3

从祖冲之的圆周率谈起

华罗庚

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数学小丛书

(3)

从祖冲之的圆周率谈起

华罗庚

北京市数学会编

人民教育出版社
1964年·北京

我国古代伟大数学家祖冲之提出的计算圆周率的约率和密率，孕育着用有理数最佳逼近实数的问题．“逼近”这个概念在近代数学中是十分重要的．本书从回答为什么苏联发射的人造行星将于2113年又接近地球，以及天文上的一些有趣现象说起，在最大公约数、辗转相除法、连分数等中学生已有的数学知识的基础上，导出了用有理数最佳逼近实数的原理和方法．凡是几种周期的重遇或复迭，都可能用到这一套数学，而多种周期现象经常出现于声波、光波、电波、水波和空气波等的研究中．

从祖冲之的圆周率谈起

华罗庚

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

山东新华印刷厂德州厂印装

统一书号：13012·0242　字数：23千

开本：787×1092毫米　1/32　印张：$1\frac{3}{8}$

1964年2月新一版

1979年1月第2次印刷

北京29,301—329,300册

定价 0,13 元

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962年4月

"……宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆徑……为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽；正数在盈朒二限之間。密率：圆徑一百一十三，圆周三百五十五；約率：圆徑七，周二十二。……指要精密，算氏之最者也。所著書，名为綴术，学官莫能究其深奥，是故废而不理。"

——唐长孙无忌《隋書》卷十六律历卷十一——

目　次

一　祖冲之的約率$\frac{22}{7}$和密率$\frac{355}{113}$

祖冲之是我国古代的伟大数学家。他生于公元429年，卒于公元500年。他的儿子祖暅和他的孙子祖皓，也都是数学家，善算历。

关于圆周率π，祖冲之的貢献有二：

(i) $3.1415926<\pi<3.1415927$；

(ii)他用$\frac{22}{7}$作为約率，$\frac{355}{113}$作为密率。

这些結果是刘徽割圆术之后的重要发展．刘徽从圆內接正六边形起算，令边数一倍一倍地增加，即12、24、48、96、……1536，……，因而逐个算出六边形、十二边形、二十四边形……的面积，这些数值逐步地逼近圆周率．刘徽方法的特点，是得出一批一个大于一个的数值，这样来一步一步地逼近圆周率．这方法是可以无限精密地逼近圆周率的，但每一次都比圆周率小。

祖冲之的結果(i)从上下两方面指出了圆周率的誤差范围。这是大家都容易看到的事实，因此在这本小書中不預备多講．我只准备着重地談一談結果(ii)．在談到$\frac{355}{113}$的时候，一定能从

$$\frac{355}{113}=3.1415929\cdots$$

看出，他所提出的$\frac{355}{113}$惊人精密地接近于圆周率，准确到六位

小数。也有人会指出这一发現比欧洲人早了一千年。因为德国人奥托(Valenlinus Otto)在1573年才发現这个分数。如果更深入地想一下，就会发現$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$的意义还远不止这些。有些人認为那时的人們喜欢用分数来計算。这样看問題未免太簡单了。其实其中孕育着不少道理，这道理可以用来推算天文上的很多現象。无怪乎祖冲之祖孙三代都是算历的专家。这个約率和密率，提出了“用有理数最佳逼近实数”的問題。“逼近”这个概念在近代数学中是十分重要的。

二 人造行星将于2113年又接近地球

我們暂且把“用有理数最佳逼近实数”的問題放一放，而再提一个事实：

1959年苏联第一次发射了一个人造行星，报上說：苏联某专家算出，五年后这个人造行星又将接近地球，在2113年又将非常接近地球。这是怎样算出来的？难不难，深奥不深奥？我們中学生能懂不能懂？ 我說能懂的！不需要专家，中学生是可以学懂这个方法的。

先看为什么五年后这个人造行星会接近地球。报上登过这个人造行星繞太阳一周的时間是450天。如果以地球繞日一周360天計算，地球走五圈和人造行星走四圈不都是1800天嗎？因此五年后地球和人造行星将相互接近。至于为什么在2113年这个人造行星和地球又将非常接近？ 我們将在第四节中說明。

再看五圈是怎样算出来的。 任何中学生都会回答：这是

由于約分

$$\frac{360}{450}=\frac{4}{5}$$

而得来的，或者这是求450和360的最小公倍数而得来的. 它們的最小公倍数是1800，而 $\frac{1800}{360}=5$，$\frac{1800}{450}=4$；也就是当地球繞太阳五圈时，人造行星恰好回到了原来的位置. 求最小公倍数在这儿找到了用場. 在进入下节介紹輾轉相除法之前，我們再說一句，地球繞太阳并不是360天一周，而是 $365\frac{1}{4}$ 天. 因而仅仅学会求最小公倍数法还不能够应付这一問題，还須更上一层楼.

三　輾轉相除法和連分数

我們还是循序漸进吧. 先从簡单的（原来在小学或初中一年級講授的）輾轉相除法講起. 但我們采用較高的形式，采用学过代数学的同学所能理解的形式.

給两个正整数 a 和 b，用 b 除 a 得商 a_0，余数 r. 写成式子

$$a=a_0b+r, \qquad 0\leqslant r<b. \tag{1}$$

这是最基本的式子. 如果 r 等于0，那么 b 可以除尽 a，而 a、b 的最大公約数就是 b.

如果 $r\neq 0$，再用 r 除 b，得商 a_1，余数 r_1，即

$$b=a_1r+r_1 \qquad 0\leqslant r_1<r. \tag{2}$$

如果 $r_1=0$，那么 r 除尽 b，由（1）它也除尽 a. 又任何一个除尽 a 和 b 的数，由（1）也一定除尽 r. 因此，r 是 a、b 的最大公約数.

如果 $r_1\neq 0$，用 r_1 除 r，得商 a_2，余数 r_2，即

$$r=a_2r_1+r_2, \qquad 0\leqslant r_2<r_1. \tag{3}$$

如果 $r_2=0$，那么由(2) r_1 是 b、r 的公約数，由(1)它也是 a、b 的公約数。反之，如果一数除得尽 a、b，那由(1)它一定除得尽 b、r，由(2)它一定除得尽 r、r_1，所以 r_1 是 a、b 的最大公約数。

如果 $r_2\neq 0$，再用 r_2 除 r_1，如法进行。由于 $b>r>r_1>r_2>\cdots\cdots(\geqslant 0)$ 逐步小下来，因此經过有限步驟后一定可以找出 a、b 的最大公約数来(最大公約数可以是 1)。这就是**輾轉相除法**，或称**欧几里得算法**。这个方法是我們这本小册子的灵魂。

例 1 求 360 和 450 的最大公約数。

$$450=1\times 360+90,$$

$$360=4\times 90.$$

所以 90 是 360、450 的最大公約数。 由于最小公倍数等于两数相乘再除以最大公約数，因此这二数的最小公倍数等于

$$360\times 450\div 90=1800,$$

因而得出上节的結果。

例 2 求 42897 和 18644 的最大公約数。

$$42897=2\times 18644+5609,$$

$$18644=3\times 5609+1817,$$

$$5609=3\times 1817+158,$$

$$1817=11\times 158+79,$$

$$158=2\times 79.$$

因此最大公約数等于 79。

計算的草式如下：

$$
\begin{array}{r|c|r}
42897 & & \\
-\;37288 & 2 & 18644 \\
\hline
5609 & 3 & 16827 \\
5451 & 3 & 1817 \\
\hline
158 & 11 & 1738 \\
158 & 2 & 79 \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

例 2 的計算也可以写成为

$$
\frac{42897}{18644}=2+\frac{5609}{18644}=2+\cfrac{1}{\cfrac{18644}{5609}}
$$

$$
=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1817}{5609}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{158}{1817}}}
$$

$$
=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{11+\cfrac{79}{158}}}}
$$

$$
=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{2}}}}\,.
$$

这样的繁分数称为連分數，为了节省篇幅，我們把它写成

$$
2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2}.
$$

注意 2、3、3、11、2 都是草式中間一行的数字。倒算回去，得

$$
2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{23}
$$

$$
=2+\frac{1}{3}+\frac{23}{71}=2+\frac{71}{236}=\frac{543}{236}.
$$

这就是原来分数的既約分数。

依次截段得

$$2,\quad 2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\quad 2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3}=\frac{23}{10},\quad 2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{11}=\frac{260}{113}.$$

这些分数称为$\frac{543}{236}$的**漸近分数**。我們看到第一个漸近分数比$\frac{543}{236}$小，第二个漸近分数比它大，第三个又比它小，……为什么叫做漸近分数？我們看一下分母不超过10的分数和$\frac{543}{236}$相接近的情况.

分母是1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，而最接近于$\frac{543}{236}$的分数是

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{9}{4},\frac{12}{5},\frac{14}{6},\frac{16}{7},\frac{19}{8},\frac{21}{9},\frac{23}{10}.$$

取二位小数，它們分别等于

2.00,2.50,2.33,2.25,2.40,2.33,2.29,2.38,2.33,2.30.

和$\frac{543}{236}=2.30$相比較，可以发現其中有几个特出的既約分数

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{16}{7},\frac{23}{10},$$

这几个数比它們以前的数都更接近于$\frac{543}{236}$。而其中$\frac{2}{1}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{23}{10}$都是由連分数截段算出的数，即它們都是漸近分数。

我們現在再証明：分母小于113的分数里面，沒有一个比$\frac{260}{113}$更接近于$\frac{543}{236}$了。要証明这点很容易，首先

$$\left|\frac{543}{236}-\frac{260}{113}\right|=\frac{1}{236\times 113}.$$

命$\frac{a}{b}$是任一分母b小于113的分数，那么

$$\left|\frac{543}{236}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|543b-236a|}{236\times b}\geqslant\frac{1}{236\times b}>\frac{1}{236\times 113}.$$

四　答第二节的問

現在我們来回答第二节里的問題：怎样算出人造行星2113年又将非常接近地球？

人造行星繞日一周需450天，地球繞日一周是$365\frac{1}{4}$天．如果以$\frac{1}{4}$天做单位，那么人造行星和地球繞日一周的时間各为1800和1461个单位。如上节所講的方法，

1800		1461
1461	1	
339	4	1356
315	3	105
24	4	96
18	2	9
6	1	6
6	2	3，
0		

即得連分数

$$1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}.$$

由此得漸近分数

$$1,\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\quad 1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3}=\frac{16}{13},\quad 1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{69}{56},$$

$$1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}=\frac{154}{125},\quad \cdots\cdots$$

第一个漸近分数說明了地球5圈，人造行星4圈，即五年后人造行星和地球接近．但地球16圈，人造行星13圈更接近些；地球69圈，人造行星56圈还要接近些；而地球154圈，人造

行星 125 圈又更要接近些．这就是报上所登的苏联专家所算出的数字了，这也就是在

$$1959+154=2113$$

年，人造行星将非常接近地球的道理．

当然，由于連分数还可以做下去，所以我們可以更精密地算下去；但是因为 450 天和 $365\frac{1}{4}$ 天这两个数字本身并不很精确，所以再繼續算下去也就沒有太大的必要了．但讀者不妨作为习題再算上一項．

五　約率和密率的內在意义

在上节中，我們将 $365\frac{1}{4}$、450 乘 4 以后再算．实际上，在求两个分数的比的連分数时，不必把它們化为两个整数再算．

例如，3.14159265 和 1 可以計算如下：

3.14159265		1
3	3	
0.14159265	7	0.99114855
0.13277175	15	0.00885145
0.00882090	1	0.00882090
		0.00003055

，

即得

$$\pi=3+\frac{1}{7}\,{}_{+}\frac{1}{15}\,{}_{+}\frac{1}{1}\,{}_{+}\cdots。$$

漸近分数是

3　〔径一周三,《周髀算径》〕,

$3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$　〔約率,何承天(公元 370-447)〕,

$3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15}=\frac{333}{106}$,

$3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1}=\frac{355}{113}$　〔密率,祖冲之(公元 429-500)〕.

实际算出 $\frac{22}{7}=3.142$ 和 $\frac{355}{113}=3.1415929$, 誤差分别在小数点后第三位和第七位.

用比 $\pi=3.14159265$ 更精密的圓周率来計算,我們可以得出

$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots.$$

$\frac{355}{113}$ 之后的一个漸近分数是 $\frac{103993}{33102}$. 这是一个很不容易記忆、也不便于应用的数.

以下的数据說明, 分母比 7 小的分数不比 $\frac{22}{7}$ 更接近于 π, 而分母等于 8 的也不比 $\frac{22}{7}$ 更接近于 π.

分母 q	$q\pi$	分子 p	$\pi-\frac{p}{q}$
1	3.1416	3	0.1416
2	6.2832	6	0.1416
3	9.4248	9	0.1416
4	12.5664	13	−0.1084
5	15.7080	16	−0.0584
6	18.8496	19	−0.0251
7	21.9912	22	−0.0013
8	25.1328	25	0.0166

关于 $\frac{333}{106}$ 也有同样性質(以后将会証明的). 为了避免不

必要的計算，我仅仅指出，

$$\left|\pi-\frac{330}{105}\right|=\left|\pi-\frac{22}{7}\right|=0.0013,$$

$$\left|\pi-\frac{333}{106}\right|=0.00009,$$

$$\left|\pi-\frac{336}{107}\right|=0.0014,$$

以 $\frac{333}{106}$ 的誤差为最小。又

$$\left|\pi-\frac{352}{112}\right|=0.0013,$$

$$\left|\pi-\frac{355}{113}\right|=0.0000007,$$

$$\left|\pi-\frac{358}{114}\right|=0.0012,$$

以 $\frac{355}{113}$ 的誤差为最小。

总之，在分母不比 8、107、114 大的分数中，分别不比 $\frac{22}{7}$、$\frac{333}{106}$、$\frac{335}{113}$ 更接近于 π；而 $\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$ 又是两个相当便于記忆和应用的分数。我国古代的数学家祖冲之能在这么早的年代，得到 π 的这样两个很理想的近似值，是多么不簡单的事。

注意　并不是仅有这些数有这性質，例如 $\frac{331}{99}$ 就是一个。

$$\left|\pi-\frac{308}{98}\right|=0.0013,\qquad \left|\pi-\frac{311}{99}\right|=0.0002,$$

$$\left|\pi-\frac{314}{100}\right|=0.0016.$$

又

$$\frac{374}{119}=3.1429,\quad \frac{377}{120}=3.14167,\quad \frac{380}{121}=3.1405.$$

这說明 $\frac{377}{120}$ 比另外两个数来得好，但是它的分母比 $\frac{355}{113}$ 的分母大，而且它不比 $\frac{355}{113}$ 更精密，它的精密度甚至落后于 $\frac{333}{106}$。