微积分

上海机床厂七·二一工人大学 编

机械工业出版社

微　积　分

上海机床厂七·二一工人大学 编

机械工业出版社

微　积　分
上海机床厂七·二一工人大学 编
*
机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
民族印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32·印张 9 1/2·字数 250 千字
1980 年 1 月北京第一版·1980 年 1 月北京第一次印刷
印数 000,001—130,000·定价 1.05 元
*
统一书号: 15033·4593

目　录

引　言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门学科。它随着社会生产的发展而不断充实完善起来。十七世纪以前，由于生产规模的限制，数学处在初等数学阶段，主要是研究相对不变的量和图形。此后，由于机器制造、建筑、航海等事业的发展，给数学提出了许多新的问题，如计算变速直线运动的速度、不规则图形的面积等，这些问题用初等数学是难以解决的。因而数学从以研究常量为主的初等数学，发展到以研究反映客观事物运动、变化过程的变量为主的高等数学，微积分是高等数学的一个部分。由初等数学发展到高等数学，这是数学史上的一个飞跃。恩格斯曾指出："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生"。㊀

微积分究竟是解决什么问题呢？在处理问题的方法上和初等数学有什么区别呢？下面分析两个典型实例，以便在学习微积分前对它有个大致的了解。

一、求变速直线运动的速度

图1为一种碎铁设备，落锤从高处自由下落可以把铁块砸碎。落锤砸碎铁块的能力与它的动量 $p=mv$ 有关，其中 m 为落锤的质量，v 为落锤的速度。由于落锤的质量是已知的，因此要知道它的动量，就要算出落锤与铁块碰撞时的速度。落锤是作自由落体运动的，这个问题就归结为求自由落体在某一时刻的速度（即瞬时速度）。

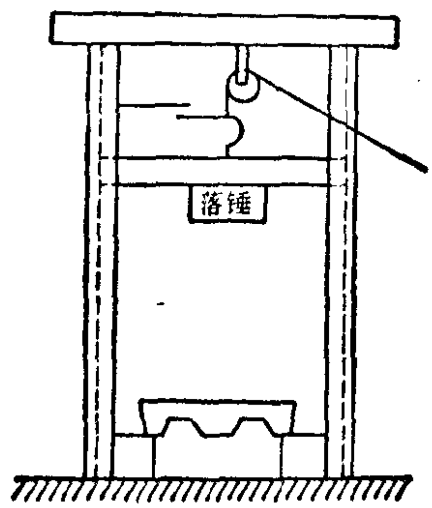

图　1

㊀ 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 236 页。

由物理学知道，自由落体下落的路程 s 与时间 t 的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度，下面求时刻 $t=1$ 秒时的瞬时速度 v。

解 (1) 分析矛盾

物体作等速直线运动时，它的速度始终是不变的，并可用初等数学的方法求出，即

$$速度=\frac{路程}{时间}。$$

物体作自由落体运动时，它的速度是不断地变化的，这从下表可以看出：

时间 t (秒)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
路程 $s=\frac{1}{2}gt^2$(米)	0	0.196	0.784	1.764	3.136	4.9

从 $t=0$ 秒到 $t=0.2$ 秒，物体下落的路程是：

$$0.196-0=0.196(米);$$

从 $t=0.2$ 秒到 $t=0.4$ 秒，物体下落的路程是：

$$0.784-0.196=0.588(米);$$

从 $t=0.4$ 秒到 $t=0.6$ 秒，物体下落的路程是：

$$1.764-0.784=0.98(米);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

由此可知，物体在相等的时间 (0.2 秒) 内下落的路程是不相等的，也就是说，下落的速度时刻在变化，而且是愈落愈快。如果利用上面求速度的公式，只能求出落体在一段时间内速度的平均值，即平均速度，而不是某一时刻的瞬时速度。这样，用初等数学求变速运动的速度时，就遇到了速度"变"与"不变"的矛盾。

(2) 解决矛盾

求落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度，不能孤立地考察 $t=1$ 秒这

一瞬时，必须从 $t=1$ 秒这一瞬时前后的运动过程中去考察。

自由落体运动的速度虽然时刻在变化，但在很短的一段时间内，它的变化一般是不大的，可以近似地看作不变，这段时间越短，近似的程度就越好。这样，在一段很短的时间内，可以用等速运动近似代替变速运动。

根据上述方法，求 $t=1$ 秒这个时刻的瞬时速度时，先考察从 $t=1$ 秒到 $t=1.01$ 秒这段时间的运动情况。由于这段时间很短，可以把变速运动近似地看作等速运动，这时落体的平均速度

$$\bar{v}_1=\frac{\frac{1}{2}g(1.01)^2-\frac{1}{2}g(1)^2}{1.01-1}=9.849(\text{米/秒}),$$

就是 $t=1$ 秒时的瞬时速度的近似值。

再考察从 $t=1$ 秒到 $t=1.001$ 秒这段时间的运动情况。由于这段时间更短了，落体速度的变化也就更小了，它的平均速度

$$\bar{v}_2=\frac{\frac{1}{2}g(1.001)^2-\frac{1}{2}g(1)^2}{1.001-1}=9.8049(\text{米/秒}),$$

就更比 $\bar{v}_1$ 接近于在 $t=1$ 秒这个时刻的瞬时速度。

一般地，落体从 $t=1$ 秒到 $t=1+\Delta t$（Δt 表示很小一段时间）秒这段时间的平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g(1)^2}{(1+\Delta t)-1}\\&=\frac{\frac{1}{2}g(1+\Delta t-1)(1+\Delta t+1)}{1+\Delta t-1}\\&=9.8+4.9(\Delta t),\end{aligned}$$

无论 Δt 这段时间取得如何短，它都不是 $t=1$ 秒这个时刻的瞬时速度，而只是 Δt 这段时间的平均速度。只有当 Δt 无限变小最终消失为 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 才从量变达到质变，从而转化为瞬时速度 v。因此，在求瞬时速度的时候，要从 Δt 无限变小的变化过程中，考

察平均速度的变化趋势及其转化的结果。

由上式可知，当 Δt 无限变小最终消失为 0 时，上式左边的平均速度 $\bar{v}$ 转化为瞬时速度 v，右边 $9.8+4.9(\Delta t)$ 就无限趋近并最终转化为精确值 9.8。这个结果就是自由落体在 $t=1$ 秒这个时刻的瞬时速度，即

$$v=9.8(\text{米/秒})。$$

以上求变速直线运动的瞬时速度，就是微分学所要解决的一类典型问题，它在处理方法上可归纳如下：

第一步：在所求时刻附近很短的一段时间 Δt 内，对速度以“不变代变”的方法，求出瞬时速度的近似值——平均速度。

第二步：让 Δt 无限变小最终消失为 0，用“无限趋近”的转化方法，使近似值最终转化为精确值，平均速度也就最终转化为所求时刻的瞬时速度。

二、求曲边形的面积

在生产实践中，常遇到求由曲线所围成的平面图形的面积。例如在计算图 2 所示的椭圆柱贮油筒容积时，需要知道椭圆形横截面面积，关于它的计算将在第三章里介绍。为了说明问题方便起见，下面讨论一个简单的例子。

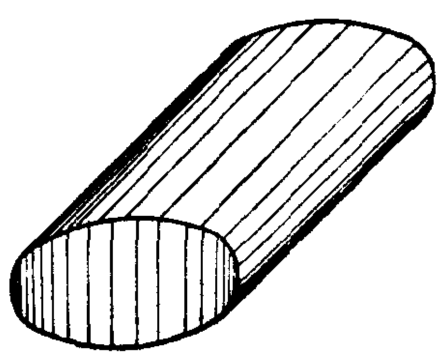

图 2

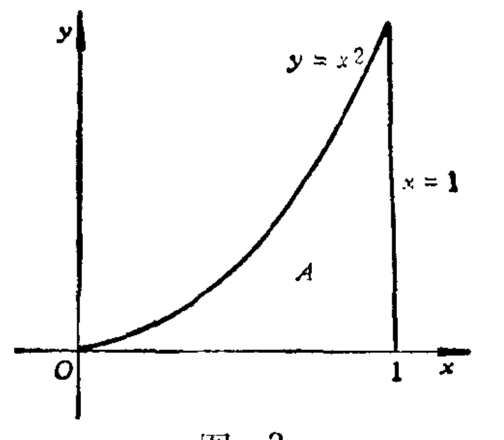

图 3

求由抛物线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 和 Ox 轴所围成的曲边形面积 A(图 3)。

解 (1) 分析矛盾

如果平面图形是矩形，它的底边上各点处的高度都不变，可用

初等数学的方法求矩形的面积，即

$$矩形面积 = 高 \times 底。$$

由于曲边形的一边是曲线，底边上各点处的高度是变化的(图4)，不能直接利用上面的公式求曲边形的面积。这样，用初等数学求矩形面积的方法求曲边形面积时，就遇到了高度"变"与"不变"的矛盾。

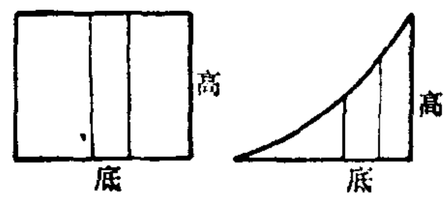

图 4

(2) 解决矛盾

从整体来看曲边形的底边上各点处的高度变化是很大的，但是从局部来看，底边任一小段上的高度变化是不大的，可以近似地看作不变。在图5中，x_i 为底边上的某一点，它对应的高度为 y_i，x_{i+1} 是 x_i 附近的另一点，它对应的高度为 y_{i+1}。如果 x_i 与 x_{i+1} 的距离很短，则它们对应的高度 y_i 与 y_{i+1} 变化不大，可以近似地看作不变，这段底边越短，近似的程度就越好。这样，在一段很短的底边上，就可以用矩形的面积以近似代替曲边形的面积。

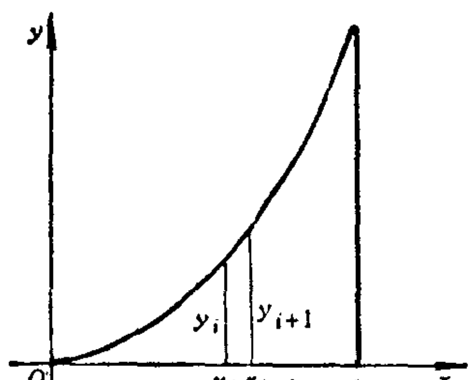

图 5

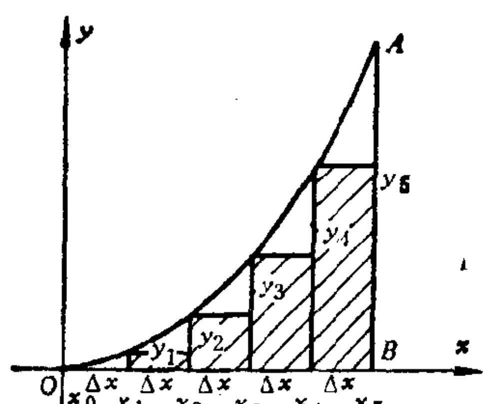

图 6

根据上述方法，先把曲边形 OAB 的底边 OB 分成五等分，每等分的长度记作 Δx, $\Delta x=\frac{1}{5}$，各分点的坐标(图6)分别为：

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{5},\ x_2=\frac{2}{5},$$

$$x_3=\frac{3}{5},\ x_4=\frac{4}{5},\ x_5=\frac{5}{5}=1,$$

曲边形 OAB 被相应地分成五个小曲边形。由于每个小曲边形的高度变化不大，如果都用左端点的高度近似代替该小曲边形的高度，那末如图 6 阴影部分所示的五个小矩形面积的和 A_5，就可作为曲边形 OAB 面积 A 的近似值。为此，把各分点的坐标值分别代入 $y=x^2$，便得出每个小矩形的高度，即

$$y_0=0,\ y_1=\left(\frac{1}{5}\right)^2,\ y_2=\left(\frac{2}{5}\right)^2,\ y_3=\left(\frac{3}{5}\right)^2,\ y_4=\left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

这五个小矩形面积的和

$$\begin{aligned}A_5&=y_0\Delta x+y_1\Delta x+y_2\Delta x+y_3\Delta x+y_4\Delta x\\&=0\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{5^3}(1^2+2^2+3^2+4^2)=0.24,\end{aligned}$$

就是曲边形 OAB 面积的近似值。

再把曲边形 OAB 的底边分成十等分（图 7），每等分的长度 $\Delta x=\dfrac{1}{10}$。由于 Δx 变小了，每个小曲边形的高度变化也更小了。在图 7 中，相应的十个小矩形面积之和（阴影部分），也可用上述计算方法，得到：

$$A_{10}=\frac{1}{10^3}(1^2+2^2+\cdots+9^2)=0.285,$$

它比 $A_5(0.24)$ 更接近曲边形 OAB 的面积。

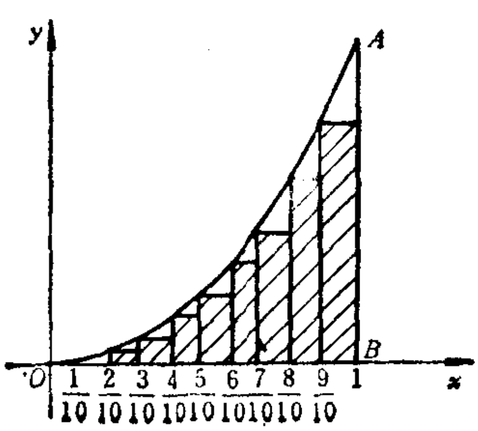

图 7

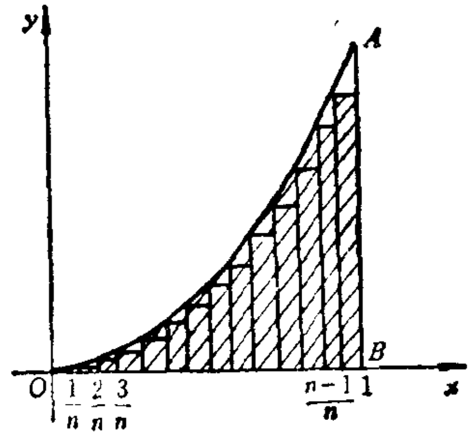

图 8

如把曲边形OAB的底边分成n等分(图8)，每等分的长度$\Delta x=\frac{1}{n}$，则相应的n个小矩形面积之和(图8中阴影部分)

$$A_n=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)㊀$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),$$

无论n为多大，Δx都没有到达0，A_n终究还是曲边形OAB面积A的近似值。只有当n无限增大，即Δx无限变小到达0时，n个小矩形的面积之和A_n才从量变达到质变，从而转化为曲边形OAB的面积精确值A。因此，在求曲边形面积A的时候，要从n无限增大的变化过程中，考察n个小矩形面积之和A_n的变化趋势及其转化的结果。

由上式可知，当n无限增大时，左式A_n转化为A，右式中$\frac{1}{n}$无限变小到0，于是$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$就无限趋近并最终转化为$\frac{1}{3}$。这个结果就是曲边形$OAB$面积的精确值，即

$$A=\frac{1}{3}。$$

以上求曲边形的面积，就是积分学的一类典型问题，它在处理方法上可归纳如下：

第一步："化整为零"，把整个曲边形分成n个小曲边形，并对高度以"不变代变"的方法求出小曲边形面积的近似值——小矩形的面积。

第二步："积零为整"，把小曲边形面积的近似值相加，得到整个曲边形面积的近似值。然后让分割的份数n无限增大，即底边的长度Δx无限变小到0，用"无限趋近"的转化方法，使整个曲边形面积的近似值转化为精确值。

㊀ 具体推导过程见引言后面。

通过以上两个实例，可以看出微分学与积分学的共同点，它们都是要解决"变与不变"、"近似与精确"这对矛盾。这对于初等数学来说是难以解决的，因为在这两个问题中都遇到了变化的量。变量和函数(即变量之间的依赖关系)，从数量关系上反映了客观世界的运动和变化，它是微积分研究的对象。在解决矛盾的过程中，用到了"无限趋近"的转化方法，这就是"取极限"的方法，它是解决微积分问题的一个重要方法。因此，首先在第一章中介绍函数和极限。

另外，微分学与积分学又有不同点。从第一个问题来看，微分学研究的是变化的量在局部(瞬间)上的性质；而从第二个问题来看，积分学研究的是变化的量在整体上的性质。由于整体上的性质不能脱离局部而独立，整体是由它的一切局部所构成，所以微分学与积分学不但有区别，而且有联系。这是第二章和第三章所研究的内容。

微积分来源于生产实践，在它的基本分析方法中贯穿着丰富的辩证法思想，学习微积分时必须坚持辩证唯物主义观点，发扬理论联系实际的学风，就一定能够学好微积分，运用它更好地为社会主义建设服务。

关于$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$的证明。

(1) 先证明$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

设 $S_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$，

或写成 $S_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$，

两式对应相加，得

$$2S_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{\text{共 } n \text{ 项}},$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(n+1)}{2}。$$

(2) 再证明$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$。

利用恒等式$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$，得

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,\\ n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ 3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\ 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1,\end{array}\right\}\text{共 } n \text{ 个等式}$$

把这 n 个等式两边相加，得

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n,$$

由于

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

代入上式，得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n,$$

整理后，得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

把上式中的 n 换成 $n-1$，所以

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)。$$

第一章　函数和极限

在引言里已经提到，变量和函数从数量关系上反映了客观世界的运动和变化，它是微积分研究的对象，而极限法是解决微积分问题的一个重要方法。因此，本章将系统地阐述函数的概念并讨论常见的几种基本初等函数的图形，然后介绍极限概念。这些都是学习微积分的基础知识。

第一节　变量和函数

一、变量、区间

1．常量和变量

客观世界没有什么事物是不包含矛盾的。事物由于内部矛盾的存在，总是处在不断地变化和运动之中。要了解客观世界，只有从变化和运动中去考察，在考察某一自然现象或某一生产技术过程中，会遇到许多不同的量。

［例 1］　车削如图 1-1 所示的锥形工件，当转速 n 取定 400 转/分后，转速 n 是不变的量，锥形工件上各截面的直径 D 和切削速度 v 是变化的量。

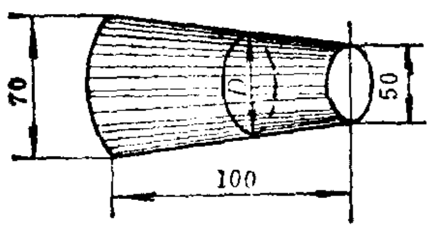

图　1-1

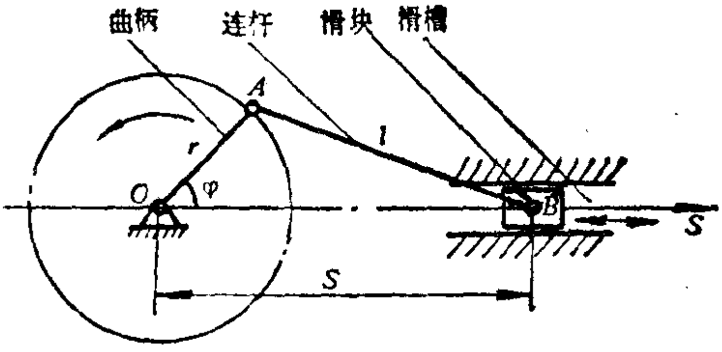

图　1-2

［例 2］　在图 1-2 所示的曲柄连杆机构中，当曲柄 OA 绕 O 轴旋转时，连杆 AB 使滑块 B 沿滑槽作往复直线运动。在运动过