林 寿 著

广义度量空间与映射

科学出版社

广义度量空间与映射

林 寿 著

科 学 出 版 社
1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书利用映射方法系统论述广义度量空间的基本理论，总结了 30 年以来一般拓扑学方面的重要研究成果，特别包含了作者本人的研究成果．内容包括广义度量空间的产生、度量空间的映象和广义度量空间类等三章和两个附录．

读者对象为大专院校数学系高年级学生、研究生和数学工作者．

广义度量空间与映射
林 寿 著
责任编辑 刘嘉善
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1995 年 8 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32
1995 年 8 月第一次印刷 印张：11 3/8 插页：2
印数：1-1 120 字数：295 000
ISBN 7-03-004630-7/O·792
定价： 25.00 元

序

关于广义度量空间理论的综合介绍，国外出版的 Burke, Lutzer [1976], Gruenhage [1984] 以及最近出版的 Topics in General Topology 上分别由 Nagata [1989] 、 Tamano [1989b] 撰写的二章都是比较优秀的，值得读者们一读. 本书的特点是用映射为工具阐述广义度量空间. 早在 1961 年 Alexandroff 在第一次布拉格会议上提出用映射方法研究空间的设想. 1966 年 Arhangel'skii 的综合论文"映射与空间"承继、发展了这一设想. 我们对此感到莫大的兴趣. 曾由吴利生、陈必胜两同志把这综合论文译为中文 (原系俄文), 登载在《数学译林》 (1981–1982), 希望引起国内同行们的兴趣.

关于用映射研究空间的内容大致有三：(1) 哪些特定的广义度量空间可以表示为度量空间在某些映射下的象或逆象. 例如 Morita [1964] 为研究积空间的正规性而引入的 M- 空间可以表示为度量空间在拟完备映射下的逆象，从而为研究 M- 空间开辟了新途径且使它与度量空间发生联系. (2) 度量空间在某些映射下的象有哪些内在特征. 例如度量空间在闭映射下的象 (通常称为 Lašnev 空间) 被 Foged [1985] 刻划为具有 σ- 遗传闭包保持 k- 网的 T_3 、 Fréchet 空间. 从而可与 Burke-Engelking-Lutzer [1975] 的度量化定理作比较，且可与借助 k- 网定义的某些广义度量空间 (如 $\aleph$- 空间) 取得联系. (3) 某些特定的广义度量空间在怎样的映射下保持不变. 以度量空间为例，由 Morita-Hanai-Stone [1956] 定理知，可度量化在完备映射下保持不变. 更进一步， Michael [1972] 得到了可度量化在可数双商闭映射下保持不变的性质，显示了可数双商映射的魅力. 从上

述三方面的简单的例子看来，在广义度量空间的研究中渗入映射方法是多么丰富多彩，引人入胜.

本书作者尝试采用 Alexandroff, Arhangel'skii 的设想与方法，以映射为工具阐述国际上 30 年来广义度量空间方面的有关内容，特别近年来国内学者在这方面的成果写成本专著. 书中对上述设想与方法更有所发扬光大，是一本饶有兴趣的科研读物. 本书可用作大学数学系高年级学生及研究生的选修课教材或教学参考书，是一般拓扑学专业研究生的必读专著，也可供数学工作者或其它科学工作者参考.

高国士

1992 年 9 月 1 日于苏州大学

前　言

1944 年法国数学大师 Dieudonné 引进仿紧性的概念是一般拓扑学进入全盛期的显著标志． 1950, 1951 年建立的卓越的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理为全面探索度量性质带来了根本性的变化，同时对广义度量性质的研究展示了光明的前景．对仿紧性及可度量性的深入工作揭示了广义度量空间理论的研究序幕．

1961 年前苏联伟大数学家 Alexandroff 在布拉格“一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系”的国际学术会议上提出了用映射研究空间的设想，即将各式各样的拓扑空间类通过映射类作为纽带将它们联结于一体，通过映射与空间的关系反映拓扑空间论的研究框架与整体结构，使映射成为揭示空间类之间的内部规律的强有力工具． 1966 年著名拓扑学家 Arhangel'skii 发表了历史性的文献“映射与空间”，对如何实施 Alexandroff 设想给出了一系列建设性的具体步骤，开创了用映射研究空间的新纪元，成为一般拓扑学蓬勃发展的里程碑．从此， Alexandroff 设想变为一般拓扑学中的一种必不可少的研究手段，推动着一般拓扑学，尤其是广义度量空间理论的迅猛发展．总之， Alexandroff 的关于映射的空间分类原则的设想构成了一般拓扑学的重要组成部分．

依照 Alexandroff-Arhangel'skii 思想，用映射研究空间的主要内容是借助映射类建立度量空间类与具有特定拓扑性质的空间类之间的广泛联系，研究度量空间类在各类映射下的象的内在特征以及特定的空间类被怎样的映射保持．这一框架决定了本书预期达到的目标：全面描述度量空间类在各类映射下的特征，建立某些重要的广义度量空间类的映射定理．本书由三

章及两个附录和 400 余篇文献组成. 第一章简要介绍广义度量空间类的一些基本概念, 其中包含这些空间类的基本运算性质和简单特征, 目的是为后二章阐述空间与映射的关系提供必要的准备. 第二章借助具有特定性质的集族, 同时通过基以及推广形成的一些概念展示度量空间类关于商映射、伪开映射、可数双商映射、闭映射以及在附加纤维可分性或紧性等条件时这些映射的映象或逆映象的内在刻画. 第三章利用几类优美的特征建立由具有特定性质的基、弱基、 k- 网、网和 $(\bmod k)$- 网等所确定的广义度量空间类, 如 M- 空间类、 g- 可度量空间类、 $\aleph$- 空间类、 σ- 空间类和 Σ- 空间类的映射定理. 本书最后有两个附录, 一是便于读者了解正文中使用的一些覆盖性质的内容, 二是使读者加深对广义度量空间理论的全面认识, 特别是明确 Alexandroff 设想在一般拓扑学中所处的位置.

本书的内容大都散见于近 30 年来关于空间和映射研究的数百篇论文中. 作者力求通过广义度量空间类的映射定理指出, 映射的空间分类原则确实是一般拓扑学的带有决定性意义的研究模式, 并由此窥视空间与映射的全面联系. 同时注重取材的新颖与特色, 尽可能勾绘出我国学者近年来取得的突出成就. 与通常的研究相比, 确定的可数双商映射、序列商映射的表达、利用 cs^*- 网讨论度量空间的各类商 s- 映象、对遗传闭包保持集族的系统阐述、归纳和整理完备逆象的 G_δ- 对角线定理、闭映射的分解定理以及积空间 k- 性质的研究等都是本书的特色.

映射与空间是一个庞大而前景广阔的课题. 作者希望通过本书使读者对映射的空间分类原则有所了解, 创造出更多优异的成果, 扩大我国一般拓扑学界在国际上的影响. 衷心感谢多年来一直给予作者关心、帮助的苏州大学、四川大学、广西大学、西北大学和山东大学的诸前辈和同事们, 如果说我在该领域内有一点成绩的话, 那完全是由于他们的扶持与爱护的结果. 作者尤其深深感谢事业上的引路人、导师高国士教授. 这

不仅仅是由于高教授在空间与映射方面完成的出色工作和在国内积极推崇 Alexandroff-Arhangel'skii 思想从而使作者坚定地从事本课题的工作，而且更重要的是因为高教授自 1984 年以来呕心沥血的谆谆教诲、无私帮助和持续鼓励为作者奠定了学习、研究的基础，指出了继续探索的方向以及不断工作的勇气和信心. 虽然本书由作者执笔完成，但稍为感到宽慰的是在一定程度上反映了高教授的研究风格与学术思想.

本书原稿是作者 1991 年 9 月 —1992 年 7 月在四川大学数学所作为访问学者时撰写的，感谢蒋继光老师和刘应明老师给予的帮助和关心. 如果没有国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金的资助，本书是很难与读者见面的.

作者

1993 年 4 月于宁德师专

目　　录

第一章　广义度量空间的产生

度量空间理论在一般拓扑学的研究中占据核心位置，作为其一般化产生了广义度量空间理论. 本章从距离函数、基及其推广、广义可数紧性三个角度导出本书所论述的大部分广义度量空间类，同时描述这些空间类的一些简单刻画，基本的运算性质 (如拓扑和性质，遗传性质，可积性质) 以及与其它一些空间类的粗略关系.

§ 1.1　记号及术语

本书所论空间均指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间，本节定义本书经常使用的一些记号和术语.

1.1.1 实数子集

以 R 表示实直线， N, Q, R^+ 分别表示 R 的自然数子集，有理数子集和非负实数子集． I 表示单位区间 $[0,1]$，记 ω 为 $\{0\} \cup N$ 以及 S_1 为 $\{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$.

1.1.2 拓扑空间子集的运算

对拓扑空间 $X, \tau(X)$ 表示 X 上的拓扑， $\tau^c(X)$ 表示 X 上闭集的全体. 在不引起混淆时，分别记 $\tau(X)$ 和 $\tau^c(X)$ 为 τ 和

τ^c. 对 X 的子集 A,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包,
A^0 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部,
∂A 或 $\mathrm{Br}(A)$ 表示 A 在 X 中的边界,
A^α 表示 A 在 X 中的聚点的集合.

若 A 是 X 的子空间 Y 的子集, 那么 A 在 Y 中的闭包、内部分别记为 $cl_Y(A)$ 和 $\mathrm{int}_Y(A)$.

1.1.3 拓扑空间上的集族

对于空间 X, 记

$K(X) = \{K \subset X : K \text{ 是 } X \text{ 的紧子集 }\}$,

$S(X) = \{S \subset X : S \text{ 是 } X \text{ 的收敛序列 (含极限点)}\}$, 其中每一非空有限集视为一确定的平凡收敛序列.

对空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, 记

$$\mathcal{P}^{<\omega} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P} : \mathcal{F}\text{有限}\},$$

$$\mathcal{P}^F = \{\cup\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}\},$$

$$\cup\mathcal{P} = \cup\{P : P \in \mathcal{P}\}, \mathcal{P}\text{ 的并}$$

$$\cap\mathcal{P} = \cap\{P : P \in \mathcal{P}\}, \mathcal{P}\text{ 的交}$$

$$\mathcal{P}^- = \{\overline{P} : P \in \mathcal{P}\}, \mathcal{P}\text{ 的闭包}$$

$$\mathcal{P}^0 = \{P^0 : P \in \mathcal{P}\}, \mathcal{P}\text{ 的内部.}$$

对 $A \subset X$, $x \in X$, 记

$$(\mathcal{P})_A = \{P \in \mathcal{P} : P \cap A \neq \varnothing\},\ (\mathcal{P})_x = (\mathcal{P})_{\{x\}},$$

$$\mathrm{st}\,(A, \mathcal{P}) = \cup(\mathcal{P})_A,\ \mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}) = \cup(\mathcal{P})_x,$$

$$\mathrm{st}^2(x, \mathcal{P}) = \mathrm{st}\,(\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}), \mathcal{P}),$$

$$\mathcal{P}_{|A} = \{P \cap A : P \in \mathcal{P}\}.$$

若 $\mathcal{F}$ 也是 X 的子集族，记 $\mathcal{P}\wedge\mathcal{F}=\{P\cap F:P\in\mathcal{P}$ 且 $F\in\mathcal{F}\}$. 同理可定义 $\wedge_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{P}_\alpha$.

1.1.4 空间上的映射

设 X,Y 是空间， $f:X\to Y$.

对 $A\subset X$, f 在 A 处的限制 $f|_A: A\to f(A)$ 定义为对 $x\in A$, $f|_A(x)=f(x)$.

对 $B\subset Y$, f 在 B 处的限制 $f_B=f|_{f^{-1}(B)}$.

若 $\mathcal{P}$ 是 X 的子集族，则 $f(\mathcal{P})=\{f(P):P\in\mathcal{P}\}$, $\mathcal{P}$ 关于 f 的象.

若 $\mathcal{F}$ 是 Y 的子集族，则 $f^{-1}(\mathcal{F})=\{f^{-1}(F):F\in\mathcal{F}\}$, $\mathcal{F}$ 关于 f 的逆象.

对空间 X,Y,Z 和 W, 若 $f:X\to Y$, $g:X\to Z$, $h:W\to Z$, 对角线映射 $f\triangle g:X\to Y\times Z$ 和乘积映射 $f\times h:X\times W\to Y\times Z$ 分别定义为 $f\triangle g(x)=(f(x),g(x))$ 和 $(f\times h)(x,\omega)=(f(x),h(w))$. 可类似定义 $\triangle_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:X\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$ 和 $\prod_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$.

id_X 表示空间 X 到 X 上的恒等映射.

对积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 及 $\beta\in\Gamma$, 以 $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to X_\beta$ 表示 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 在第 β 个坐标上的投影映射.

1.1.5 空间的运算

设 $\mathcal{P}$ 是一拓扑性质.

(1) $\mathcal{P}$ 称为可加的，若 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一族具有性质 $\mathcal{P}$ 的空间族，则空间 $\oplus\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 具有性质 $\mathcal{P}$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为遗传的 (开遗传的，闭遗传的), 若空间 X 具有性质 $\mathcal{P}$, 则 X 的每一子空间 (开子空间，闭子空间) 也具有性质 $\mathcal{P}$.

(3) $\mathcal{P}$ 称为可积的 (有限可积的，可数可积的), 若 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族具有性质 $\mathcal{P}$ 的空间族 (且 Λ 是有限集，Λ 是可数集), 则空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 也具有性质 $\mathcal{P}$.

(4) $\mathcal{P}$ 称为被映射类 $\mathcal{L}$ 保持 (逆保持), 若满映射 $f : X \to Y$, 其中 $f \in \mathcal{L}$ 且空间 X(空间 Y) 具有性质 $\mathcal{P}$, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 $\mathcal{P}$.

为了叙述方便起见，术语 "$\mathcal{P}$ 空间"、"$\mathcal{P}$ 性质" 或 "$\mathcal{P}$ 空间性质" 将表示同一含意交换使用.

§ 1.2　距离函数

度量空间最易为数学工作者接受的原因之一是其上存在度量. 对距离三公里进行一般化是产生广义度量空间最直接的途径. 本节从距离函数出发引出度量空间、正规度量空间和对称度量空间，半度量空间以及相关的可展空间、拟可展空间的概念.

定义 1.2.1　d 称为集合 X 上的距离 (伪距离). 若 $d : X \times X \to R^+$ 且对任意的 $x, y, z \in X$, 下列三个条件成立：

(1) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ $(d(x,x) = 0)$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,x)$.

对 $A, B \subset X$, $x \in X$, 置

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\},$$
$$d(x,B) = d(B,x) = d(\{x\},B).$$

对正数 ε, 令

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

X 称为度量空间 (伪度量空间), 若 X 是以 $\{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 为基生成的拓扑空间. 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若空

间 X 的拓扑可由其距离 d 生成，那么 X 称为可度量空间， d 称为 X 上的度量.

度量空间是数学研究的一般对象，具有良好的性质，如可度量性是可加性，遗传性和可数可积性质. 下面我们研究一类特殊的度量空间.

定义 1.2.2 空间 X 上的度量 d 称为正规的，若对于 X 的互不相交的闭子集 A,B 有 $d(A,B)>0$. 具有正规度量的空间称为正规度量空间.

定义 1.2.3 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为离散的，若对 $x\in X$，存在 x 在 X 中的邻域 V 使 V 与 $\mathcal{P}$ 中至多一个元相交. X 的子集 A 称为离散的，若 $\{\{x\}:x\in A\}$ 是 X 的离散集族.

显然， A 是 X 的离散子集当且仅当 $A^d=\emptyset$.

定理 1.2.4 (Mrówka [1965]) 设 X 是一个度量空间，那么 X 是正规度量空间当且仅当 X^d 是 X 的紧子集.

证明 必要性. 设 d 是 X 上的正规度量. 如果 X^d 不是 X 的紧子集，则存在 $\{p_n:n\in N\}\subset X^d$ 是 X 的闭离散子集. 对 $n\in N$, 置

$$Z_n=\{p_m:n\neq m\in N\},\quad c_n=d(p_n,Z_n),$$

那么 $c_n>0$, 并且存在 $q_n\in X$ 使 $0<d(p_n,q_n)<\min\{1/n,c_n\}$, 从而当 $n\neq m$ 时有 $d(p_m,q_n)\geq d(p_m,p_n)-d(p_n,q_n)>0$, 所以 $p_m\neq q_n$. 置

$$A=\{p_n:n\in N\},\quad B=\{q_n:n\in N\},$$

则 $A\cap B=\emptyset$. 因为 A 是 X 的闭离散子集且 $d(p_n,q_n)\to 0$, 所以 B 也是 X 的闭离散子集. 然而 $d(A,B)<1/n$, 于是 $d(A,B)=0$, 矛盾.

充分性. 设 X^d 是 X 的紧子集， ρ 是 X 上的度量. 置

$$A_1=\{x\in X:\rho(x,X^d)\geq 1/2\},$$

$$A_n = \{x \in X : 1/2^n \le \rho(x, X^d) < 1/2^{n-1}\}, \quad n = 2, 3, \cdots,$$

则 $X = X^d \cup (\cup_{n \in N} A_n)$. 依如下方式定义 $\rho' : X \times X \to R^+$: 对 $x, y \in X$, 若 $x = y$, 则 $\rho'(x, y) = 0$, 若 $x \neq y$, 则

$$\rho'(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in X^d \times X^d \\ 1/2^n, & (x,y) \in (A_n \times A_n) \cup (A_n \times X^d) \\ |1/2^n - 1/2^m|, & (x,y) \in A_n \times A_m,\ n \neq m \end{cases}$$

并且 $\rho'(x, y) = \rho'(y, x)$. 易见, ρ' 是 X 上的伪距离. 如果 $\rho(x_n, x) \to 0$ 且 $x_n \neq x$, 那么 $x \in X^d$. 由 ρ' 的定义知 $\rho'(x_n, x) \le \rho(x_n, x)$, 于是 $\rho'(x_n, x) \to 0$. 置

$$d(x, y) = \rho(x, y) + \rho'(x, y), \quad (x, y) \in X \times X,$$

则 d 是 X 上的度量. 往证 d 是 X 上的正规度量. 对 X 的互不相交的闭子集 A, B, 若 $d(A, B) = 0$, 则存在 $\{x_n : n \in N\} \subset A$, $\{y_n : n \in N\} \subset B$ 使 $d(x_n, y_n) \to 0$. 如果 $d(x_n, X^d) \nrightarrow 0$, 不妨设存在正数 δ 使 $d(x_n, X^d) \ge \delta$, 于是有 $m \in N$ 使 $x_n \in \cup_{i \le m} A_i$, 从而 $d(x_n, y_n) \ge \rho'(x_n, y_n) \ge 1/2^{m+1}$, 矛盾. 因此 $d(x_n, X^d) \to 0$, 于是存在序列 $\{z_n\} \subset X^d$ 使 $d(x_n, z_n) \to 0$. 由 X^d 的紧性, 设 z 是 $\{z_n\}$ 在 X 中的一个聚点, 那么 $z \in A \cap B$, 矛盾.

本节的第二部分研究由一些弱形式的距离函数定义的空间.

定义 1.2.5 对集合 X, 函数 $d : X \times X \to R^+$ 称为 X 上的对称距离, 若对 $x, y \in X$, 下述两条件成立:

(1) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

空间 X 称为对称度量空间, 如果存在 X 上的对称距离 d 使 $U \subset X$ 是 X 的开子集当且仅当对 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 这时 d 称为 X 上的对称度量.

若 d 是 X 上的对称距离，那么 (X,d) 是对称度量空间当且仅当 d 满足 $A\subset X$ 是 X 的闭子集的充分且必要条件是对 $x\in X\backslash A$ 有 $d(x,A)>0$. 易验证对称度量性是可加性、开遗传性和闭遗传性.

定义 1.2.6 设 d 是 X 上的对称距离. d 称为 X 上的半度量，若 (X,d) 是对称度量空间，并且对 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$ 有 $x\in B^0(x,\varepsilon)$. 这时 (X,d) 称为半度量空间.

若 d 是 X 上的对称距离，那么 (X,d) 是半度量空间当且仅当 d 满足对 $A\subset X, x\in \overline{A}$ 的充分且必要条件是 $d(x,A)=0$. 易验证半度量性是可加性和遗传性.

定义 1.2.7 设 X 是空间.

(1) X 称为 Fréchet 空间，如果 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 中的序列收敛于点 x.

(2) 函数 $g:N\times X\to\tau$ 称为 g- 函数，如果对 $x\in X$ 和 $n\in N$ 有

(i) $x\in g(n,x)$.

(ii) $g(n+1,x)\subset g(n,x)$.

如未特别说明，g- 函数均用 g 表示. 对 $A\subset X$, 记 $g(n,A)=\cup_{x\in A}g(n,x)$.

(iii) 称 X 具有半展开，如果存在 X 的覆盖列 $\{\mathcal{F}_n\}$ 满足对 $x\in X$, $\{\mathrm{st}\,(x,\mathcal{F}_n):n\in N\}$ 是 x 在 X 中的邻域基. 这时 $\{\mathcal{F}_n\}$ 称为 X 的半展开.

定理 1.2.8 下列条件相互等价：

(1) X 是半度量空间.

(2) X 存在半度量函数，即 X 具有 g- 函数满足对 $x\in X$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in g(n,x)$ 或 $x\in g(n,x_n)$, 则 $x_n\to x$.

(3) X 具有半展开.

(4) X 是第一可数 (或 Fréchet) 的对称度量空间.

证明 (1)⇒(3) 设 (X,d) 是半度量空间. 对 $n\in N$, 置

$$\mathcal{F}_n=\{A\subset X:\mathrm{diam}\,A<1/n\},$$