 9 排列、组合与二项式定理	287
§ 1. 10 初等概率	299
二、三 角	309
§ 2. 1 三角函数	309
§ 2. 2 三角函数式的恒等变形	325
§ 2. 3 三角形的边角关系	371
§ 2. 4 三角极值	482
§ 2. 5 反三角函数与三角方程	517

一、代 数

§ 1.1 数

1. 从 $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ 中选 10 个数, 使其倒数和等于 1.

解 $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$\dots\dots\dots,$

$$\frac{1}{90} = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}.$$

故 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$
 $= 1 - \frac{1}{10}.$

上式左边再加 $\frac{1}{10}$, 即得 1.

故 $2, 6, 10, 12, 20, 30, 42, 56, 72$ 和 90 的倒数和等于 1.

2. 证明: 任意正有理数可以表示为调和数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 不同项之有限和的形式.

证 设 $\frac{a}{b}$ 是一个有理数, 那么它可表示为调和数列的 a 个

重复项之和:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}.$$

使第一个被加项不变, 而其余 $(a-1)$ 个加项以下列恒等式作变换:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

其次, 再把这个恒等式应用到重复的加数上, 并把这个过程继续到和的所有各项变成不同数为止.

$$\begin{aligned}\text{例 } \frac{3}{7} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{57} + \frac{1}{3192}.\end{aligned}$$

3. 已知 $\lg 3 = 0.4771$, 问 3^{100} 是几位数? 它的个位数是几? 为什么?

解 $\because \lg 3^{100} = 100 \lg 3 \approx 100 \times 0.4771 = 47.71$,

$\therefore 3^{100}$ 共有 $47 + 1 = 48$ (位).

又 $\because 3^{100} = 9^{50} = 81^{25}$, 而 81 的个位数是 1, 25 个 1 相乘仍为 1, 即 81^{25} 的个位数为 1.

$\therefore 3^{100}$ 的个位数是 1, 即 3^{100} 有 48 位数字, 个位数是 1.

4. 试证明: 如果 $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ 中的 a, b, c 是有理数, 那么 $a = b = c = 0$.

证 记 $\sqrt[3]{2} = z$, 因此 $z^3 = 2$, 已知的等式变形为

$$cz^2 + bz + a = 0. \quad (1)$$

用 2 乘这个等式的两边, 用 z^3 替换最后一项的 2, 得

$$2cz^2 + 2bz + az^3 = 0.$$

或

$$az^2 + 2cz + 2b = 0. \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 消去 z^2 项, 得

$$(ab - 2c^2)z + a^2 - 2bc = 0. \quad (3)$$

若一次方程(3)的系数不等于0,

则
$$z = \frac{2bc - a^2}{ab - 2c^2}$$

是有理数, 这是不可能的.

所以, 一次方程(3)的系数恒等于0,

即
$$ab - 2c^2 = 0, \text{ 和 } a^2 - 2bc = 0,$$

由此可得 $ab = 2c^2$ 和 $a^2 = 4b^2c^2$.

如果 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$, 逐项用第一个式子除第二个式子,

得
$$a^3 = 2b^3. \quad (4)$$

即
$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}. \text{ 但 } \sqrt[3]{2} \text{ 不等于有理数 } \frac{a}{b}, \text{ 因此, 除非 } a = 0$$

和 $b = 0$ 以外, 等式(4)不能成立. 而这时 $c = 0$.

5. 试证 $\lg \frac{6}{7}$ 是一个无理数.

证 $\lg \frac{6}{7} < 0$, 若 $\lg \frac{6}{7}$ 是一个有理数, 设

$$\lg \frac{6}{7} = -\frac{n}{m}. \quad (m, n \text{ 为正整数})$$

则
$$10^{-\frac{n}{m}} = \frac{6}{7},$$

$$10^n = \left(\frac{7}{6}\right)^m,$$

$$10^n = (2 \cdot 3)^m = 7^m,$$

即
$$2^{m+n} \cdot 3^m \cdot 5^n = 7^m.$$

但上式左边含有质因数 2、3、5, 而右边只含有质因数 7,

不可能相等, 所以 $\lg \frac{6}{7}$ 不可能是有理数, 一定是无理数.

6. 证明: 对于任意一个正整数 n , 数 $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$

都不能是一个完全平方数.

证 因为 $(n^2+n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 1$
 $< n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$,

因此, 题中的数在两个连续平方数之间, 所以它不能是一个完全平方数.

7. 数 11111 在何种进位制中是一个完全平方数?

解 设进位制的底数是 B , 而 $B > 1$.

那么, 数 11111 可以写成 $B^4 + B^3 + B^2 + B + 1$ 的形式, 其次

$$(B^2 + \frac{B}{2})^2 < B^4 + B^3 + B^2 + B + 1 < (B^2 + \frac{B}{2} + 1)^2,$$

如果中项是一个完全平方数, 那么应该满足等式

$$(B^2 + \frac{B}{2} + \frac{1}{2})^2 = B^4 + B^3 + B^2 + B + 1,$$

$$\text{从而 } \frac{B^2}{4} - \frac{B}{2} - \frac{3}{4} = 0 \quad \text{即} \quad (B-3)(B+1) = 0$$

所以 $B=3$, 这时 $11111 = (102)^2$.

8. 在十进制中以如下的方式构成一个数 $x = x_0 \cdot x_1 x_2 x_3 \cdots$.

其中 $x_0 = 1$, 而 x_n 是 $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$ 被 9 除时所得的最小余数. 试证明 x 是有理数.

证 由题设条件有等式

$$9n + x_n = x_{k-1} + x_{k-2} + \cdots + x_1 + x_0 = x_{k-1} + x_{k-1} + 9m$$

$$\text{即} \quad 9n + x_n = 2x_{k-1} + 9m$$

由这个递推关系式可以导出

$$9n + x_n = 2^{k-1}x_0 + 9p$$

这个等式表示 x_n 是 $2^{k-1}x_0 (= 2^{k-1})$ 被 9 除时的余数. 因为不同余数的个数最多只有 9 个, 所以余数所组成的数列 $\{x_k\}$ 中, 至少存在两个相等的元素 x 和 x_{k+q} . 因此

$$x_{k+j} = 2^j x_k + 9j = 2^j x_{k+q} + 9j = x_{k+q+j} + 9r$$

其中 $j=0, 1, 2, \dots, q-1$.

由此推出等式 $x_{k+j} = x_{k+q+j}$.

因为 $0 \leq x_k \leq 8$, 所以数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ 由有 q 个数字的重复循环节组成, 故它是有理数.

9. 证明: ①对于任何自然数 n , 分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约分数;

②无论 a 为任何整数, 分数 $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ 是不可约的.

证法一 ①在给定的分数中, 分子大于分母, 我们将它化为整数和真分数的和:

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}.$$

若给定的分数可约, 那末真分数 $\frac{7n+1}{14n+3}$ 也必可约, 从而其

倒数 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 同样应该可约. 但是

$$\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1},$$

而 $\frac{1}{7n+1}$ 是不可约的, 所以原来的分数也不可约.

证法二 对 $21n+4, 14n+3$ 作辗转相除法:

$$\begin{array}{r|l|l|l} 1 & 21n+4 & 14n+3 & 2 \\ & 14n+3 & 14n+2 & \\ \hline & 7n+1 & 1 & \end{array}$$

由于 $21n+4, 14n+3$ 的最大公约数为 1, 所以 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

②证法一 $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11} = \frac{a^2+3}{(a^2+3)^2 + (a^2+3) - 1}$.

若分子可被整数 K 整除, 那么分母不可能被整数 K 整除,

这是因为分母的前两项可被 K 整除, 但第三项却不能, 故已知分数是不可约的.

证法二 分数 $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ 和它的倒数 $\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$ 是同时可约或者不可约的.

$$\text{但 } \frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3} = a^2+4 - \frac{1}{a^2+3},$$

这样, 原分数也就同时和分数 $\frac{1}{a^2+3}$ 或者可约或者不可约, 但 $\frac{1}{a^2+3}$ 无论 a 为何整数值是不可约的, 所以原分数也是不可约的.

10. 求证: 不存在这样两个既约分数, 它们的乘积与它们的和均为整数.

证 设 $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$ 是两个既约分数 (m_1, m_2, n_1, n_2 是整数), 且有

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = p, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = q,$$

这里, p, q 是整数.

此时, $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$ 即为二次方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两个根.

$$\text{但由 } \frac{m_1^2}{n_1^2} - p \cdot \frac{m_1}{n_1} + q = 0,$$

$$\text{就有 } \frac{m_1^2}{n_1^2} = pm_1 - qn_1.$$

上式左边不是整数, 而右边是整数, 这是不可能的.

同样, $\frac{m_2}{n_2}$ 也不可能是 $x^2 - px + q = 0$ 的根.

所以, 不存在两个既约分数, 它们的乘积与它们的和均为

整数.

11. 已知对于自然数 n , $f(n) = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$,

①求证: 当 n 不是 4 的倍数时, $f(n)$ 能被 13 整除;

②当 n 是 4 的倍数时, 求 $f(n)$ 被 13 除的余数.

解 $f(n) = (5^n + 1)(5^{2n} + 1)$

①当 n 不是 4 的倍数时, $n = 4m + 2$ 或 $2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)

当 $n = 4m + 2$ 时:

$$\begin{aligned}5^n + 1 &= 5^{4m+2} + 1 = 25^{2m+1} + 1 \\&= (25 + 1)(25^{2m} - 25^{2m-1} + \dots - 25 + 1) \\&= 2 \times 13 \times (25^{2m} - \dots + 1),\end{aligned}$$

当 $n = 2m + 1$ 时:

$$5^{2n} + 1 = 25^{2m+1} + 1 = 2 \times 13 \times (25^{2m} - \dots + 1)$$

所以 $f(n)$ 能被 13 整除.

②当 n 是 4 的倍数时, $n = 4m$ ($m = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}f(n) &= (5^{4m} + 1)(5^{8m} + 1) = (25^{2m} + 1)(25^{4m} + 1) \\&= (25^{2m} - 1 + 2)(25^{4m} - 1 + 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又因 } 25^{3m} - 1 &= (25^3 - 1)(25^{2m-2} + 25^{2m-4} + \dots + 1) \\&= 48 \times 13 \times (25^{2m-2} + \dots - 1) \\&= 13N \quad (N \text{ 为自然数}),\end{aligned}$$

同理 $25^{4m} - 1 = 13M$ (M 为自然数).

$$\begin{aligned}\text{所以 } f(n) &= (13N + 2)(13M + 2) \\&= 13(13MN + 2M + 2N) + 4\end{aligned}$$

因此, 余数为 4.

12. 证明三个连续自然数的立方和可被 9 整除.

证法一 $1^3 + 2^3 + 3^3$ 显然可被 9 整除.

假定 $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ 可被 9 整除,

下面需要进一步证明

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ 也可被 9 整除.

$$\therefore (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$$

$$= [(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3] + 9(k^2 + 3k + 3),$$

第一项 $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ 可被 9 整除,

第二项 $9(k^2 + 3k + 3)$ 也可被 9 整除,

所以其和也可被 9 整除.

$$\text{证法二 } k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

$$= 9k^2 + 9 + 3k(k^2 + 5) \quad (1)$$

如果 k 可被 3 整除, 显然等式(1)的右边部分就可被 9 整除;

如果 k 不可被 3 整除, 那么 k 可写成 $k=3m+1$ 或 $k=3m-1$, (m 是正整数或 0). 但

$$k^2 + 5 = (3m+1)^2 + 5 = 9m^2 + 6m + 6$$

$$= 3(3m^2 + 2m + 2),$$

$$\text{或 } k^2 + 5 = (3m-1)^2 + 5 = 9m^2 - 6m + 6$$

$$= 3(3m^2 - 2m + 2).$$

这两种情况 $k^2 + 5$ 都可被 3 整除, 因此, 等式(1)的右边部分也都可被 9 整除.

13. 证明: 若 n 是不能被 2 和 5 整除的自然数, 那么总可以找到全由 1 组成的数, 能被 n 整除.

证 设 $a_1 = 1, a_2 = 11, \dots, a_{n+1} = \overbrace{111\dots1}^{n+1\text{个}}$.

用 n 依次除 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, 得到

$$a_1 = q_1 n + r_1 \quad (1)$$

$$a_2 = q_2 n + r_2 \quad (2)$$

$$a_3 = q_3 n + r_3 \quad (3)$$

.....

$$a_{n+1} = q_{n+1}n + r_{n+1} \quad (n+1)$$

这里, $r_i < n, i = 1, 2, \dots, n+1$. 即 r_i 只能取 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 这 n 个数值. 故 $n+1$ 个余数 $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ 里, 至少有 2 个余数相等. 我们不妨假定

$$r_s = r_k (s > k).$$

由 (s) 式减去 (k) 式, 得

$$a_s - a_k = (q_s - q_k) \cdot n.$$

$$\text{但 } a_s - a_k = \overbrace{11\dots\dots 1}^{s\text{个}} - \overbrace{11\dots\dots 1}^{k\text{个}} = \overbrace{11\dots\dots 1}^{s-k\text{个}} \overbrace{00\dots\dots 0}^{k\text{个}}$$

$$\therefore \overbrace{11\dots\dots 1}^{s-k\text{个}} \overbrace{00\dots\dots 0}^{k\text{个}} = (q_s - q_k) \cdot n$$

$$\text{即 } \overbrace{11\dots\dots 1}^{s-k\text{个}} \times 10^k = (q_s - q_k) \cdot n$$

由题设, n 和 10^k 互质, 因此 $\overbrace{11\dots\dots 1}^{s-k\text{个}}$ 必能被 n 整除. 事

实上, 不仅 $\overbrace{11\dots\dots 1}^{s-k\text{个}}$ 能被 n 整除, 而且 $\overbrace{11\dots\dots 1}^{2(s-k)\text{个}}, \overbrace{11\dots\dots 1}^{3(s-k)\text{个}}, \overbrace{11\dots\dots 1}^{4(s-k)\text{个}}, \dots$ 都能被 n 整除, 也就是说, 这样的数有无限多个.

14. 试证: $2222^{5555} + 5555^{2222}$ 可被 7 整除.

$$\begin{aligned} \text{证明 } 2222^{5555} + 5555^{2222} &= (2222^{5555} + 4^{5555}) \\ &\quad + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}). \end{aligned}$$

考虑三个括弧内的数字:

第一个括弧内的数可被 $2222 + 4 = 2226 = 7 \times 318$ 整除 (因当 n 为奇数时 $a^n + b^n$ 可被 $a + b$ 整除), 第二个括弧内的数可被

$5555 - 4 = 5551 = 7 \times 793$ 整除, 第三个括弧内的数可写成

$$4^{2222}(4^{3333} - 1) = 4^{2222}(64^{1111} - 1),$$

显然它可被 $64 - 1 = 63$ 整除.

由此可得到原数可被 7 整除.

15. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个正整数 (不论有无相等). 试证明: 必能在其中取出若干个, 如 $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ ($1 \leq i \leq j \leq n$), 使得 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ 为 n 的倍数.

证 在 $n+1$ 个数: $0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 中必有对 n 同余的数 (即用 n 除时所得小于 n 的非负余数相同). 于是, 取这两个数相减, 即得一形如 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ 之数, 它为 n 的倍数.

16. 证明: 不存在这样的三个连续奇数, 使得其中每个数是两个非零平方数之和.

证 每个整数可用下列形式之一表示: $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$, 因此, 整数的平方可以表示为 $4k$ 或 $4k+1$, 从而两个整数的平方之和有 $4k$ 或 $4k+1$ 或 $4k+2$ 的形式. 但任一奇数有 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式, 因此, 不但在三个, 甚至在两个连续奇数之间, 一定有一个数不能表示为两个平方数之和的形式.

17. 求所有的三位数, 使其中每一个数除以 11 所得的商等于被除数的数字的平方和.

解 当数字的交错和 (即偶位数字的和与奇位数字的和之差) $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) 等于零, 或者被 11 整除时, 数 $z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ 能被 11 整除.

设被 11 整除的三位数为 $z = 100a + 10b + c$, 其中 a, b, c 为这个数的数字, 且 $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$. 故有

$$a - b + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{或} \quad a - b + c = 11 \quad (2)$$

因为 $a - b + c$ 最多只能等于 18, 所以 $a - b + c = 22$ 是不可能的.

根据题设的条件所求之数的数字必须满足方程:

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

下面分两种情形进行讨论:

情形 I: 由 (1) 得出 $b = a + c$, 代入 (3) 得

$$100a + 10a + 10c + c = 11(2a^2 + 2ac + 2c^2)$$

$$\text{即} \quad 10a + c = 2(a^2 + ac + c^2) \quad (4)$$

$\therefore 10a + c$ 应为偶数, 因此 c 也是偶数.

$$\text{由 (4) 得} \quad a^2 + (c - 5)a + c^2 - \frac{c}{2} = 0 \quad (5)$$

解之得:

$$a_{1,2} = -\frac{c-5}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2-10c+25}{4} + \frac{c}{2} - c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad a_{1,2} &= \frac{5-c}{2} \pm \sqrt{\frac{-3c^2-8c+25}{4}} \\ &= \frac{5-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25-8c-3c^2}. \end{aligned}$$

$\because c$ 为偶数, $\therefore$ 必须对 $c = 0, c = 2, c = 4, c = 6, c = 8$ 分别进行讨论.

$$c = 0; \quad a_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$a_1 = 5, a_2 = 0, a_2$ 不是解.

$c \geq 2$ 时, a 是虚数, 不合题意.

对于 $a = 5, c = 0$, 我们得到数 550, 经检验知它满足题设条件.

情形 II: 由 (2) 得出 $b = a + c - 11$ 代入 (3) 得

$$100a + 10a + 10c - 110 + c = 11[a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2]$$

$$\text{即} \quad 10a + c = 131 + 2(a^2 + c^2 - ac - 11a - 11c) \quad (6)$$

故 $10a+c$ 应为奇数, 而 $10a$ 为偶数, 所以 c 应为奇数.

$$\text{由 (6) 得 } a^2 + (c-16)a + c^2 + \frac{131}{2} - \frac{23c}{2} = 0 \quad (7)$$

解之得

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= -\frac{c-16}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2-32c+256}{4} - \frac{131}{2} + \frac{23c}{2} - c^2} \\ &= \frac{16-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-6+14c-3c^2} \end{aligned}$$

因此, 必须对于 $c=1, c=3, c=5, c=7, c=9$ 分别进行讨论.

当 $c=1$ 时, a 不是一自然数.

$$c=3 \text{ 时, } a_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \frac{3}{2},$$

$\therefore a_1=8, a_2=5, a_2$ 不是解,

因为这时 $b<0$.

$c \geq 5$ 时, a 为虚数, 不合题意.

所以对于 $a=8$ 和 $c=3$ 得到数 803, 经检验知道, 它也满足题设条件.

故所求的三位数只有 550 和 803.

18. 如果今天是星期天, 问 $10^{10^{13}}$ 天后是星期几?

解 $10^6 = 7 \times 142857 + 1, 10^4 = 7 \times 1428 + 4,$

$$\begin{aligned} 10^{10^{13}} &= 10^{9999999999999} \times 10^4 \\ &= (10^6)^{16666666666} \times 10^4 \\ &= (7 \times 142857 + 1)^{16666666666} \times (7 \times 1428 + 4) \\ &= [(7 \times 142857)^{16666666666} \\ &\quad + 16666666666(7 \times 142857)^{16666666665} \\ &\quad + \cdots + 1](7 \times 1428 + 4). \end{aligned}$$

展开后除以 7 余 4, 即星期日后第 $10^{10^{13}}$ 天是星期四.