现代数学研究丛书

主编 刘应明

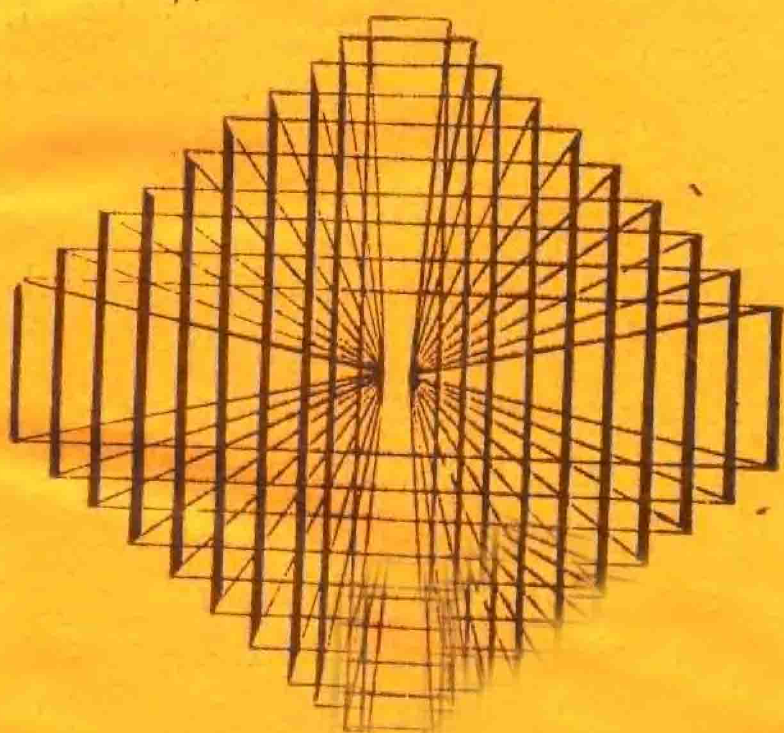
仿射微分几何

李安民　赵国松

[illegible]教育出版社

现代数学研究丛书

仿射微分几何



四川教育出版社

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵
版面设计：顾求实

现代数学研究丛书
仿射微分几何　　李安民　赵国松　著

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川科技出版社照排
四川省新华书店经销　成都金牛印刷厂印刷

开本850×1168毫米　1/32　印张7.375插页4 字数176千
1990年1月第一版　1990年1月第一次印刷
印数：1—720册

ISBN7—5408—1150—1/G·1121(精)定价：4.80元

● 主编 刘应明

● 副主编 杨 路 刘旺金 胡师度

● 李安民 赵国松 著

国家自然科学基金资助项目
国家教委博士点基金

序

李安民同志撰《仿射微分几何》，约我写几句话，很高兴有此机会。

仿射微分几何的创始人，当推德国数学家 Wilhelm Blaschke (1885—1962 年)(他是我的老师)。他的名著“微分几何”第二本，汇集了他和他的合作者关于仿射微分几何的研究成果，是一经世之作。50 年来，关于仿射微分几何的研究，还未能脱他的范围。他限于单模仿射群，眼光深远。

仿射超曲面的研究自然地引到 Monge-Ampère 方程。这个重要的非线性方程因此得到几何的意义，对于它的研究便有很大的帮助。首先对此有深刻的认识的是 E. Calabi(1958 年)。仿射球的研究是微分几何美妙的一章，对此作重要贡献的有 A. V. Pogorelov、丘成桐、郑绍远等。

仿射微分几何的问题还多，极大曲面是其中的一个。年来黎曼空间的极小流形和调和映射有蓬勃的发展。仿射情形因为基本方程是四级的，产生了严重的困难，但也给数学家一个挑战，它的进展需要创见和努力。

安民此书综合了仿射微分几何近年来的发展，是一项重要的贡献。

陈省身

1988 年 9 月于天津

前　言

仿射微分几何是微分几何的一个重要分支，它是由 W. Blaschke 和他的合作者们，按照克莱茵的几何分类思想，于本世纪 20 年代创立的。它主要研究仿射空间中非退化的超曲面在幺模仿射变换下的不变性质。我国著名数学家苏步青教授在 20 年代后期对仿射微分几何作出了重要贡献，他的主要成就总结在他最近的专著《仿射微分几何》(科学出版社，1982 年)一书中。

最近 30 年来，仿射微分几何取得了辉煌的成就，这主要表现在完成了对完备仿射球的分类，这个问题在欧氏空间的曲面论中是平凡的，而在仿射微分几何中则是非常深入、复杂的。E. Calabi、丘成桐、郑绍远、A. V. Pogorelov、T. Sasaki 等人在这方面作出了杰出的贡献。

本书的目的是向读者介绍仿射微分几何的基本理论以及最近 30 年来的重要进展，我们限于研究局部严格凸超曲面。在第一章中，我们用活动标架法建立了局部仿射微分几何的基本理论，这套表述方法本质上是陈省身教授首先引入仿射微分几何的。第二章介绍完备仿射球的分类。第三章研究由 Blaschke 度量、高阶仿射平均曲率、Blaschke 度量的黎曼曲率张量所决定的刚性和唯一性问题。第四章

研究仿射极大曲面，主要围绕着仿射伯恩斯坦问题展开讨论。第五章研究仿射等周不等式。

本书材料主要来源于陈省身、E. Calabi、丘成桐、郑绍远、T. Sasaki、U. Simon、R. Schneider、熊全治等人以及我本人的文章。我的一部分研究工作是我1986—1987年在西柏林技术大学(Technische Universität Berlin)访问期间，在洪堡基金(Alexander Von Humboldt-Stiftung)的资助下完成的，我想借此机会向洪堡基金会、西柏林技术大学数学系以及U. Simon教授表示衷心的感谢！

我在从事仿射微分几何研究以及撰写本书过程中，经常得到国际著名数学大师陈省身教授的热情帮助、鼓励和支持，他在百忙中还为本书写序。我想借此机会向陈省身教授表示衷心的感谢！我还非常感激我的导师吴光磊教授多年来的指导和培养。

本书是我和赵国松根据我1988年春季为四川大学数学系微分几何研究生讲授仿射微分几何的讲稿，作了较大的修改补充而成的。研究生们对讲稿提出了不少宝贵意见，余建辉同学还仔细阅读了大部份章节。本书得以问世，是由于四川教育出版社的大力支持，在此向他们一并表示感谢！

为了把众多的文献组织成一本书，作者对文献中的结果进行了改写，加了不少作者自己的看法和新的处理。由于作者水平有限，加之时间仓促，难免存在不妥和错误之处，恳切地希望读者批评指正。

李安民

1988年8月于成都

目　录

第一章　局部仿射微分几何的基本理论

§1 等积仿射变换群

1872 年克莱茵(F. Klein)在著名的爱尔兰根纲领(Erlangen Program)中把几何学归为研究在某种可递变换群下的不变量的学科。按照这种观点，普通欧氏空间的微分几何是研究曲线或曲面在运动群下的微分或积分不变量的学科。本书讨论的“仿射微分几何”则研究曲线或曲面在“等积仿射变换群”下的微分或积分不变量，因此也称为“等积仿射微分几何”(equiaffine differential geometry)。

我们用 A^n 表示 n 维实仿射空间。A^n 中没有内积的概念，因而长度、角度都是没有意义的。但是可以谈论“平行性”。A^n 中还有“有向体积”的概念。以 V 表示 A^n 中全体向量的集合①，它是一个 n 维实线性空间，因而可以赋予外代数结构。用 $\Lambda^k(V)$ 表示 V 的 k 次外矢量空间，它是形如 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k$ 的元素生成的线性空间，其中“$\wedge$”表示外积符号，$v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 V 中的向量。令

$$\Lambda(V)=\bigoplus_{p=0}^{n}\Lambda^p(V),$$

① 我们有时把向量也称为矢量。

它是实数域上的外代数。通常把$\wedge^0(V)$与实数域R等同。周知$\wedge^n(V)$是一维线性空间，任意取定其中一个非零元素η为基，则A^n中任意n个有序向量$v_1,v_2,\cdots,v_n$的外积是它的一个实数倍，即

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n=a\eta,\quad a\in R$$

而且a是唯一确定的。我们把a定义成这个有序向量组所确定的平行多面体的有向体积。如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$满足$\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_n=\eta$，则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$确定的有向体积为1。按不同的排列方式，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$能构成的外积有$n!$个，但这$n!$个中只有两个不同，偶排列对应$\eta$，奇排列对应$-\eta$。后者对应的有向体积为$-1$。这就是说，在指定$\eta$为$\wedge^n(V)$的基时，同时也就指定了$A^n$的一个定向和一个体积单位。若$\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_n=\eta$，把$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$取为$V$的有序基底，则$v_1,v_2,\cdots,v_n$确定的有向体积正好是以它们关于这个基底的分量为元素(按它们的排列顺序)构成的n阶行列式。以后我们把$v_1,v_2,\cdots,v_n$确定的有向体积a记为

$$a=[v_1,v_2,\cdots,v_n].$$

注意，$a=0$表示$v_1,v_2,\cdots,v_n$线性相关。

在以下讨论中，我们约定求和指标的取值范围为

$$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n.$$

在A^n中任取一点P作为原点，再任取n个线性无关的向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$，它们一起构成A^n的一个仿射标架，记为$\{P;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，或者$\{P;e_A\}$。A^n中的点x关于这个仿射标架的坐标记为$x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，位置矢量仍记为x，则

$$x=\sum_{A=1}^{n}x^Ae_A.$$

如果仿射标架$\{P;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$还满足

$$[e_1,e_2,\cdots,e_n]=1,$$

则称它为幺模仿射标架(*unimodular affine frame*)。

A^n 中的仿射变换是形如下式的非退化的线性变换

$$x'^A = \sum_{B=1}^{n} a_B^A x^B + c^A,\ A = 1,2,\cdots,n.$$

如果变换矩阵(a_B^A)满足

$$\det(a_B^A) = 1,$$

则称这个变换为等积仿射变换或者幺模仿射变换。显然有向体积在等积仿射变换下不变。全体等积仿射变换的集合按变换的乘法构成一个群,称为等积仿射变换群或幺模仿射变换群。它是一个$n(n+1)-1$维李群。它与 A^n 中全体幺模仿射标架的集合成一一对应。这容易从 A^n 中任意两个幺模仿射标架恰存在一个幺模仿射变换把一个变成另一个的事实知道,因此我们可以把等积仿射变换群与 A^n 中全体幺模仿射标架的集合等同起来。这样,A^n 中的幺模仿射标架依赖于 $n(n+1)-1$ 个参数,可以用参数 $u^1,u^2,\cdots,u^{n(n+1)-1}$ 把幺模仿射标架写成$\{P(u^1,u^2,\cdots,u^{n(n+1)-1});e_A(u^1,u^2,\cdots,u^{n(n+1)-1})\}$.

下面讨论 $\mathbf{A}^n$ 的结构方程,我们采用活动标架法叙述。不熟习外微分和活动标架法的读者,可以参看陈省身和陈维桓的书[Cher-C]。

考虑 A^n 中的幺模仿射标架$\{P;e_A\}$,让它作一无穷小移动,得到$\{P+dP;e_A+de_A\}$。无穷小矢量 dP 和 de_A 可以在标架$\{P;e_A\}$下表示出来。设

$$dP = \sum_{A=1}^{n} \omega^A e_A, \tag{1}$$

$$de_A = \sum_{B=1}^{n} \omega_A^B e_B, \quad A = 1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

其中 ω^A、ω_A^B 是 $du^1, du^2, \cdots, du^{n(n+1)-1}$ 的线性组合，称为等积仿射变换群的 Maurer—Cartan 形式，它们由下式确定：

$$\omega^A = [e_1, \cdots, e_{A-1}, dP, e_{A+1}, \cdots, e_n], \tag{3}$$

$$\omega_A^B = [e_1, \cdots, e_{B-1}, de_A, e_{B+1}, \cdots, e_n]。 \tag{4}$$

(1)和(2)通常称为标架的**运动方程**。外微分 $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = 1$，我们得到

$$\sum_{A=1}^{n} \omega_A^A = 0. \tag{5}$$

对(1)和(2)外微分(我们对向量的外微分是对其分量进行的)，由对函数两次外微分为零的事实，我们有

$$d^2P = 0, \quad d^2e_A = 0,$$

由此导出

$$d\omega^A = \sum_{B=1}^{n} \omega^B \wedge \omega_B^A, \tag{6}$$

$$d\omega_A^B = \sum_{C=1}^{n} \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \tag{7}$$

$$A, B = 1,2,\cdots,n.$$

(5)、(6)和(7)称为 A^n 的**结构方程**或等积仿射变换群的 **Maurer-Cartan 方程**。

§2 仿射空间的曲线

2.1 A^n 中的曲线的一般理论

在 A^n 中取一固定的幺模仿射标架$\{O;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$。为了记号简单清晰，在本节中 A^n 中点 x 关于这个标架的坐标用下标表示，即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。A^n 中的曲线表示为

$$x = x(t), \tag{1}$$

或者

$$x_1 = x_1(t),\quad x_2 = x_2(t),\quad \cdots,\quad x_n = x_n(t),\quad a < t < b, \tag{2}$$

式中函数都是 $n+1$ 阶连续可微的。我们规定按参数 t 增加的方向为曲线的正向。类似于欧氏空间的曲线可以取弧长参数，A^n 中的曲线也可以取一种特殊的参数，称为**仿射弧长参数**，现在导出它。我们用点或者加括号的数字表示关于参数 t 的各阶导数，如 $\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(k)}$ 等等。假定沿曲线 $x(t)$

$$[\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)}] \neq 0, \tag{3}$$

考虑以下的一次微分式

$$|[\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}}dt, \tag{4}$$

显然它与幺模仿射标架的选取无关。下面我们还要进一步证明它与参数的选取也无关。引入新参数 $s=s(t)$，其中 $s'(t)>0$。我们用撇号表示关于 s 的导数，有时为了区别起见，用 $x_i^{(k)}$ 和 $x_i^{(k)}$ 分别表示关于 t 和 s 的 k 阶导数。我们有

$$\dot{x} = x' \frac{ds}{dt},$$

$$\ddot{x} = x''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + x' \frac{d^2s}{dt^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_t^{(n)} = x_s^{(n)}\left(\frac{ds}{dt}\right)^n + (\text{包含 } x', x'', \cdots, x_s^{(n-1)} \text{ 的部份}).$$

容易算得

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x_t^{(n)}] = [x', x'', \cdots, x_s^{(n)}]\left(\frac{ds}{dt}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

或者

$$|[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x_t^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt = |[x', x'', \cdots, x_s^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} ds。$$

因此，(4)定义的微分式与参数的选取无关。

曲线 $x(t)$ 从 a 点算起的仿射弧长定义为

$$s = s(a,t) = \int_a^t |[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt, \tag{5}$$

由此得

$$ds = |[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt. \tag{6}$$

显然仿射弧长满足欧氏弧长类似的加法定理：

当 $t_1 < t_2 < t_3$ 时，有

$$s(t_1, t_2) + s(t_2, t_3) = s(t_1, t_3). \tag{7}$$

为了避免在公式中出现绝对值，我们假定

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}] > 0.$$

当 $n=3$ 时，这个条件表示曲线是正向挠转的。由于 $\frac{ds}{dt} > 0$，我们可以选择仿射弧长 s 作为新的参数，它除了 $s=0$ 的选取外是唯一确定的。以后用撇号表示关于仿射弧长 s 的导数。以弧长 s 作为新的

参数时,从(6)便有

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}] = 1. \tag{8}$$

沿着曲线$x(t)$取如下的标架场

$$e_1 = x', e_2 = x'', \cdots, e_n = x^{(n)},$$

由(8)知$\{x; e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是沿$x(t)$的幺模仿射标架场。关于这场标架我们有

$$e_1' = e_2,$$

$$e_2' = e_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_{n-1}' = e_n.$$

关于s导微(8),我们得到

$$[x', x'', \cdots, x^{(n-1)}, x^{(n+1)}] = 0$$

即

$$[e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e'_n] = 0.$$

由于$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$线性无关,因此$e'_n$可以由$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$线性表出。令

$$e'_n = -k_1 e_1 - k_2 e_2 - \cdots - k_{n-1} e_{n-1}, \tag{9}$$

即有

$$k_i = -[x', \cdots, x^{(i-1)}, x^{(n+1)}, x^{(i+1)}, \cdots, x^{(n)}], \tag{10}$$

$$i = 1, 2 \cdot \cdots, n-1.$$

我们把k_1、k_2、…、k_{n-1}称为曲线$x(t)$的**仿射曲率**。上面所取的沿曲线的幺模仿射标架场的微商可以写成

$$x' = e_1,$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{n-1} \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

曲线给定了以后，它的仿射曲率就唯一地确定了。反之，给定了 $n-1$ 个连续可微的函数 $k_1(s), k_2(s), \cdots, k_{n-1}(s)$，利用常微分方程组的解的存在性和唯一性定理不难证明，存在一条曲线 $x(s)$，它以所给的函数 $k_1(s), k_2(s), \cdots, k_{n-1}(s)$ 为仿射曲率，而且除了相差一个等积仿射变换外，这种曲线是唯一的。

注记 我们上面定义的仿射曲率，并不是曲线所决定的最低阶数微分不变量。$n=3$ 的情形请读者参看[Blas—2]或[Su]，但是这里定义的仿射曲率简单，容易计算。我们宁愿采取这种定义。

作为特例，我们考虑 A^2 中的曲线。这时，公式(11)化为

$$\begin{cases} x' = e_1, \\ e'_1 = e_2 \\ e'_2 = -ke_1. \end{cases} \tag{12}$$

公式(9)和(10)化为

$$x''' + kx' = 0, \tag{13}$$

$$k = -[x''', x''].$$

我们考虑 $k=$ 常数的曲线。分三种情况：

1) $k=0$。 方程(13)的一般解为