几何基础

[苏] A.B.波格列洛夫 著 裘光明 译

几 何 基 础

[苏] A.B.波格列洛夫 著
裘光明 译

高 等 教 育 出 版 社

本书是根据[苏]A. B. Погорелов 著《Основания Геометрии》(Москва《Hаука》, 1979)一书译出的，讲授与欧几里得几何、罗巴切夫斯基几何、仿射几何和射影几何的公理化结构有关的主要问题. 特别，在其中讨论了所说各种几何公理系统的独立性、无矛盾性和完备性的问题. 与此同时，它包含着关于罗巴切夫斯基几何、仿射几何和射影几何的重要实际内容. 叙述简单和有特点.

原书由苏联高等与中等专业教育部批准作为高等学校数学专业教学参考书.

本书可作为师范院校数学系的教学用书，也可供综合大学数学专业师生及中学教师参考.

几何基础

[苏] A.B. 波格列洛夫 著

裘光明 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4.25 字数 106 000

1988 年11月第 1 版 1988 年11月第 1 次印刷

印数 00 001—1 770

ISBN7-04-001985-X/O·722定价1.90元

第一版序

我曾多次在大学讲授几何基础一课，这就对课程各部分的讲法产生一系列设想. 这些设想对于写成这本参考书起了主要作用.

传统的几何基础课程，不算历史回顾部分，通常包含四个课题: 欧几里得几何的公理化结构，欧几里得几何公理的分析，罗巴切夫斯基几何，射影几何和其他几何.

为阐明关于欧几里得几何公理化结构的问题，对自己提出的任务是，从公理出发，展开由它们推得的结论体系，其内容要使中学几何课程的讲授成为完全无可非议的. 这里要实地做到严格确定线段和角的测量，证明关于简单图形的合同性的基本定理，导出对三角形的边和角的著名不等式，讨论三角形的相似和完成毕达哥拉斯定理.

虽然课程的这些部分是初等的，但要把它写到所说的规模仍需要大量的时间. 实际上事情大致就是这样. 最后，在确定直线上点的先后的自然顺序，以及对线段证明长度的存在性时，听讲者会变得如此的疑惑，以致一般说会开始怀疑用这种方式能否达到毕达哥拉斯定理. 这种疑惑经以后的讲授不仅不能消除，反而会更加强，因为讲课时间不足，通常仅能限于合同公理的极少的推论，而且还要过渡到与第五公设等价的各种命题的讨论.

我认为在这里事情可以用如下的方式作某种程度的改正.

第一，有必要换掉希尔伯特顺序公理，引入以点对的先后关系为基础的公理系统. 大家知道，这样的系统与希尔伯特公理系统等价，但是比它更简单，更接近于点在直线上位置的习惯表示，并可从它得出两三个简单推论，为关于引进线段和角的量度的问题

作准备.

第二,替换合同公理,需要引入运动公理. 在中学几何课本上的讲法正是以运动公理为基础的. 因为合同公理是以图形之间的关系为基础的，而图形之间的关系只能借助于运动才能设想，所以为了以后证明运动本身的存在而引进合同公理就未必合适.

第三,只需要写出戴德金连续公理,而不采用与它等价的康托尔公理和阿基米德公理.这个问题在实数理论中已经花了很多时间，学生已很熟悉了.

至于第五公设的等价命题，则必要的只是回顾它们的历史地位. 在确定了罗巴切夫斯基公理系统的完备性后，所有这些命题的等价性就成为显然的了.

这些想法尽管不算新鲜，却允许大大减少直接从公理得出的初始命题，使得能够在所说容量中实地展开初等几何而没有特别的困难. 由于注意到大量读者将来的职业是中学教师，不得不作如上的考虑.

课程的下一论题——初等几何公理的分析——以讨论初等几何公理系统的无矛盾性、独立性和完备性的问题作为其课题.

这里，首先必须清楚地写出在任何理论特别是几何学的公理化结构中产生的基本问题，并证明初等几何公理系统的无矛盾性和完备性. 至于说到独立性，则只要限于证明戴德金形式的连续公理和平行公理的独立性.在后一问题中优先利用克莱因解释.事情是这样，在这个解释中检验除运动公理外的所有公理实际上是显然的,而检验运动公理也可以十分简单地引用下列方法:以一种标准的方式把任意点引导到中心，然后利用绕绝对圆中心的欧几里得旋转和对其直径的镜面反射.

我们认为，关键在于要改变罗巴切夫斯基几何这个论题的讲法. 它的传统的讲法是从罗巴切夫斯基平行理论开始的. 这时

提出的课题不在于说明直线相互位置那种怪异的性质能从罗巴切夫斯基平行公理导出，而是要证明公理系统的完备性并引出罗巴切夫斯基平面的度量形式. 这个课题不是容易的，而且解决它在其实质部分通常会引向课程的所谓不必要的章节，它在讲授计划中是不予证明的.

所提课题的第二部分是在绝对几何范围内不利用任何关于平行线的假设而引入平面的线性元素，从它开始似乎更自然和更现代化. 这种做法不仅不是无指望的，而且是更简单、更经济的. 严格建立的罗巴切夫斯基几何公理体系的完备性和其所有实现的同构，使我们可以较为简单和不太困难地讲述罗巴切夫斯基几何的基本事实，而且在运用最适于此的解释时还包括平行理论.

在课程最后的论题——射影几何和其他几何中，基本的课题是射影几何的严格的公理化基础. 通常在讲授计划中还给出其他几何. 射影几何的基础按论题的内容说也是够大的. 用下列方式可对它的讲法作些简化.

第一，代替关于点对隔开的顺序公理，可以采用三点组排序的公理. 如果欧几里得几何的顺序公理通过点对的先后关系引入，这样做就特别合理，因为在这些公理系统中得到了继承性.

第二，在射影平面沿“无穷远直线”的典型的割开以后，可以立即着手构造向量的理论，这时极大地利用欧几里得几何的关联、顺序、连续和平行公理的推论，然后引入仿射坐标. 这时显得有可能避开重复欧几里得几何的对应部分，并沿有效途径确立仿射几何公理系统的完备性. 此外，向量理论的严格的几何基础也是非常有用的. 在确立了射影几何公理系统的完备性后，其基本事实可以在解析实现中得到.

在这本参考书中我们依照以上的设想.

课程结构的一般计划，以及一些证明的细节，我们主要从叶非莫夫著《高等几何学》中借用.

引　言

学过初等几何的人都知道．组成其内容的是从一些初始的假设(公理)经过有限次逻辑推理步骤而得到的关于几何图形的命题(定理).

由此产生三个问题，这是在几何基础中首先要讨论的.

1) 因为最初的假设——公理——也是关于几何图形的一些论断，所以要问从其中会不会有一些可以从另一些用逻辑推理方法得到；2)可否根据公理用逻辑论证方法得到两个彼此排斥的推论；3)可否补充新的公理，它不能从老的公理推得并且与它们没有矛盾.

在较近时期已得到了这些对几何学公理化结构重要的问题的解．其中最大的功绩属于罗巴切夫斯基．他发现了非欧几里得几何并依此确定了平行公理的独立性，这就开始了十九世纪优秀数学家们的大量有成果的研究，在他们的工作中所提到的问题在应用于初等几何时得到了完全的解决.

目　录

第一章　几何基础的历史概况

§1　欧几里得的《几何原本》

几何学作为经验科学古代在埃及联系着土地测量和水利灌溉就已达到很高的水平.

公元前一千年几何知识从埃及传到希腊，在希腊几何学的发展开始了新的阶段. 从公元前七世纪到三世纪，希腊几何学家用很多新的事实丰富了几何学，而且对它的严格的逻辑基础也采取了重要的步骤.

希腊几何学家在这时期几个世纪的工作由欧几里得(公元前330—275年)在他的著名著作《几何原本》中综合了并系统化了. 这部著作给出了人类第一次达到的几何学的严格逻辑结构. 在其中的叙述当时是如此地无可非难，以致于在《几何原本》产生后长达二千年时间中，它一直是学习几何学的唯一的指南.

《几何原本》包括十三卷，其中确实讲授几何学的是在第1—4卷和第6卷中讲平面几何，在第10—13卷中讲立体几何. 《几何原本》的其他各卷以几何学的语言讲算术.

《几何原本》的每一卷都从最先遇到的概念的定义开始. 例如在第一卷中给出23个定义. 特别说来有:

定义 1　点不可分.

定义 2　线有长而无宽.

定义 4　直线是这样的线，它对其所有的点有相同的位置关系.

在《几何原本》第一卷里，在定义之后是公设和公理，例如：

公设 I 从一个点到另一个点总可以作一条直线.

公设 V 每当一条直线与另外两条直线相交，与它们组成的同侧内角之和小于两个直角时，这两条直线相交于此和小于两个直角的一侧.

公理 I 与第三个量相等的两个量彼此相等.

公理 II 等量加等量其和相等.

公设和公理都是不加证明而采用的论断. 按什么原则把一些论断归于公设而把另一些归于公理，未加说明.

在公理之后是定理和作图问题，一般都叫做“命题”，按严格的顺序编排，使得每一个在后的命题的证明（或解）都以前面的命题为依据，下面是这些命题中的一个.

命题 4 如果在两个三角形中，一个的两条边等于另一个的两条边，而且夹在相等的边中的角也相等，则一个三角形的第三边等于另一个的第三边，于是这两个三角形全等，因而一个三角形的其余的角等于另一个的其余的角，即对着相等边的角也相等.

虽然欧几里得的《几何原本》长时期作为对比的样本，它在叙述上远没有达到现代严格性的水平. 在第一卷里给的几何对象的定义只是描述它们，并且很不完全. 例如直线的定义 4 不能使它与圆周区分，而任意的线的定义 2 中提到长和宽，而长和宽本身还需要定义.

然而不应该认为《几何原本》第一卷提出的全部定义都有缺点. 相反地，一系列的定义，其中包括圆周，三角形，直角，锐角，钝角，或者无可非议，或者包含不重要的、易于消除的缺点. 这时如果考虑到包含在有缺点的定义中的几何对象的性质在证明中并未用到，则这些定义可以忽略而对叙述并无损害.

至于公设和公理，则它们的阐述无可非议，它们所包含的论断

是必要的，并且成为在它们之后的证明的根据.

最后转到证明. 按照《几何原本》作者的意图，所有命题的证明归根结底应是依据公设和公理所定义的几何对象的性质. 然而对欧几里得证明的粗略认识就能使我们确信，在其中反复用到几何对象的这样的性质和它们间的关系，它们并未在公设或公理中说明过. 例如，在上面提过的命题 4 的证明中，欧几里得用到了运动，而在一系列其他证明中，用到了以语句"在中间"表达的点在直线上的相互位置的性质.

自然产生这样的问题，能否在欧几里得证明中消除这个缺陷，把它们换成别的只运用公设和公理的论证. 这个问题的答案不久以前得到了. 很明显，这只有在对欧几里得公设和公理系统作必要的补充后才能做到. 在第三章里我们还要回到这个问题上来.

§2 证明第五公设的尝试

上面所说的欧几里得《几何原本》的某些缺点在古希腊时代已曾被指出，因为有人作过改善《几何原本》的尝试. 当时提出过的主要课题是如何使欧几里得的公设和公理系统达到极小.

解决这个课题的自然的途径是这样，把公设和公理中的某些个从其余各个推导出来. 就是用这种方法从《几何原本》消除了说所有直角都相等的第四公设.

然而用这种方式消除第五公设的尝试却没有结果，虽然这个问题在长达两千年间被几何学家们所探讨. 第五公设的大量证明的典型错误是自觉或不自觉地利用了一些论断，它们并未明白地包含在其余的公设和公理中，也未能从它们得出.

例如下面的普罗克鲁斯(410—485)的证明:

给定:$\alpha+\beta<2d$(图 1). 要求证明，直线 g' 和 g'' 相交于一个点 C.

过点A引直线g'''平行于g'. 在直线g''上取点B，并从它引g'''的垂线. 因为当点B离A越远，它到g'''的距离无限地增大，而在平行线g'和g'''之间的距离不变，所以在g''上存在属于g'的点C，直线g'和g''相交于这个点.

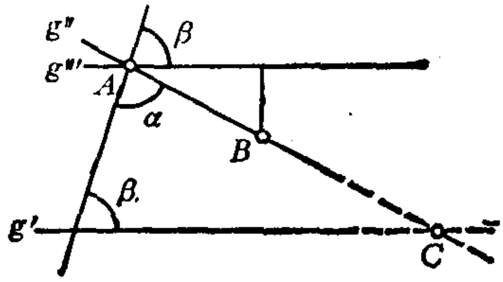

图 1

在这个证明中用到的平行线的性质并未明白地包含在其余的公设和公理中. 尤其是我们以后将会看到，这不能从它们得出.

存在着大量的其他论断，利用它们可以证明第五公设. 例如：

1. 一个锐角的一条边上的全体垂线都与另一条边相交.
2. 存在相似而不全等的三角形.
3. 存在随便怎样大的面积的三角形.
4. 存在内角之和等于两直角的三角形.
5. 过直线外的一个点最多能作一条与它平行的直线.

虽然证明第五公设的尝试没有得到期望的结果，它们总还是在几何学的发展中扮演了正面的角色，因为在一系列的情形都使它增添了新的有趣的定理，它们的证明没有用到第五公设. 由勒让德证明的一个这种定理说：

三角形内角之和不大于两直角.

这个定理在以后的叙述中要用到. 所以我们引出它的证明. 它基于两个引理.

引理 1 三角形的两个内角之和小于两直角.

引理 2 对每个三角形总可以作出有相同内角之和的新三角形，它的一个内角不大于已知三角形的指定内角的一半.

按照在证明中不利用第五公设的熟知定理，三角形的外角大于不相邻的内角. 所以，如果α和β是三角形的内角，而且α'是与

α 相邻的外角，则 $\beta<\alpha'$. 又因为 $\alpha+\alpha'=\pi$，所以 $\alpha+\beta<\pi$.

下面来证明第二个引理. 设 ABC 是任意三角形，而且 α, β, γ是它的角(图 2).

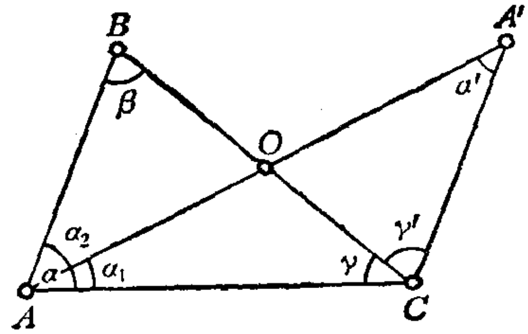

图 2

从顶点A引直线过边 BC 的中点O,而且在其上从O截取等于 AO 的线段 OA'. 从三角形 AOB 和 $A'OC$ 全等得出$\alpha'=\alpha_2$, $\beta=\gamma'$. 于是

$$\beta+\gamma+\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1+\alpha'+\gamma+\gamma'.$$

这里在等式左边是已知三角形 ABC 的内角之和，而在右边是三角形 $AA'C$ 的内角之和. 因为 $\alpha'=\alpha_2$，而 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，所以三角形 ACA'至少有一个内角 α'或 α_1 不大于 α 的一半.

现在不难证明勒让德定理了. 设一个三角形的内角之和$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\varepsilon(\varepsilon>0)$. 多次应用引理 2，我们可以作出三角形，其内角之和仍是 $\pi+\varepsilon$，而有一个角不大于 $\frac{\alpha}{2^n}$.

对于充分大的 n 我们有$\frac{\alpha}{2^n}<\varepsilon$，因此，这个三角形的另外两个角之和就要大于 π，而这就与第一个引理矛盾. 于是定理得证.

§3 非欧几里得几何的发现

十八世纪和十九世纪上半叶的很多几何学家所使用的一种有希望用于证明第五公设的方法如下.

把第五公设换成它的否定或与否定等价的某个论断. 运用按这种方式改变了的公设和公理系统，就象在《几何原本》中所做的那样，证明从它们用逻辑方法导出的所有可能的命题. 如果第五公设确实能从其余的公设和公理得出，则用所说方式改变了的公

理和公设系统应有矛盾，因而我们早晚会得到两个互相排斥的结论．这样就证明了第五公设．

想用这种方法证明第五公设的有萨凯里(1667—1733)，伦伯特(1728—1777)和勒让德(1752—1833)．

萨凯里(1733年)讨论了以两个直角作为底角并且有相等侧边的四边形(图 3)．

容易看出这个四边形的另外两个角是相等的，可以有三种假设：两个角都是直角，钝角或锐角．

萨凯里证明了直角假设等价于第五公设，即假定了它就可以证明第五公设，而且反之，采用第五公设能证明直角假设．作了钝角假设，萨凯里导出了矛盾，并且他最后还做了锐角假设．

在这时萨凯里得到与通常的几何设想的观点相违背的各种推论．例如：

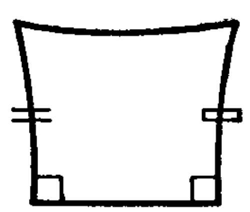

图 3

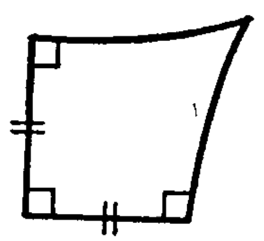

图 4

平行线或者只有一条公垂线，在它两侧无限制地远离，或者没有公垂线，并且在一个方向渐近地接近，在另一方向无限地远离．

萨凯里并没有只根据他得到了与直线位置的通常设想不相应的结论而归结为矛盾，并且坚持寻求逻辑的矛盾．这样的矛盾他终于“得到了”，然而是由于计算错误的结果．

伦伯特(1766年)讨论了类似的作图．他选取有三个直角的四边形(图 4)，并且与萨凯里相似，讨论了第四个顶点处的角的三种假设．伦伯特证明了，直角假设等价于第五公设，钝角假设不可能，

而作了锐角假设后，象萨凯里一样，得到了很多显示出直线位置的怪异性质的推论.

伦伯特也象萨凯里一样，没有在这里判断有矛盾. 他没有找到逻辑的矛盾，而且也没有否定锐角假设.

展开了锐角假设的推论系统后，伦伯特发现这个系统类似于球面上的几何学，并且发表了关于它的正确的命题，说"这个假设在某个虚球面上成立". 在十八世纪的几何学家中，伦伯特最接近于第五公设问题的正确解.

勒让德在他的第五公设的"证明"中讨论了关于三角形的内角和的三种假设：

1. 三角形的内角和等于两直角.
2. 三角形的内角和大于两直角.
3. 三角形的内角和小于两直角.

勒让德证明了，第一个假设等价于第五公设；第二个假设不可能（§2）；最后，采用第三个假设也引出了矛盾，在第五公设的证明中他隐蔽地用到了一个与它等价的论断.

伟大的俄国数学家罗巴切夫斯基(1792—1856)最初也曾尝试证明第五公设. 发现新几何——罗巴切夫斯基几何的光荣是属于他的.

在上面说过(§2)，第五公设的一个等价论断是：通过已知直线外一个点最多只能引一条平行线，罗巴切夫斯基把第五公设换成：

在平面上通过直线外的一个点，可以引两条直线不与已知直线相交.

象先驱者那样，罗巴切夫斯基期望在这样改变了的欧几里得系统的推论系统中发现矛盾. 然而，在把自己的系统展开到《几何原本》那样的容量后，罗巴切夫斯基未在其中发现矛盾，并且在此基础上作出了存在与欧几里得几何不同的、在其中第五公设不成

立的几何的著名结论. 这是在 1826 年.

初看起来可以认为罗巴切夫斯基的结论没有充分根据. 事实上,那里保证了把这个系统展开到很远,最后也没有引出矛盾. 而这个疑问对欧几里得几何也是同样的,因为从逻辑无矛盾的观点看,两种几何处在同等的位置. 其次,如同罗巴切夫斯基以后的几何学家们的研究所显示的,在这两个几何中存在密切的联系,而且一个几何的逻辑无矛盾性是与另一个的无矛盾性相关的.

因此,欧几里得和罗巴切夫斯基这两种几何是平等的逻辑系统. 至于这两种几何中谁更好地反映了环绕我们的宇宙的空间关系问题,只能通过实验来解决. 这在罗巴切夫斯基自己也理解,他为此目的进行了天文三角形的内角和的测量.

罗巴切夫斯基是第一个但不是唯一的几何学家得出存在着几何不同于欧几里得几何的结论.

得出存在新几何的结论的还有高斯(1777—1855),他在写给同时代人的书信中证明了自己的论述.

在罗巴切夫斯基的光辉工作发表了三年以后,匈牙利数学家雅诺什·鲍来伊(1802—1860)在不知道罗巴切夫斯基研究的情况下发表了他的工作,在其中叙述了与罗巴切夫斯基相同的理论,只是开展得少一些.

§4 十九世纪后半叶关于几何基础的工作

罗巴切夫斯基的同代人中理解和承认他所作出的发现的人不多. 多数人,包括很多重要的数学家,对他持怀疑态度.

罗巴切夫斯基之后的几何学家们的工作极大程度地促进了对罗巴切夫斯基几何的普遍承认. 在这些工作中首先必须提到贝尔特拉米(1835—1900)的工作. 贝尔特拉米(1862年)证明了,在常数负曲率曲面上罗巴切夫斯基平面几何成立,只要把测地线看作直