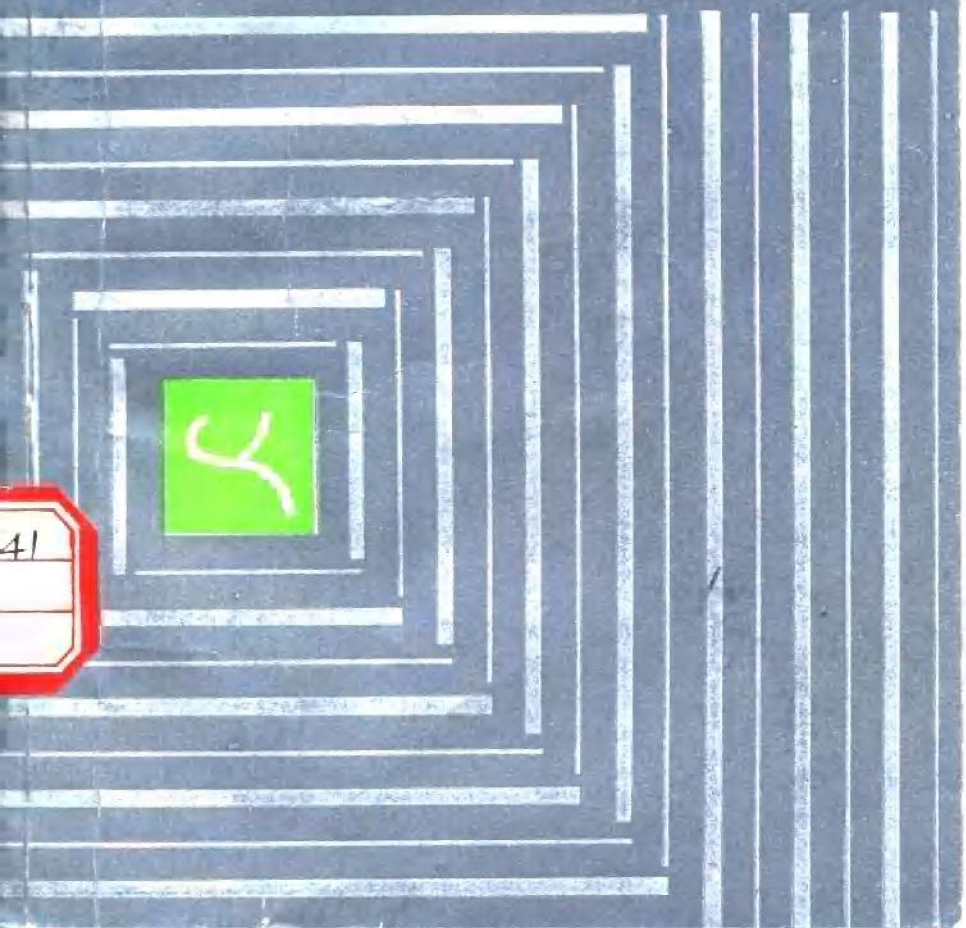
函数逼近论

HANSHU BIJINLUN G.G.洛伦茨 著 谢庭藩 施咸亮 译



函 数 逼 近 论

G. G. 洛伦茨 著
谢庭藩 施咸亮 译

上海科学技术出版社

APPROXIMATION OF FUNCTIONS

G. G. Lorentz

Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1966

函 数 逼 近 论

G. G. 洛伦茨　著

谢庭藩　施咸亮　译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行　江苏溧水印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 7.75　字数 168,000
1981 年 5 月第 1 版　1981 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—11,000

书号: 13119·914　　定价: (科四) 0.73 元

内 容 提 要

本书简明扼要地介绍了实函数逼近论中最重要的基础知识、研究方法和结果。前三章是实函数逼近论的基础知识，是为本书主题"逼近阶的研究"作准备的。第四至六章讨论了与逼近阶有关的各种问题。这些内容是本书的主题。在第十一章中，作为熵的概念的应用，介绍了多元函数用单元函数迭加表示的问题。全书深入浅出，并在每章的附记中介绍了某些与正文有关的重要论题和进一步的发展。

本书可供函数论、计算数学等专业的高年级大学生或研究生作教材或参考书，也可供有关研究人员参考。

译 者 序

为了给研究生讨论班作教材，我们在许多讲述函数逼近理论的书籍中选择翻译了 G. G. Lorentz 教授所著《函数逼近论》. Lorentz 是当今国际上比较著名的逼近论方面的学者，发表过许多论文. 本书很多题材都取自他本人的工作.

我们选择这本书，诚如作者在前言中所指出的，是由于它既简明扼要，但却相当完整. 它立足于逼近论中最基本的知识，但却以近代的泛函分析观点统贯全书. 因此，我们认为这本书作为函数逼近论的入门教材是非常合适的.

G. G. Lorentz 教授闻知本书中译本出版，感到非常高兴，来信表示：期望本书能有助于逼近论或数学其他分支新生力量的培养.

在整理本书译稿的过程中，曾得到王美琴、翁祖荫和骆程同志的协助，特此致谢.

译者

序　言

我的意图是想写一本函数逼近论的通俗读物．它既简明扼要，但又完整地阐述该理论的主要结果，还包括一些最新成就．有时(例如，第七章中的饱和类)，也可能只论述某领域内少数有代表性的定理．本书的主题是逼近阶．仅第二章(Chebyshev 定理和有关结果)、第三章(辅助结果和记号)以及第十一章与这一主题无关．第十一章中介绍了熵的某些应用，其重要性可从 Kolmogorov 定理见到．

除少数几节外，讨论的都是实变函数．Runge、Bernstein、Walsh、Mergeljan、Dzjadyk 以及其他作者在复领域内的重要结果均未列入本书范围．

本书既可作研究生或大学高年级学生的教科书，也可供自学用．每章末尾的附记，陈述了正文中未作讨论的若干重要论题．书中习题可用来加深理解，其中有些是较难的．但是，解决一道难题比解决许多容易的习题更有益处．书中文献并未包罗万象，仅局限于介绍一些对读者特别有用的和极有历史价值的文章．

我还得感谢我的朋友、同事和学生，他们帮助我完成了这一著作．还要特别感谢本丛书的编辑 E. Hewitt 教授、G. T. Cargo 教授、G. F. Clements 教授、H. S. Shapiro 教授、J. Case 先生、J. T. Scheick 先生以及我的逼近论讨论班中的学生和美国空军科研室，他们都对我的工作给予了支持和帮助．我将对读者可能给予的任何建议都表示感谢．

G. G. 洛伦茨

1966 年元月

目　　录

第一章

逼近的可能性

1. 基本概念

线性逼近的问题可作如下描述：设 Φ 是定义在某个确定空间 A 上函数的集，f 是定义在 A 上的函数。问能否求得一个接近于函数 f 的线性组合 $P=a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n$（其中 $\phi_i\in\Phi$）？这里有两个先决的问题：其一是选择集 Φ，其二是确定 P 与 f 之间偏差的度量。

现在从第二个问题开始。设 A 是紧致 Hausdorff 空间[1]，又设 $C=C[A]$ 是 A 上连续实函数的全体。那么集 C 是实数上的线性空间。即对于实数 a 以及 f、$g\in C$，其和 $f+g$ 与积 af 也属于 C，从而它满足线性空间的公理。对于一切函数 $f\in C$，上确界

$$\|f\|=\sup_{x\in A}|f(x)| \tag{1}$$

都能达到。因此 $\|f\|=\max\limits_{x\in A}|f(x)|$。这个上确界确定了 $C[A]$ 上的范数，它有下列性质：

$$\|f\|\geqslant 0;\ \|f\|=0,\ \text{当且仅当}\ f=0; \tag{2}$$

$$\|af\|=|a|\cdot\|f\|; \tag{3}$$

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|. \tag{4}$$

---

[1] 一般性地，读者可在这里及本书的后文中用紧致度量空间或者甚至于欧氏空间的紧致子集代替该空间，而不失其实质。

这样，C 构成一个赋范线性空间．类似地，以(1)式为范数的 A 上连续复函数全体的空间也用 $C[A]$ 表示．它是复数域上的赋范线性空间．

除非作特别的声明，这里所考虑的函数以及数乘积都是实的．按 C 范数的收敛性 $f_n\to f$，即当 $n\to\infty$ 时，$\|f_n-f\|\to 0$，等价于对于一切 $x\in A$，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$．由此可以推知：空间 C 是完备的，也即，若 f_n 是 Cauchy 序列(即当 n, $m\to\infty$ 时，$\|f_n-f_m\|\to 0$)，则 f_n 收敛于 C 中某元素 f：

$$\|f_n-f\|\to 0. \tag{5}$$

完备的赋范线性空间称为 Banach 空间．许多 Banach 空间的类型在逼近论中起着重要的作用．例如空间 $L^p=L^p[a, b]$ $(p\geqslant 1)$，其范数为

$$\|f\|=\left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

然而，空间 C 中的逼近却是人们最感兴趣且又最重要的特殊情形(倘若不考虑空间 L^2 中的正交多项式理论)．本书几乎都是围绕着它展开的．

下面定义适用于元素为 f 的 Banach 空间 X 以及一个与它相异的子集 Φ．我们说 f 可以借助于下述线性组合来逼近：

$$P=a_1\phi_1+a_2\phi_2+\cdots+a_n\phi_n \quad (\phi_i\in\Phi,\ a_i \text{ 为实数}), \tag{6}$$

是指对于每个 $\varepsilon>0$ 存在 P，使 $\|f-P\|<\varepsilon$．通常 Φ 是一个序列 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$，那么

$$E_n(f)=E_n^\Phi(f)=\inf_{a_1,\cdots,a_n}\|f-(a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n)\| \tag{7}$$

是 f 借助于 ϕ_i 的第 n 逼近阶．若(7)中的下确界被某个 P 达到，则称此 P 为最佳逼近线性组合．对于上述定义有一个例外情形：若 P 是给定阶数的代数或三角多项式，则(7)中的 n 将取为多项式的阶数．而不一定是函数 ϕ_i 的个数．

对于$[a, b]$上连续实函数的空间$C[a, b]$，乘幂$1, x, \cdots, x^n, \cdots$是一最简单的例子．在此情形中，前$n+1$个函数的线性组合是$n$阶代数多项式$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，这里并不要求$a_n\neq 0$．同样的注释对以后的某些定义也适用．

另一个重要的紧致集K是实数$R=(-\infty, +\infty)$按模2π的加群；$x, x'\in K$之间的距离$|x-x'|$是在R中表示x, x'的数之间的最小距离．显然，可称K为单位圆周．在距离$|x-x'|$之下K成为度量空间．按习惯，用$f\in C^*=C[K]$表示f是R上的周期为2π的连续函数．对于这样的函数，$\int_K fdx$是f在R上的任意长为2π的区间上的积分．一个函数$f\in C^*$未必具有在C^*中的不定积分F，因为$\int_0^x f(t)\,dt$未必是周期性的．显然，$F\in C^*$当且仅当f有零平均值，即$\frac{1}{2\pi}\int_K fdt=0$．这时$F(x)=\mathrm{const}+\int_0^x fdt$．在这些$F$中恰有一个具有零平均值．重复这一讨论可看到，对于每个$p=1, 2, \cdots$，具有零平均值的函数$f\in C^*$有一族p阶不定积分，它们依赖于一个相加的常数．每个这样的积分称为f的p阶不定积分．

对于函数$f\in C^*$常取下述三角多项式：

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{8}$$

的集作逼近工具．此时称多项式(8)是n阶的．若表达式中仅出现余弦$\cos kx$ $(k=0, \cdots, n)$（或正弦），则说它是偶的（或奇的）．利用简单的三角公式可以证明两个n阶和m阶三角多项式的乘积是$n+m$阶三角多项式．

类似于这两种情形，线性组合(6)也常称为多项式.

本章中将讨论借助多项式逼近函数的可能性. 在第二章中将专门讨论最佳逼近多项式的性质.

2. 线性算子

下述定理(将在第3节中证明)是 Weierstrass[103] 得到的.

定理1 每个在 $[a, b]$ 上连续的实函数 f 可借助于代数多项式逼近，即对于每个 $\varepsilon>0$，存在着多项式 $P_n(x)=\sum_0^n a_k x^k$，适合

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon, \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{1}$$

证明这类定理最自然的方法是给出多项式 $P_n(x)$ 的明显公式. 通常，这种公式关于 f 是线性的.

从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的函数 $g=L(f)$ 称为线性算子，乃是指对于一切 f、$f'\in X$ 和一切实数 a 满足条件

$$L(f+f')=L(f)+L(f'); \quad L(af)=aL(f). \tag{2}$$

若 Y 是实直线，则称 L 为线性泛函. 如果有某个正的常数 M，使

$$\|L(f)\|\leqslant M\|f\|, \quad f\in X, \tag{3}$$

则称线性算子 L 为有界的. 这时使(3)成立的所有 M 的下确界仍然是容许的 M. 这个最小的 M 称为 L 的范数，且以 $\|L\|$ 表示之. 由该定义可知，

$$\|L\|=\sup_{f\neq 0}\frac{\|L(f)\|}{\|f\|}=\sup_{f\neq 0}\left\|L\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right\|=\sup_{\|f\|=1}\|L(f)\|. \tag{4}$$

有界的线性算子是连续的. 这是因为

$$\|L(f_n)-L(f)\|\leqslant\|L\|\cdot\|f_n-f\|.$$

故由 $f_n\to f$ (依 X 的范数)可以推出 $L(f_n)\to L(f)$ (依 Y 的范数).

在 $X=C[A]$ 的情形，可以识别 C 的正元素：我们记 $f\geqslant 0$，是指 $f\in C$，并且对于一切 $x\in A$，有 $f(x)\geqslant 0$. 把映 C 到其自身中的算子 L 称为正算子，如果它变换每个正元素 f 为正元素 g. 对于正线性算子，若 $f\leqslant g$ (即，若 $g-f\geqslant 0$)，则 $L(f)\leqslant L(g)$；又有 $|L(f)|\leqslant L(|f|)$，其中 $|f|$ 是取值 $|f(x)|$ 的函数. 这种算子总是有界的：从

$$|L(f)|\leqslant L(|f|)\leqslant L(\|f\|e)=\|f\|L(e)$$

(其中 e 是常值函数 $e(x)=1$)推出

$$\|L(f)\|\leqslant\|L(e)\|\cdot\|f\|,$$

于是

$$\|L\|=\|L(e)\|.$$

$L(f)$ 在点 $x\in A$ 处的值记作 $L(f, x)$.

例 1. Bernstein 多项式. 对于定义在 $[0, 1]$ 上的函数 f，命

$$B_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad(n=0, 1, \cdots).\tag{5}$$

显然，这是一个映 $C[0, 1]$ 到其自身中的正线性算子. 由二项公式

$$B_n(e, x)=\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)=1,\quad p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\tag{6}$$

可看到，$\|B_n\|=1$，其中 $n=0, 1, \cdots$.

例 2. Fourier 级数. 设 f 是周期为 2π 的可积函数，其

Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{7}$$

的系数由公式

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt dt \tag{8}$$

给出. 例如,有限和 1(7) 中增加一些零项便得三角多项式 T_n 的 Fourier 级数. 考察级数(7)的第 n 部分和 s_n. 由通常的计算易得

$$s_n=s_n(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt. \tag{9}$$

为了证明此式, 只要写 $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$, 这里

$$u_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(t)dt,\quad u_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(t-x)dt$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots),$$

然后应用公式

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=D_n(\alpha), \tag{10}$$

上式的正确性可通过两边乘以 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 得到. 同样, 利用公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3}{2}\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{11}$$

可得 s_n 的算术平均表示式

$$\sigma_n=\sigma_n(f, x)=\frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2 dx. \tag{12}$$

于是，$\sigma_n(f)$ 是映 C^* 到其自身的正线性算子列. 因为 $\sigma_n(e)=e$（对函数 $e(x)\equiv1$，所有的 $s_n(x)\equiv1$）. 故有 $\|\sigma_n\|=1$. 算子 $s_n(f)$ 对于 $f\in C^*$ 也是线性的，但不是正的. 由 s_n 和 σ_n 的定义推知，对于每个 f 来说，$s_n(f, x)$ 和 $\sigma_n(f, x)$ 分别是 n 阶和 $n-1$ 阶三角多项式. $s_n(f)$ 的范数由下述定理给出[1].

定理 2 (Fejér)算子 $s_n(f)$ 的范数 $\|s_n\|$ 等于

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt=\frac{4}{\pi^2}\log n+O(1), \tag{13}$$

也即对于每个固定的 x，作为由 C^* 到 R 的线性泛函来考虑，$s_n(f, x)$ 的范数等于 (13).

证明 因为 $D_n(t)$ 有周期 2π，故

$$|s_n(f, x)|\leqslant\|f\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t-x)|dt=A_n\|f\|.$$

此不等式表明，与算子 s_n 相同，泛函的范数不超过 A_n. 为了证明这些范数恰好等于 A_n，只要对给定的 $x\in K$ 和 $\varepsilon>0$，找出连续函数 g，使得 $\|g\|=1$，且

[1] 我们利用下述记号：若 u_n 和 v_n 是 n 的函数，则我们记 (a) $u_n=O(v_n)$，倘若对于某常数 M，$|u_n|\leqslant Mv_n$；(b) $u_n=o(v_n)$，倘若当 $n\to\infty$ 时，$u_n/v_n\to0$；(c) $u_n\sim v_n$，倘若当 $n\to\infty$ 时，$u_n/v_n\to1$ 以及 (d) $u_n\approx v_n$，倘若 u_n/v_n 介于两个常数 m 与 M 之间，其中 $0<m<M$.