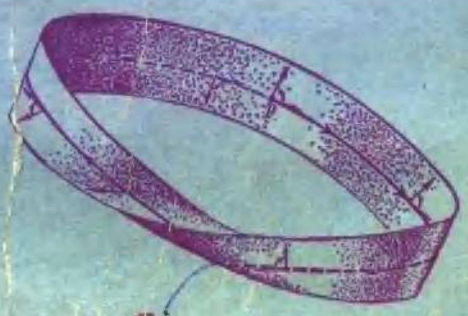
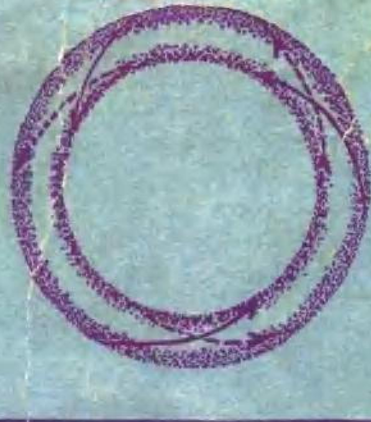
高等学校教学参考书

流形和STOKES定理

徐森林



$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial\vec{M}} \omega$$



人民教育出版社

高等学校教学参考书

流形和Stokes定理

徐 森 林

内 容 提 要

本书着重介绍了流形论。围绕流形上的Stokes定理这个中心课题详细地介绍了流形、切向量、张量与外微分形式等概念和一些主要定理。特别是对流形的定向和流形上的Stokes定理作了详细清楚的论述和严谨的证明。

本书可作为理科大学数学系高年级及研究生的选修课教材或教学参考书，也可作为大学教师进修的参考书和有志于现代数学者的读物。本书也为力学及物理学(特别是广义相对论及规范场论)提供了数学基础。

高等学校教学参考书

流形和Stokes定理

徐森林

•

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县 印刷厂印装

•

开本850×1168 1/32 印张10.5 字数250,000

1981年12月第1版 1983年6月第1次印刷

印数 00,001—8,700

书号 13012·0696 定价1.10元

序

随着近代科学的飞速发展，流形、Stokes 定理、张量及外微分形式等较深的知识不仅业已成为数学本身的最基本、最重要而最活跃的研究领域，而且在数学的其它分支中，在力学及物理学(特别是 Einstein 的广义相对论及规范场论)中，已获得越来越广泛、深刻而富有成效的应用. 今天，流形论象分析和代数学一样，已不只是成为某些大学数学系的必修科目，而且业已成为其它有关学科的“服务性学科”.

本书是属于大范围分析与几何范畴的. 作者力图直观地、深入浅出地论述与流形论有关的最重要、最基本的知识，特别是以 Stokes 定理为中心来展开全书各个章节. 第一章讲述了阅读本书所必须的点集拓扑学知识；事实上，这一章本身可作为点集拓扑学的导论. 第二章紧紧围绕 Stokes 定理详细地论述了流形、切向量、张量与外微分形式等基本而重要的概念，而且还严谨地论述了流形的定向这一关键性问题；特别是，作者有意用相当多的笔墨给出流形上的 Stokes 定理的严格证明；作者这种尝试除了使定理的证明达到严谨之外，尚使该定理的形式更加实用；关于这两点，往往在许多著作中的处理是不能令人满意的. 最后在§8.1中引进了Riemann流形上的第一、第二型积分以及长度、面积和体积等概念. 而在§8.2中所论述的一般联络和Riemann联络的概念是属于微分几何范畴的，加进这部分内容的目的是为了引起进一步学习和研究近代微分几何的读者的兴趣.

本书是用近代数学的观点和方法写成的. 例如对切向量、张量、外微分形式以及外微分算子 d 的定义都运用了“映射”(即不变)的观点，在它们的定义中并不涉及局部坐标系，而在定义之后

再写出它们在局部坐标系的表示，立刻就得到经典定义的形式。为了使读者更好地熟悉和掌握经典定义下的运算，就相应地配备了这方面的习题，作为一个必要的补充。

为了使读者不太困难地理解和掌握抽象的内容和具有一定难度的定理的证明，以及为了增加读者的独立思考能力，本书配备了大量的例题，图示和习题。它们是微积分和流形上分析之间联系的纽带，能帮助减少阅读本书的困难。书中有一小部分打“*”号的习题是训练读者思维能力的；还有的是需要读者直接去查阅有关参考书和文献的，以便扩大读者的视野。一般的读者，或初读本书时，可以略去它们。

本书的初稿曾先后在中国科学技术大学数学系教师讨论班上以及在77级部分学生讨论班上试用过，效果尚好。

阅读本书必须具备微积分、线性代数、抽象代数、点集论及微分方程等有关的基本知识。

本书将经典微积分、Lie群、微分拓扑与微分几何融会于一起来处理是受导师吴文俊教授的深刻影响和启示。特别还应强调的是，吴先生对本书的写作、成书和出版一直很关心并给予作者多方面指导，作者在此向他表示衷心的感谢。

最后，还应当指出的是数学研究所的刘书麟同志曾对本书提出了一系列宝贵的建设性意见，并且还提供了一些富有启发性的习题，这使本书增色不少，对此，作者向他表示深切的谢意。科大的左康、沙际平和李岩岩同学认真仔细地阅读了全书，并逐个地验证了习题，而且还提出了一些具体意见。作者在此向他们表示感谢。作者还应当感谢那些积极支持并经常提出宝贵意见的本校数学系的部分教师。

由于作者水平有限，本书一定存在不少缺点，期望出版后得到同志们和读者的批评与指正，以便改进。

徐森林　　1980年5月

目　录

第一章 拓扑空间

本章介绍拓扑空间、开集、闭集、连续映射和同胚映射等基本概念，并且还叙述了可数性、分离性、连通性、列紧性、紧致性等拓扑性质．而将 Euclid 空间和度量空间作为拓扑空间的重要例子．这些内容是学习流形和Stokes 定理所必备的知识．

§1 度量空间(X,ρ)

1．内积空间$(X,\langle,\rangle)$和模空间$(X,\|\ \|)$

定义 1 设X是一个向量空间，$X\times X=\{(x,y)\mid x,y\in X\}$．如果映射

$$g=\langle,\rangle\colon X\times X\to R(\text{实数全体}),$$
$$(x,y)\to g(x,y)=\langle x,y\rangle$$

满足：

(1°) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$．$\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$（正定性）①；

(2°) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$（对称性）；

(3°) $\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,\ y\rangle+\langle x_2,y\rangle$，

$\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$，$x$，$x_1,x_2,y\in X,\lambda\in R$（线性性）．

则称$(X,\langle,\rangle)$为内积空间，$g=\langle,\rangle$为X上的一个内积．

注 显然从(2°)，(3°)可推出：

$$\langle x,y_1+y_2\rangle=\langle x,y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle,$$
$$\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle,x,y,y_1,y_2\in X,\lambda\in R.$$

---

① 符号“$\Longleftrightarrow$”表示充分必要条件．
“$\Longrightarrow$”表示必要性．
“$\Longleftarrow$”表示充分性．

因此$\langle\ ,\ \rangle$是双线性的(或是偏线性的)．

定义 2 设X是一个向量空间，如果映射

$$\|\quad\|: X\to R,$$
$$x\to\|x\|$$

满足：

(1°) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$；

(2°) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$，$x\in X,\lambda\in R$；

(3°) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x,y\in X$．

则称$(X,\|\quad\|)$为**模空间**（或**赋范空间**），$\|\quad\|$为X上的一个**模**（或**范数**）．

定理 1(Schwarz 不等式)．设$(X,\langle\ ,\ \rangle)$是内积空间，$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}(x\in X)$，则有

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

等号当且仅当$y=\lambda x$或$x=\lambda y$时才成立．

证明：(1°)当$x=0$(或$y=0$)时，由定义1中的(3°)得到

$$\langle 0,y\rangle=\langle 0+0,y\rangle=\langle 0,y\rangle+\langle 0,y\rangle,$$
$$\langle 0,y\rangle=0,$$

再由定义1中的(1°)可看出定理的不等式显然成立．

当$x\neq 0,y\neq 0$时，在

$$\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle\lambda+\langle y,y\rangle\lambda^2=\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle\geqslant 0 \qquad (1)$$

中令$\lambda=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}/\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}$，就有

$$\langle x,y\rangle\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

再用$-y$代替y得到

$$-\langle x,y\rangle=\langle x,-y\rangle\leqslant\|x\|\cdot\|-y\|=\|x\|\cdot\|y\|,$$

所以

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

(2°) 如果$y=\lambda x$(或$x=\lambda y$)则

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle x,\lambda x\rangle| = |\lambda|\cdot|\langle x,x\rangle| = \|x\|\cdot\|\lambda x\| = \|x\|\cdot\|y\|.$$

反之,若$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$.

情形 1　$y=0$,则 $y=0\cdot x$.

情形 2　$y\neq 0$,由于(1)中关于 λ 的二次三项式的判别式

$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = 0,$$

故必有实数 λ,使得

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle\lambda + \langle y,y\rangle\lambda^2 = 0,$$

由定义 1 中的(1°)推出

$$x=\lambda y. \quad \#$$

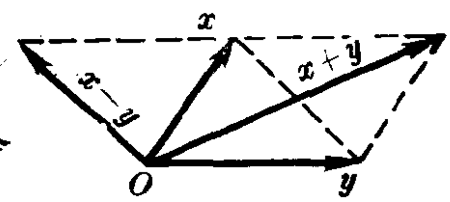


图 1

定理 2　设$(X,\langle,\rangle)$是内积空间,令

$$\|\ \|: X\to R,$$

$$x\to\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

则$(X,\|\ \|)$是由$(X,\langle,\rangle)$导出的一个模空间.

证明　定义 2 中的条件 (1°) 和 (2°) 是显然的. 而 (3°) 从 Schwarz 不等式推出:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + $$
$$+ 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \#$$

定理 3　设$(X,\|\ \|)$是向量空间 X上的模空间.则$(X,\|\ \|)$可由 X 的某个内积空间$(X,\langle,\rangle)$ 导出$\Longleftrightarrow(X,\|\ \|)$的模$\|\ \|$满足平行四边形法则(参看图 1):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

证明　$(\Rightarrow)$　$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$+\langle x-y, x-y\rangle = (\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)$$
$$+(\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$(\Leftarrow)$　令$\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

(1°) 特别当 $y=x$ 时,$\langle x,x\rangle = \|x\|^2$,因此由定义 2 中的条件(1°)推出定义 1 中的条件(1°).

(2°) $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=\frac{1}{4}(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2)=\langle y,x\rangle$.

(3°) $$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)$$

$$+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$

$$=\frac{1}{8}(2\|x+z\|^2+2\|y+z\|^2)$$

$$-\frac{1}{8}(2\|x-z\|^2+2\|y-z\|^2)$$

$$=\frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2)$$

$$-\frac{1}{8}(\|x+y-2z\|^2+\|x-y\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle,$$

特别地当 $y=0$ 时，有

$$\langle 0,z\rangle=\frac{1}{4}(\|0+z\|^2-\|0-z\|^2)=0,$$

$$\langle x,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle 0,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+0,2z\rangle=\frac{1}{2}\langle x,2z\rangle,$$

于是

$$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle=\langle x+y,z\rangle.$$

由上式可以得到

$$\langle x,y\rangle+\langle -x,y\rangle=\langle x-x,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0,$$

$$\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle,$$

$$2\langle x,y\rangle=\langle x+x,y\rangle=\langle 2x,y\rangle,$$

$$n\langle x,y\rangle=\langle nx,y\rangle,$$

$$n\left\langle \frac{m}{n}x, y \right\rangle = \left\langle n\cdot\frac{m}{n}x, y \right\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle,$$

$$\frac{m}{n}\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{m}{n}x, y \right\rangle \quad (m=0,1,2,\cdots; n=1,2,\cdots).$$

因此，当 λ 是有理数时有 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

最后，当 λ 为任何实数时，取有理数 $\lambda_n \to \lambda(n\to+\infty)$，则有

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle \lambda_n x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\lambda_n\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

(其中第一个等式留作习题). #

2. 度量(距离)空间 (X,ρ)

定义 3 设 X 是一个集合，如果映射

$$\rho: X\times X \to R,$$

$$(x,y)\to\rho(x,y)$$

满足：

(1°) $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$;

(2°) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (对称性)；

(3°) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ (三角形不等式).

则称 (X,ρ) 为**度量(或距离)空间**，ρ 称为 X 上的**度量(或距离)函数**. $\rho(x,y)$ 称为点 x 和 y 之间的**距离**.

定理 4 设 $(X,\|\ \|)$ 是模空间，令

$$\rho: X\times X\to R,$$

$$(x,y)\to\rho(x,y)=\|x-y\|,$$

则 (X,ρ) 是一个度量空间.

证明 (1°) 显然 $\rho(x,y)=\|x-y\|\geqslant 0$，且

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=0\Longleftrightarrow x-y=0\Longleftrightarrow x=y.$$

(2°) $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|y-x\|=\rho(y,x)$.

(3°) $\rho(x,z)=\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$

$$=\rho(x,y)+\rho(y,z). \quad \#$$

注 如果给出了内积空间$(X,\langle,\rangle)$，由它可诱导出模空间$(X,\|\ \|)$和度量空间(X,ρ).

3．完备度量空间和压缩映象原理

定义 4 设(X,ρ)为度量空间，$x_n,x\in X$，如果
$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n,x)=0,$$
换句话说，任给$\varepsilon>0$，存在N(自然数)，当$n>N$时，有
$$\rho(x_n,x)<\varepsilon,$$
则称点列$\{x_n\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$**收敛**于$x$，记为
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x(\text{或 }x_n\to x(n\to+\infty)).$$
而x称为$\{x_n\}$的**极限点**.

定义 5 设(X,ρ)为度量空间，$x_n\in X$，如果对任何$\varepsilon>0$，存在N(自然数)，当$n,m>N$时，有
$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon,$$
则称点列$\{x_n\}$为 **Cauchy 点列**或**基本点列**.

如果X中的所有 Cauchy 点列都收敛，则称(X,ρ)为**完备度量空间**.

定理 5 收敛点列必为Cauchy点列，但反之不真.

证明 设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 则当$n,m>N$时，有
$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
这就证明了$\{x_n\}$是 Cauchy 点列.

反之不真可参看例 3. #

定义 6 设(X,ρ)为度量空间，
$$f:\ X\to X$$
是一个映射，如果存在数c，$0<c<1$，使得对所有$x,y\in X$，有

$$\rho(f(x), f(y))\leqslant c\rho(x, y),$$

则称 f 为 X 到 X 的一个**压缩映射**.

定理 6(压缩映象原理) 设 (X, ρ) 为完备度量空间, f 是 X 到 X 的压缩映射, 则必存在 f 的唯一的一个**不动点** $x\in X$, 即 $f(x)=x$.

证明 (存在性) 任取 $x_0\in X$, 并递推定义 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad n=0,1,2,\cdots.$$

选择 $c, 0<c<1$, 使 $\rho(f(x), f(y))\leqslant c\rho(x, y)$. 则我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n)=\rho(f(x_n), \quad f(x_{n-1}))\leqslant c\rho(x_n, x_{n-1}).$$

因此, 由归纳法可得

$$\rho(x_{n+1}, x_n)\leqslant c^n\rho(x_1, x_0) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

如果 $n<m$, 我们得到

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant \sum_{i=n+1}^{m}\rho(x_i, \ x_{i-1})\leqslant \sum_{i=n+1}^{m}c^{i-1}\rho(x_1, x_0)$$

$$\leqslant\frac{c^n}{1-c}\rho(x_1, x_0).$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列. 因为 (X, ρ) 是完备的, 所以存在 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$.

由于 f 是压缩映射, f 是连续的(事实上是一致连续的. 它们的定义与数学分析中定义相类似), 因此,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}=x.$$

(唯一性) 如果 $f(x)=x, f(y)=y$, 则

$$\rho(x, y)=\rho(f(x), f(y))\leqslant c\rho(x, y),$$

$$0\leqslant(1-c)\rho(x, y)\leqslant 0,$$

$$\rho(x, y)=0, \text{即 } x=y. \quad \#$$

4. 具体例子

例 1 设 (X, ρ) 为度量空间, $A\subset X$, 如果令 $\rho_A=\rho|_{A\times A}$, 即

$$\rho_A:\ A\times A\to R,$$
$$(x,y)\to\rho_A(x,y)=\rho(x,y).$$

显然,(A,ρ_A) 也是度量空间.称为(X,ρ) 的**子度量空间**,有时仍将ρ_A 记为 ρ.

例 2 设(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)都是度量空间. 令

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\},$$
$$\rho:\ (X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)\to R,$$
$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\to\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$
$$=[\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证$(X_1\times X_2,\rho)$也是一个度量空间, 称为(X_1,ρ_1)与(X_2,ρ_2)的**积度量空间**,记作$(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$. 类似地可以得到$(X_1\times\cdots\times X_n,\rho_1\times\cdots\times\rho_n)$.

例 3 ***n* 维 Euclid 空间**

$$R^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in R\},$$
$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$
$$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

特别当 $n=1$ 时,$\rho(x,y)=|x-y|$(模即绝对值).容易验证$(R^n,\langle,\rangle)$是内积空间. (R^n,ρ)是完备的.

R^2 中的子集 $R^2-\{0\}$作为 R^2 的子度量空间不是完备的.

§1 习 题

1. 证明定理 3 中的$\langle\lambda x,y\rangle=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle\lambda_n x,y\rangle$.

2. (1°) 验证例 1 中的(A,ρ_A)是度量空间.

(2°) 验证例 2 中的$(X_1\times X_2,\rho)=(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$是度量空间.

(3°) 验证例 3 中的$(R^n,\langle,\rangle)$是内积空间和(R^n,ρ)是完备的，并验证$R^2-\{0\}$作为R^2的子度量空间不是完备的.

3. 设X是任意集合,令

$$\rho:\ X\times X\to R,$$

$$(x,y)\to\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

则(X,ρ)是一个度量空间,称为离散度量空间.

4. 设(X,ρ)为度量空间. 定义

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$

$$\rho_2(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), & \text{当}\rho(x,y)\leqslant 1,\\ 1 & ,\text{当}\rho(x,y)>1.\end{cases}$$

则(X,ρ_1)和(X,ρ_2)都是度量空间. 并且它们都是有界的(即$\rho_i(x,y)\leqslant$常数,$i=1,2$).

5. 完备的内积空间$(X,\langle,\rangle)$称为 **Hilbert空间(或广义的 Euclid 空间)**.

设$X=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_n\in R,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n^2<+\infty\right\}$,

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in X.$$

定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty}x_ny_n,$$

则$(X,\langle,\rangle)$是 Hilbert 空间.

6. 完备的模空间$(X,\|\ \|)$称为 **Banach 空间**.

显然 Hilbert 空间一定是 Banach 空间.

验证 (1°)例 3 中的$(R^n,\langle,\rangle)$是 Hilbert 空间.

(2°) 设$(R^n,\|\ \|)$,$\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$,则它是 Banach 空间.

(3°) 设$(R^n, \| \ \|)$，$\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$，$\rho(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{|x_i - y_i|\}$，则它是 Banach 空间。

7. 证明：对题 5 中任何 $x, y \in X$，必有一"中点"z，即 z 满足

$$\rho(x,z) = \rho(y,z) = \frac{1}{2}\rho(x,y).$$

但一般度量空间不必有此性质，试用 Euclid 平面的一个子度量空间为例来说明它。

8. 一些函数空间：

(1°)（在讨论函数的逼近或一致收敛时用）

设 $X = \{x(t) \mid x(t)$在$[a,b]$上连续$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{a\leq t\leq b}|x(t) - y(t)|.$$

证明 (X, ρ)为度量空间。

(2°)（在变分法与微分方程的稳定性理论中用）

设 $X = \{x(t) \mid x(t)$在$[a,b]$上 k 次连续可导$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{k}\max_{a\leq t\leq b}|x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|$$

或定义 $\rho(x(t), y(t)) = \max\limits_{a\leq t\leq b}\{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \cdots, |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\}$.

证明 (X, ρ)为度量空间.

(3°)（在积分方程中用）

设 $X = \{x(t) \mid x(t)$在$[a,b]$上连续$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

$$\|x(t)\| = \left[\int_a^b x^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \left[\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 $(X, \langle,\rangle)$是内积空间，指出 X 是无限维向量空间，写出相应的 Schwarz 不等式。(X, ρ)是完备度量空间吗？

9. 设(X_n, ρ_n) $(n = 1, 2, \cdots)$为度量空间，令直积空间